Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

В. Б. Хазанов

РЕЗУЛЬТАНТНЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

В работе описываются методы решения некоторых задач для параметрических полиномиальных матриц. В основе методов лежит результантный подход к реализации операций сложения и умножения полиномиальных матриц в терминах постоянных матриц. Наиболее важной из рассматриваемых задач является построение минимального полиномиального базиса нуль-пространства матрицы. Существующая теория не давала ответ на вопрос о существовании такого базиса подпространства в многопараметрическом случае. Предлагаемый метод является конструктивным обоснованием положительного ответа на этот вопрос. Он также является основой для разработки методов решения других многопараметрических задач алгебры (см. работу [13] в этом сборнике).

Статья состоит из пяти параграфов. В §1 известные виды результантных матриц, отвечающие однопараметрическим полиномиальным матрицам (матричным полиномам), обобщаются на многопараметрический случай; устанавливаются свойства результантных матриц, позволяющие сводить операции над полиномиальными объектами (сложение, умножение) к соответствующим операциям над постоянными матрицами. В §§2 и 3 описываются методы построения соответственно базиса образа (базиса линейной оболочки полиномиальных векторов) и минимального базиса нуль-пространства полиномиальной матрицы. В §4 описаны методы построения жордановых цепочек и жордановых полурешеток векторов, отвечающих кратной точке спектра полиномиальной матрицы. В §5 приводятся некоторые общие замечания. При решении указанных задач исходная полиномиальная

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00945 и НШ-2268.2003.1.

матрица не преобразуется, что является важным, учитывая плохую обусловленность операций с полиномиальными объектами.

Все объекты рассматриваются над некоторым числовым полем (например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Вопросы оптимизации вычисления нуль-пространств разреженных результантных матриц и точности вычислений не рассматриваются. Определения и свойства спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных и рациональных матриц, которые используются в работе, приведены в [10–12].

§1. Результантные матрицы

Рассмотрим некоторые виды результантных матриц, отвечающие однопараметрическим матричным полиномам, включая известные (см., например, [1, 18, 19]), и обобщим их на многопараметрический случай.

1.1. Однопараметрический случай. Полиномиальной $m\times n$ матрице $F(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} F_i\lambda^i$ степени $s = \deg F$ с постоянными $m \times n$ матричными коэффициентами F_i, $i = 0, \ldots, s$ $(F_s \neq O_{m\times n})$, ставится в соответствие результантная матрица[1] уровня $t\,(t \geqslant 0)$ размеров $m(s+t+1) \times n(t+1)$:

$$F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} := \underbrace{\begin{bmatrix} F_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ F_s & \ddots & F_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & F_s \end{bmatrix}}_{t+1} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_s \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix}}\right\} s+t+1. \tag{1.1}$$

Введем полиномиальную $m(t+1) \times m$ матрицу

$$W^t_m(\lambda) := \operatorname{row}\{\lambda^i I_m\}^t_{i=0}, \quad W^0_m(\lambda) = I_m.$$

Тогда выполняются соотношения

$$W^{s+t}_m(\lambda) F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n,s} = F(\lambda) W^t_n(\lambda). \tag{1.2}$$

[1] Матрицу такого вида, определяемую с точностью до операции блочного транспонирования (обозначаемого ниже верхним индексом B) и перестановок их блочных строк и столбцов называют обобщенной матрицей Сильвестра.

В частности, при $t = 0$ блочный столбец[2] $F^{\mathrm{R}\,0}_{m\times n,s} \equiv F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} = \mathrm{col}\{F_i\}_{i=0}^{s}$ размеров $m(s+1)\times n$, который будем называть результантным вектором матрицы $F(\lambda)$, удовлетворяет соотношению $W^s_m(\lambda)F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} = F(\lambda)$. Очевидно, что результантный вектор матрицы $F(\lambda)+G(\lambda)$, где $G(\lambda)$ – полиномиальная $m\times n$ матрица степени t, удовлетворяет соотношению

$$(F+G)^{\mathrm{R}}_{m\times n;\max\{s,t\}} = \begin{cases} F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} + \widetilde{G}^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}, & s>t,\\ F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}, & s=t,\\ \widetilde{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;t} + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;t}, & s<t. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $\widetilde{G}(\lambda)$ или $\widetilde{F}(\lambda)$ – дополненная старшими членами с нулевыми коэффициентами полиномиальная матрица степени s при $s>t$ или степени t при $t>s$ соответственно. Если $G(\lambda)$ – полиномиальная $n\times p$ матрица степени t, то из (1.2) следует, что результантный вектор $m\times p$ матрицы $H(\lambda) = F(\lambda)G(\lambda)$ степени[3] $s+t$ удовлетворяет соотношению

$$H^{\mathrm{R}}_{m\times n;s+t} = F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} G^{\mathrm{R}}_{n\times p;t}. \tag{1.4}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} H(\lambda) = W^{s+t}_m(\lambda)H^{\mathrm{R}}_{m\times n;s+t} = W^{s+t}_m(\lambda)F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s},\\ G^{\mathrm{R}}_{n\times p;t} = F(\lambda)W^t_n(\lambda)G^{\mathrm{R}}_{n\times p;t} = F(\lambda)G(\lambda). \end{gathered}$$

Рассмотрим теперь результантные матрицы, отвечающие совокупностям строк и столбцов матрицы $F(\lambda)$, и их связь с результантной матрицей (1.1). Пусть

$$F(\lambda) = \mathrm{row}\{\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)\}_{j=1}^{n} = \mathrm{col}\{\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)\}_{i=1}^{m}, \quad s = \max_j s_{\mathrm{c}\,j} = \max_i s_{\mathrm{r}\,i},$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)$ и $\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)$ – столбцы и строки степени $s_{\mathrm{c}\,j}$, $j=1,\dots,n$, и $s_{\mathrm{r}\,i}$, $i=1,\dots,m$, соответственно полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\lambda)$ степени s. “Строчная” и “столбцовая” результантные

[2] Далее будем опускать указание уровня $t=0$.

[3] Если фактическая степень матрицы $H(\lambda)$ будет меньше $s+t$, то старшие блочные компоненты отвечающего ей результантного вектора будут равны нулю. Далее аналогичные замечания будут опускаться.

матрицы[4] уровня t

$$F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s} := \mathrm{col}\{(\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i})^{\mathrm{R}\,t}_{1\times n;s_{\mathrm{r}\,i}}\}^m_{i=1}, \quad F^{\mathrm{Rc}\,t}_{m\times n;s} := \mathrm{row}\{(\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j})^{\mathrm{R}(s-s_{\mathrm{c}\,j}+t)}_{m\times 1;s_{\mathrm{c}\,j}}\}^n_{j=1} \tag{1.5}$$

имеют размеры $\sum\limits_{i=1}^{m}(s_{\mathrm{r}\,i}+t+1)\times n(t+1)$ и $m(s+t+1)\times\sum\limits_{j=1}^{n}(s-s_{\mathrm{c}\,j}+t+1)$ соответственно. Матрица $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$ отличается от матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s}$ дополнительными нулевыми $\sum\limits_{i=1}^{m}(s-s_{\mathrm{r}\,i})$ строками, а также порядком остальных строк. Каждая группа из $s-s_{\mathrm{r}\,i}$ дополнительных нулевых столбцов матрицы $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$ отвечает такой строке $\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)$, для которой $s_{\mathrm{r}\,i} < s$. Матрица $F^{\mathrm{Rc}\,t}_{m\times n;s}$ отличается от матрицы $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$ дополнительными $\sum\limits_{j=1}^{n}(s-s_{\mathrm{c}\,j})$ столбцами, а также порядком остальных столбцов. Каждая группа из $s-s_{\mathrm{c}\,j}$ дополнительных столбцов матрицы $F^{\mathrm{Rc}\,t}_{m\times n;s}$ отвечает такому столбцу $\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$, для которого $s_{\mathrm{c}\,j} < s$. Результантные матрицы (1.5) удовлетворяют соотношениям вида (1.2):

$$\begin{aligned} \mathrm{diag}\{W_1^{s_{\mathrm{r}\,i}+t}(\lambda)\}^m_{i=1}F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s} &= F(\lambda)W^t_n(\lambda),\\ W^{mT}_{s+t}(\lambda)F^{\mathrm{Rc}\,t}_{m\times n;s} &= F(\lambda)\,\mathrm{diag}\{W_1^{s_{\mathrm{c}\,j}+t}(\lambda)\}^m_{i=1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Рассмотрим представления матрицы $H(\lambda) = F(\lambda)G(\lambda)$ вида

$$H(\lambda) = \mathrm{col}\{\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)G(\lambda)\}^n_{i=1}, \quad H(\lambda) = \mathrm{row}\{F(\lambda)\mathbf{g}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)\}^p_{j=1},$$
$$H(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)\mathbf{g}_{\mathrm{r}\,j}(\lambda). \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{g}_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)$ и $\mathbf{g}^T_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)$ – столбцы и строки степени $t_{\mathrm{c}\,j}$, $j = 1,\dots p$, и $t_{\mathrm{r}\,i}$, $i = 1,\dots,n$, соответственно полиномиальной $m\times p$ матрицы $G(\lambda)$ степени $t = \max\limits_j t_{\mathrm{c}\,j} = \max\limits_i t_{\mathrm{r}\,i}$. Тогда, учитывая (1.2), (1.6), получаем соответственно "строчный", "столбцовый" и "столбцово-строчный" аналоги соотношения (1.4):

$$H^{\mathrm{Rr}}_{m\times p;s+t} = F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s}G^{\mathrm{R}}_{n\times p;t}, \tag{1.8}$$
$$H^{\mathrm{Rc}}_{m\times p;s+t} = F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}G^{\mathrm{Rc}}_{n\times p;t}, \tag{1.9}$$
$$H^{\mathrm{R}}_{m\times p;l} = F^{\mathrm{Rc}\,l-s}_{m\times n;s}G^{\mathrm{Rr}}_{n\times p;t}. \tag{1.10}$$

[4] "Строчную" результантную матрицу называют обобщенной результантной матрицей Воловича.

В последнем случае предполагается, что $l = s_{\mathrm{c}\,j} + t_{\mathrm{r}\,j} = \mathrm{const}$, $j = 1, \ldots, n$.

Замечания. 1. Выражения (1.8)–(1.10) при соответствующих соотношениях степеней полиномиальных матриц $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ осуществляют более экономную реализацию их умножения, чем (1.4).

2. В случае блочного представления матрицы

$$F(\lambda) = \mathrm{row}\{F_{\mathrm{c}\,j}(\lambda)\}_{j=1}^{n} = \mathrm{col}\{F_{\mathrm{r}\,i}(\lambda)\}_{i=i}^{m}$$

аналогичным образом можно ввести блочные “строчную” и “столбцовую” результантные матрицы.

3. Результантные матрицы, отвечающие скалярным полиномам $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, определяются очевидным образом. Опуская указание размеров $m = n = p = 1$, имеем из (1.4)

$$(fg)^{\mathrm{R}}_{s+t} = f^{\mathrm{R}\,t}_{s}\, g^{\mathrm{R}}_{t} = g^{\mathrm{R}\,s}_{t}\, f^{\mathrm{R}}_{s}.$$

1.2. Многопараметрический случай. Рассмотрим сначала тривиальное обобщение однопараметрического случая. Многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрице $F(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sum\limits_{i=0}^{s} F_i(\boldsymbol{\mu})\lambda^i$ степени $s = \deg_\lambda F$ по параметру λ с полиномиальными $m \times n$ матричными коэффициентами $F_i(\boldsymbol{\mu})$, $i = 0, \ldots, s$, $F_s(\boldsymbol{\mu}) \neq \mathbb{O}_{m\times n}$, поставим в соответствие результантную $m(s+t+1) \times n(t+1)$ матрицу уровня t ($t \geqslant 0$) вида (1.1):

$$F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) = \underbrace{\begin{bmatrix} F_0(\boldsymbol{\mu}) & & \\ \vdots & \ddots & \\ F_s(\boldsymbol{\mu}) & \ddots & F_0(\boldsymbol{\mu}) \\ & \ddots & \vdots \\ & & F_s(\boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}}_{t+1} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_s \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix}}\right\} s+t+1, \tag{1.11}$$

которая удовлетворяет соотношению вида (1.2)

$$W^{s+t}_{m}(\lambda) F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) = F(\lambda, \boldsymbol{\mu}) W^{t}_{n}(\lambda),$$

В частности, результантный вектор $F^{\mathrm{R}\,0}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) \equiv F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{col}\{F_i(\boldsymbol{\mu})\}_{i=0}^{s}$ размеров $m(s+1) \times n$ удовлетворяют соотношению $W^{s}_{m}(\lambda) F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) = F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Очевидно, что результантные векторы матриц $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})+G(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $H(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = F(\lambda, \boldsymbol{\mu})G(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ удовлетворяют следующим соотношениям вида (1.3) и (1.4):

$$(F+G)^{\mathrm{R}}_{m\times n;\max\{s,t\}}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) + \widetilde{G}^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}), & s > t, \\ F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}), & s = t, \\ \widetilde{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;t}(\boldsymbol{\mu}) + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;t}(\boldsymbol{\mu}), & s < t, \end{cases}$$

$$H^{\mathrm{R}}_{m\times n;s+t}(\boldsymbol{\mu}) = F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}(\boldsymbol{\mu}) G^{\mathrm{R}}_{n\times p;t}(\boldsymbol{\mu}).$$

Здесь $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и $G(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – полиномиальные матрицы соответствующих размеров степени s и t по параметру λ соответственно, а $\widetilde{G}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ или $\widetilde{F}(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ – дополненная старшими по параметру λ членами с нулевыми коэффициентами полиномиальная матрица степени s при $s > t$ или степени t при $t > s$ соответственно. Аналогичным образом могут быть определены строчная и столбцовая результантные матрицы вида (1.5) и получены соотношения вида (1.6) и (1.8)–(1.10).

Рассмотрим теперь q-параметрическую полиномиальную $m\times n$ матрицу $F(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \sum\limits_{k_1=0}^{s_1} \cdots \sum\limits_{k_q=0}^{s_q} F_{k_1,\ldots,k_q} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_q^{k_q}$ с постоянными матричными коэффициентами $F_{k_1\ldots k_q}$, где $s_j = \deg_{\lambda_j} F$ – степень по параметру λ_j, $j = 1, \ldots, q$. Построим по параметру λ_1 результантную матрицу $F^{\mathrm{R}\,t_1}_{m\times n;s_1}(\lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ вида (1.11) уровня t_1 размеров $m(s_1 + t_1 + 1) \times n(t_1 + 1)$. Затем для нее построим результантную матрицу по параметру λ_2 уровня t_2 и т.д. Окончательная постоянная результантная матрица будет иметь размеры $m \prod\limits_{j=1}^{q} (s_j + t_j + 1) \times n \prod\limits_{j=1}^{q} (t_j + 1)$. В простейшем случае, когда совпадают все степени $s_j = s$ и все уровни $t_j = t$, $j = 1, \ldots, q$, получаем "кубическую" результантную матрицу размеров $m(s + t + 1)^q \times n(t + 1)^q$.

Для такой результантной матрицы можно получить аналоги соотношений (1.2)–(1.4), определить соответствующие строчную и столбцовую результантные матрицы вида (1.5) и получить для них аналоги соотношений (1.6) и (1.8)–(1.10). Однако представляется, что, с точки зрения последующего применения результантных матриц для решения рассматриваемых ниже задач, более удобным является несколько иной подход к обобщению однопараметрического случая.

Рассмотрим другое представление q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\mathbf{k}} F_{k_1 \dots k_q} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_q^{k_q}$$

с постоянными матричными коэффициентами $F_{\mathbf{k}}$. Степень $\delta_{\mathbf{k}}$ каждого монома определяется порядком его мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_q)$: $\delta_{\mathbf{k}} = \sum\limits_{j=1}^{q} k_j$, а степень матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ (по совокупности всех переменных) определяется как наивысшая из степеней ее мономов: $s = \deg F := \max\limits_{F_{\mathbf{k}} \neq \mathbb{O}} \delta_{\mathbf{k}}$. Запишем матрицу $F(\lambda)$ степени s в порядке возрастания степеней ее $\binom{q+s}{s}$ мономов[5], располагая мономы одной степени в лексикографическом порядке, когда моном степени t (число таких мономов равно $\binom{q+t-1}{t}$), содержащий произведение $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_t}$, $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_t \leqslant q$, предшествует моному той же степени, содержащему произведение $\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_t}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_t \leqslant q$, при условии, что или $i_1 < j_1$, или при $i_l = j_l$, $l = 1, \dots, k-1$, $i_k < j_k$, где $2 \leqslant k \leqslant t$:

$$\begin{gathered} F(\boldsymbol{\lambda}) = F_{00\dots0} + (F_{10\dots0}\lambda_1 + F_{01\dots0}\lambda_2 + \dots + F_{0\dots01}\lambda_q) \\ +(F_{20\dots0}\lambda_1^2 + F_{11\dots0}\lambda_1\lambda_2 + \dots + F_{00\dots2}\lambda_q^2) + \dots + \\ +(F_{s00\dots0}\lambda_1^s + F_{s-1,10\dots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_2 + \dots + F_{s-1,00\dots1}\lambda_1^{s-1}\lambda_q + \\ + \dots + F_{100\dots,s-1}\lambda_1\lambda_q^{s-1} + \dots + F_{000\dots s}\lambda_q^s). \end{gathered}$$

Определим для $F(\boldsymbol{\lambda})$ результантный вектор, т.е. результантную матрицу уровня 0

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{R}\,0}_{m\times n;q;s} &\equiv F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s} = \operatorname{col}\{F_k\}_{\delta_{\mathbf{k}}=0}^{s} \\ &\equiv [F_{00\dots0}\; F_{10\dots0}\; \dots\; F_{0\dots01}\; F_{20\dots0}\; F_{11\dots0}\; \dots\; F_{00\dots2}\; \dots \\ &\qquad\qquad F_{s0\dots0}\; F_{s-1,1\dots0}\; \dots\; F_{0\dots0s}]^B \end{aligned}$$

размеров $\binom{s+q}{q} \times n$ и полиномиальную $m \times m\binom{s+q}{q}$ матрицу

$$\begin{aligned} W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) &= \operatorname{row}\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} I_m\}_{\delta_{\mathbf{k}}=0}^{s} \\ &\equiv [I_m\; \lambda_1 I_m\; \lambda_2 I_m \dots \lambda_q I_m\; \lambda_1^2 I_m\; \lambda_1\lambda_2 I_m\; \dots\; \lambda_q^2 I_m \\ &\qquad\qquad \dots\; \lambda_1^s I_m\; \lambda_1^{s-1}\lambda_2 I_m\; \dots\; \lambda_q^s I_m]. \end{aligned}$$

[5] Учитываются все мономы, включая старшие, даже если некоторые из них равны нулю.

Матрицы $F_{\mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} I_m$, отвечающие мультииндексу $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_q)$, располагаются в позиции $1 + \sum\limits_{j=1}^{q} \binom{\sum\limits_{i=1}^{j} k_{q-i+1} + j - 1}{j}$ соответствующего блочного вектора. При этом имеет место соотношение $F(\boldsymbol{\lambda}) = W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$.

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ – мультииндекс порядка $t = \delta_{\mathbf{l}} = \sum\limits_{j=1}^{q} l_j$. Тогда матрице $F^{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{l}} F(\boldsymbol{\lambda})$ степени $s + t$ отвечает результантный вектор $F^{\mathbf{l}\mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}$ размеров $m\binom{s+t+q}{q} \times n$. Он получается перемещением каждого блока $F_{\mathbf{k}}$ результантного вектора $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$ в позицию, отвечающую мультииндексу $\mathbf{k}+\mathbf{l}$: $1 + \sum\limits_{j=1}^{q} \binom{\sum\limits_{i=1}^{j} k_{q-i+1} + l_{q-i+1} + j - 1}{j}$. В остальных позициях $F^{\mathbf{l}\mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}$ находятся нулевые матрицы. По аналогии с однопараметрическим случаем, результантную матрицу $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s}$ уровня $t > 0$ определим следующим образом:

$$F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s} = \begin{bmatrix} F^{\mathrm{R}\,t-1}_{m\times n;q;s} & \\ & \operatorname{row}\{F^{\mathbf{l}\mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}\}_{\delta_{\mathbf{l}}=t} \\ \mathbb{O} & \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая матрица размеров $m\binom{s+t+q-1}{q-1} \times n\binom{t-1+q}{q}$. Матрица $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s}$ имеет размеры $m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ и удовлетворяет соотношению вида (1.2)

$$W^{s+t}_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s} = F(\boldsymbol{\lambda}) W^t_{n;q}(\boldsymbol{\lambda}). \tag{1.13}$$

Из (1.13) следует, что результантные блочные векторы матриц $F(\boldsymbol{\lambda}) + G(\boldsymbol{\lambda})$ и $H(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda}) G(\boldsymbol{\lambda})$ удовлетворяют следующим соотношениям вида (1.3) и (1.4):

$$(F+G)^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;\max\{s,t\}} = \begin{cases} F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s} + \widetilde{G}^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}, & s > t, \\ F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s} + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}, & s = t, \\ \widetilde{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;t} + G^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;t}, & s < t, \end{cases}$$

$$H^{\mathrm{R}}_{m\times p;q;s+t} = F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s} G^{\mathrm{R}}_{n\times p;q;t}. \tag{1.14}$$

Здесь $F(\boldsymbol{\lambda})$ и $G(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные матрицы соответствующих размеров степени s и t соответственно, а $\widetilde{G}(\boldsymbol{\lambda})$ или $\widetilde{F}(\boldsymbol{\lambda})$ – дополненная старшими членами с нулевыми коэффициентами полиномиальная матрица степени s при $s > t$ или степени t при $t > s$ соответственно.

Используя представления полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{row}\{\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^{n} = \operatorname{col}\{\mathbf{f}_{\mathrm{r}\,i}^{T}(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m}, \quad s = \max_{j} s_{\mathrm{c}\,j} = \max_{i} s_{\mathrm{r}\,i},$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathbf{f}_{\mathrm{r}\,i}^{T}(\boldsymbol{\lambda})$ – столбцы и строки степени $s_{\mathrm{c}\,j}$, $j = 1, \ldots, n$, и $s_{\mathrm{r}\,i}$, $i = 1, \ldots, m$, соответственно, введем "строчную" и "столбцовую" результантные матрицы уровня t вида (1.5):

$$\begin{aligned} F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rr}\,t} &:= \operatorname{col}\{(\mathbf{f}_{\mathrm{r}\,i}^{T})_{1\times n;q;s_{\mathrm{r}\,i}}^{\mathrm{R}\,t}\}_{i=1}^{m}, \\ F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rc}\,t} &:= \operatorname{row}\{(\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j})_{m\times 1;q;s_{\mathrm{c}\,j}}^{\mathrm{R}(s-s_{\mathrm{c}\,j}+t)}\}_{j=1}^{n}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Они имеют размеры $\sum_{i=1}^{m} \binom{s_{\mathrm{r}\,i}+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ и $m\binom{s+t+q}{q} \times \sum_{j=1}^{n} \binom{s-s_{\mathrm{c}\,j}+t+q}{q}$ соответственно. Матрица $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{R}\,t}$ отличается от $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rr}\,t}$ лишь дополнительными нулевыми строками, а также порядком остальных строк. Каждая группа из $\binom{s+t+q}{q} - \binom{s_{\mathrm{r}\,i}+t+q}{q}$ дополнительных нулевых столбцов матрицы $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{R}\,t}$ отвечает строке $\mathbf{f}_{\mathrm{r}\,i}^{T}(\boldsymbol{\lambda})$, степень $s_{\mathrm{r}\,i}$ которой меньше степени s матрицы $F(\lambda)$. Матрица $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rc}\,t}$ отличается от матрицы $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{R}\,t}$ дополнительными столбцами, а также порядком остальных столбцов. Каждая группа из $\binom{s-s_{\mathrm{c}\,j}+t+q}{q} - \binom{t+q}{q}$ дополнительных столбцов матрицы $F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rc}\,t}$ отвечает столбцу $\mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\lambda)$, степень $s_{\mathrm{c}\,j}$ которого меньше степени s матрицы. Результантные матрицы (1.15) удовлетворяют следующим соотношениям вида (1.6):

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}\{W_{1;q}^{s_{\mathrm{r}\,i}+t}(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m} F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rr}\,t} &= F(\boldsymbol{\lambda}) W_{n;q}^{t}(\boldsymbol{\lambda}), \\ W_{m;q}^{s+t}(\boldsymbol{\lambda}) F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rc}\,t} &= F(\boldsymbol{\lambda}) \operatorname{diag}\{W_{1;q}^{s_{\mathrm{c}\,j}+t}(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Рассмотрим представления матрицы $H(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda})G(\boldsymbol{\lambda})$ вида

$$H(\lambda) = \mathrm{col}\{\mathbf{f}^T_{\mathrm{r}\,i}(\boldsymbol{\lambda})G(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^m, \quad H(\lambda) = \mathrm{row}\{F(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{g}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^p, \tag{1.17}$$

$$H(\lambda) = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{g}_{\mathrm{r}\,j}(\boldsymbol{\lambda}),$$

где $\mathrm{g}_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathrm{g}^T_{\mathrm{r}\,i}(\boldsymbol{\lambda})$ – столбцы и строки соответственно степени $t_{\mathrm{c}\,j}$, $j = 1,\ldots,p$, и $t_{\mathrm{r}\,i}$, $i = 1,\ldots,n$, полиномиальной $n\times p$ матрицы $G(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t = \max\limits_j t_{\mathrm{c}\,j} = \max\limits_i t_{\mathrm{r}\,i}$. Тогда, учитывая (1.13) и (1.16), получаем соответственно "строчный", "столбцовый" и "столбцово-строчный" аналоги соотношения (1.14):

$$H^{\mathrm{Rr}}_{m\times p;q;s+t} = F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;q;s}G^{\mathrm{R}}_{m\times p;q;t}, \tag{1.18}$$

$$H^{\mathrm{Rc}}_{m\times p;q;s+t} = F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s}G^{\mathrm{Rc}}_{n\times p;q;t}, \tag{1.19}$$

$$H^{\mathrm{R}}_{m\times p;q;l} = F^{\mathrm{Rc}\,l-s}_{m\times n;q;s}G^{\mathrm{Rr}}_{n\times p;q;t}. \tag{1.20}$$

В последнем случае предполагается, что $l = s_{\mathrm{c}\,j} + t_{\mathrm{r}\,j} = \mathrm{const}$, $j = 1,\ldots,n$.

Замечания. 1. Выражения (1.18)–(1.20) при соответствующих соотношениях степеней полиномиальных матриц $F(\boldsymbol{\lambda})$ и $G(\boldsymbol{\lambda})$ осуществляют более экономную реализацию их умножения, чем (1.14).

2. В случае блочного представления матрицы

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{row}\{F_{\mathrm{c}\,j}(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^n = \mathrm{col}\{F_{\mathrm{r}\,i}(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^m$$

аналогичным образом можно ввести блочные "строчную" и "столбцовую" результантные матрицы.

3. Результантные матрицы, отвечающие скалярным полиномам $f(\boldsymbol{\lambda})$, $g(\boldsymbol{\lambda})$, определяются очевидным образом. Опуская указание размеров $m = n = p = 1$, из (1.14), в частности, имеем

$$(fg)^{\mathrm{R}}_{q;s} = f^{\mathrm{R}\,t}_{q;s}, \quad g^{\mathrm{R}}_{q;t} = g^{\mathrm{R}\,s}_{q;t}f^{\mathrm{R}}_{q;s}.$$

§2. Построение базиса линейной оболочки векторов

Предлагаемые ниже методы позволяют получать базис образа полиномиальной матрицы, образованный линейно независимыми столбцами самой матрицы.

2.1. Построение базиса линейной оболочки однопараметрических полиномиальных векторов. Пусть задана система полиномиальных m-мерных векторов $\mathbf{f}_j(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s_{\mathrm{c}\,j}} \mathbf{f}_i^j \lambda^i$ степени $s_{\mathrm{c}\,j}$, $j = 1,\ldots,n$ $(n > 1)$. Требуется определить ранг этой системы векторов и построить базис подпространства $\mathcal{F}(\lambda) = \operatorname{span}\{\mathbf{f}_1(\lambda),\ldots,\mathbf{f}_n(\lambda)\}$. Линейная зависимость векторов $\mathbf{f}_j(\lambda)$, $j = 1,\ldots,n$ $(n > 1)$ означает существование у полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda) = \operatorname{row}\{\mathbf{f}_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ степени $s = \max\limits_j s_{\mathrm{c}\,j}$ нетривиального правого нуль-пространства, т.е. существование некоторой $n \times p$ матрицы $X(\lambda)$ степени t, которая удовлетворяет соотношению

$$F(\lambda)X(\lambda) = \mathbb{O}. \tag{2.1}$$

В соответствии с (1.4), (1.8)–(1.10), это приводит к уравнениям

$$F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} X^{\mathrm{R}}_{n\times p;t} = \mathbb{O}, \tag{2.2}$$

$$F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s} X^{\mathrm{R}}_{n\times p;t} = \mathbb{O}, \tag{2.3}$$

$$F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} X^{\mathrm{Rc}}_{n\times p;t} = \mathbb{O}, \tag{2.4}$$

$$F^{\mathrm{Rc}\,l-s}_{m\times n;s} X^{\mathrm{Rr}}_{m\times p;t} = \mathbb{O}, \tag{2.5}$$

матрицы которых соответственно имеют размеры[6]

$$m(s+t+1) \times n(t+1), \quad \sum_{i=1}^{m}(s_{\mathrm{r}\,i} + t + 1) \times n(t+1)$$

$$m(s+t+1) \times n(t+1), \quad m(s+t+1) \times \sum_{j=1}^{n}(l - s_{\mathrm{c}\,j} + 1).$$

Если столбцы $n \times p$ матрицы $X(\lambda)$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$, то $\operatorname{rank} F = n - p$, и базис $\mathcal{F}(\lambda)$ образуют некоторые $n - p$ линейно независимых столбцов матрицы $F(\lambda)$. Для решения рассматриваемой задачи нет необходимости находить полностью базисную матрицу $X(\lambda)$. Поэтому будем последовательно определять столбцы матрицы $X(\lambda)$, которые имеют наименьшую степень. При этом соответствующее

[6]Здесь и далее величины $s_{\mathrm{r}\,i}$, $i = 1,\ldots,m$, и l определяются в соответствии с вышеизложенным.

число столбцов матрицы $F(\lambda)$, являющихся линейными комбинациями (над полем частных) ее остальных столбцов, будет исключаться. Эта процедура повторяется до тех пор, пока оставшиеся столбцы не окажутся линейно независимыми. Для определения столбцов одинаковой степени матрицы $X(\lambda)$ естественно использовать уравнение (2.2) или (2.3), но предпочтительнее использовать последнее, поскольку матрица $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s}$ имеет меньшие размеры. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для вычисления базисной матрицы $F_{\mathrm{Im}}(\lambda)$ образа полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ степени s, начиная с $m \times n_0$ матрицы $F_0(\lambda) := F(\lambda)$ степени s_0, $n_0 := n$, $s_0 := s$:

для $t = 0$ *до* $s \min\{m, n-1\}$ *повторять*

begin

вычислить базисную $n_t(t+1)\times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n_t\times r_t;t} \equiv \mathrm{col}\{X^t_i\}^t_{i=0}$ правого нуль-пространства $\sum\limits_{i=1}^{m}(s_{\mathrm{r}\,i} + t + 1) \times n_t(t+1)$ матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n_t;s_t}$;

если $r_t > 0$,

то

привести $n_t \times r_t$ матрицу X^t_0 при помощи ортогональных преобразований[7] к левой трапециевидной (ступенчатой) $n_t \times r_t$ матрице $\widehat{X}^t_0 = X^t_0 \mathcal{Q}$ с ненулевыми "диагональными" элементами, расположенными в строках $i_1, \ldots, i_{r_t}$;

$n_{t+1} := n_t - r_t$;

исключить столбцы $i_1, \ldots, i_{r_t}$ матрицы $F_t(\lambda)$ и получить $m\times n_{t+1}$ матрицу $F_{t+1}(\lambda)$ степени s_{t+1},

иначе

$F_{t+1}(\lambda) := F_t(\lambda)$;

$n_{t+1} := n_t$;

$s_{t+1} := s_t$;

если $t + 1 > s_{t+1} \min\{m, n_{t+1} - 1\}$, *то* $F_{\mathrm{Im}}(\lambda) := F_{t+1}(\lambda)$; выход

end

Ограничение на степень t связано с тем, что минииндексы полиномиальных решений однопараметрической полиномиальной матрицы не превосходят произведения ее ранга на степень [9]. Далее, в силу минимальности степени получаемых на каждом шаге полиномиальных решений, определяемых столбцами матрицы $X_t(\lambda)$, ее младший матричный коэффициент X^t_0 имеет полный

[7] Здесь и далее унитарных преобразований в комплексном случае.

столбцовый ранг. Индексы $i_1, \ldots, i_{r_t}$ $(1 \leqslant i_{r_t} < \cdots < i_{r_t} \leqslant n_t)$ определяют один из возможных вариантов выбора базисных переменных, позволяющий представить соответствующие столбцы матрицы $F_t(\lambda)$ в виде линейных комбинаций остальных ее столбцов.

Замечания. 1. Вместо младшего матричного коэффициента X_0^t можно использовать старший матричный коэффициент X_t^t.

2. Если столбцы матрицы $F(\lambda)$ предварительно упорядочить в порядке невозрастания их степеней, то на каждом шаге процесса будут исключаться столбцы, имеющие наибольшие степени. Это позволяет максимально возможно понижать степень s_{t+1} матрицы $F_{t+1}(\lambda)$, уменьшая тем самым возможные вычислительные затраты на последующих шагах.

3. Каждый шаг процесса эквивалентен регулярному преобразованию текущей матрицы:

$$[F_{t+1}(\lambda)\ \mathbb{O}_{n_t\times r_t}] = F_t(\lambda)\,[\hat{I}_{n_t\times n_{t+1}}\ X_t(\lambda)],$$

где $\hat{I}_{n_t\times n_{t+1}}$ – матрица, полученная из единичной матрицы порядка n_t исключением столбцов $i_1, \ldots, i_{r_t}$. Следовательно, имеет место следующее включение конечных спектров: $\sigma_{\mathrm{c}}[F_{t+1}] \supset \sigma_{\mathrm{c}}[F_t]$.

2.2. Построение базиса линейной оболочки многопараметрических полиномиальных векторов. Решение аналогичной задачи для q-параметрических полиномиальных m-мерных векторов $\mathbf{f}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^j \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \equiv \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{k_1\ldots k_q}^j \lambda_1^{k_1}\ldots\lambda_q^{k_q}$ степени $s_{\mathrm{c}\,j}$, $j = 1, \ldots, n$ $(n > 1)$ также приводит к вопросу о существовании правого нуль-пространства полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{row}\{\mathbf{f}_j(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^n$ степени $s = \max\limits_j s_{\mathrm{c}\,j}$, т.е. о существовании некоторой $n \times p$ матрицы $X(\boldsymbol{\lambda})$ степени t, которая удовлетворяет соотношению:

$$F(\boldsymbol{\lambda})X(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{O}. \tag{2.6}$$

Это, в свою очередь, приводит к уравнениям вида (2.2)–(2.5):

$$F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{R}\,t} X_{n\times p;q;t}^{\mathrm{R}} = \mathbb{O}, \tag{2.7}$$

$$F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rr}\,t} X_{n\times p;q;t}^{\mathrm{R}} = \mathbb{O}, \tag{2.8}$$

$$F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{R}\,t} X_{n\times p;q;t}^{\mathrm{Rc}} = \mathbb{O}, \tag{2.9}$$

$$F_{m\times n;q;s}^{\mathrm{Rc}\,l-s} X_{n\times p;q;t}^{\mathrm{Rr}} = \mathbb{O}, \tag{2.10}$$

матрицы которых соответственно имеют размеры

$$m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}, \quad \sum_{i=1}^{m}\binom{s_{\mathrm{r}\,i}+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q},$$
$$m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}, \quad m\binom{s+t+q}{q} \times \sum_{j=1}^{n}\binom{l-s_{\mathrm{c}\,j}+q}{q}.$$

Таким образом, многопараметрическая задача решается аналогично однопараметрической задаче. Для определения столбцов одинаковой степени матрицы $X(\boldsymbol{\lambda})$ естественно использовать уравнение (2.7) или (2.8), но использование последнего предпочтительно в силу меньших размеров матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;q;s}$. Однако, в отличие от однопараметрического случая, из минимальности степени t вычисленных полиномиальных решений – столбцов $n_t \times r_t$ матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$ уже не следует, что младший (или какой-либо старший) матричный коэффициент матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$ будет иметь полный столбцовый ранг. Более того, из линейной независимости столбцов матрицы $X^{\mathrm{R}}_{n_t\times r_t;q;t}$ не следует линейная независимость столбцов матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$, за исключением случая $t=0$. Покажем, как можно установить гарантированное число[8] линейно независимых столбцов $n \times r$ матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$ и какие столбцы матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ можно исключить. Для этого сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $F_{\mathbf{l}}$ – наименьший[9] матричный коэффициент $n \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$, причем $\det F_{\mathbf{l}} \neq 0$. Тогда матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ является регулярной.*

Доказательство. Без потери общности будем полагать, что $F_{\mathbf{l}}$ является левой треугольной матрицей с единицами на главной диагонали. Если $F(\boldsymbol{\lambda})$ также является левой треугольной матрицей, то справедливость утверждения очевидна. В противном случае рассмотрим члены определителя $\det F(\boldsymbol{\lambda})$ порядка n. Младший моном члена $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathbf{f}_{ii}(\boldsymbol{\lambda})$ равен $\boldsymbol{\lambda}^{n\mathbf{l}}$. Любой другой член $\det F(\boldsymbol{\lambda})$ будет содержать хотя бы один элемент $f_{ij}(\boldsymbol{\lambda})$ при $j > i$, наименьшая степень монома которого больше $\delta_{\mathbf{l}}$, тогда как наименьшие

[8] Оно не обязательно будет максимальным.

[9] В соответствии с установленным лексикографическим порядком.

степени мономов остальных элементов рассматриваемого члена не меньше $\delta_{\mathbf{l}}$. Следовательно, наименьшая степень его монома будет больше, чем $n\delta_{\mathbf{l}}$. Таким образом, $\det F(\boldsymbol{\lambda})$ является отличным от тождественного нуля полиномом, наименьшим мономом которого является $\boldsymbol{\lambda}^{n\mathbf{l}}$.

Замечание. Утверждение леммы остается справедливым при замене наименьшего матричного коэффициента на наибольший.

Вернемся к задаче установления линейной независимости столбцов матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$. Пусть $X^t_{\mathbf{k}} \neq \mathbb{O}$ – ее наименьший матричный коэффициент, ранг которого $\nu_t = \operatorname{rank} X^t_{\mathbf{k}} \leqslant r_t$. Тогда из леммы следует, что $\operatorname{rank} X^t_{\mathbf{k}} \geqslant \nu_t$. Приведем $n_t \times r_t$ матрицу $X^t_{\mathbf{k}}$ при помощи ортогональных преобразований к левой трапециевидной (ступенчатой) матрице: $\begin{bmatrix} \widehat{X}^t_{\mathbf{k}} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = X^t_{\mathbf{k}} \mathcal{Q} \equiv X^t_{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & \mathcal{Q}_0 \end{bmatrix}$. Тогда столбцы $n_t \times \nu_t$ матрицы $\widehat{X}_t(\boldsymbol{\lambda}) = X_t(\boldsymbol{\lambda})\mathcal{Q}_1$ являются линейно независимыми полиномиальными решениями наименьшей степени t полиномиальной $m\times n$ матрицы $F_t(\boldsymbol{\lambda})$ степени s_t. При этом номера строк $i_1, \dots, i_{\nu_t}$ $(1 \leqslant i_{r_1} < \cdots < i_{\nu_t} \leqslant n_t)$, в которых расположены ненулевые "диагональные" элементы $n_t \times \nu_t$ матрицы $\widehat{X}_t(\boldsymbol{\lambda})$, определяют номера столбцов матрицы $F_t(\boldsymbol{\lambda})$, которые можно исключить, поскольку они могут быть представлены как линейные комбинации остальных столбцов. В отличие от однопараметрического случая, правое нуль-пространство получаемой при этом полиномиальной $m\times(n_t-\nu_t)$ матрицы может, в общем случае, содержать полиномиальные решения степени t. Заметим, что (как это можно показать) наибольшая степень полиномиального решения матрицы не превосходит произведения степени матрицы на ее ранг. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для вычисления базиса образа полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s, начиная с $m \times n_0$ матрицы $F_0(\boldsymbol{\lambda}) := F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s_0, $n_0 := n$, $s_0 := s$:

для $t = 0$ *до* $s \min\{m, n-1\}$ *повторять*

begin

вычислить базисную $n_t\binom{t+q}{q}\times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n_t\times r_t;q;t} \equiv \operatorname{col}\{X^t_{\mathbf{k}}\}^t_{\delta_{\mathbf{k}}=0}$ правого нуль-пространства $\sum\limits_{i=1}^{m} \binom{s_{\mathrm{r}\,i}+t+q}{q} \times n_t\binom{t+q}{q}$ матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n_t;q;s_t}$;

если $r_t > 0$,

то

найти наименьший матричный коэффициент $X_{\mathbf{k}}^t \neq \mathbb{O}$ и привести $n_t \times r_t$ матрицу $X_{\mathbf{k}}^t$ при помощи ортогональных преобразований к левой трапециевидной (ступенчатой) $n_t \times \nu_t$ матрице $\widehat{X}_k^t = X_k^t \mathcal{Q}$ с ненулевыми "диагональными" элементами, расположенными в строках $i_1, \ldots, i_{\nu_t}$;

исключить столбцы $i_1, \ldots, i_{r_t}$ матрицы $F_t(\boldsymbol{\lambda})$ и получить $m \times (n_t - \nu_t)$ матрицу $F_t(\boldsymbol{\lambda})$;

$n_t := n_t - \nu_t$;

если $\nu_t \neq r_t$, *то* вернуться в начало шага,

иначе

$F_{t+1}(\boldsymbol{\lambda}) := F_t(\boldsymbol{\lambda})$;

$n_{t+1} := n_t$;

$s_{t+1} := s_t$;

если $t + 1 > s_{t+1} \min\{m, n_{t+1} - 1\}$, *то* $F_{\mathrm{Im}}(\boldsymbol{\lambda}) := F_{t+1(\boldsymbol{\lambda})}$; выход

end

Замечания. 1. Вместо младшего матричного коэффициента $X_{\mathbf{k}}^t$ матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$ можно использовать старший матричный коэффициент. При этом, учитывая произвольность нумерации параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, в действительности получаем на каждом шаге процесса по $q!$ способов выбора "наименьшего" и "наибольшего" индекса $\mathbf{k}$ матрицы $X_t(\boldsymbol{\lambda})$. Из них следует выбрать такой, которому соответствует матричный коэффициент X_k^t, имеющий наибольший ранг ν_t.

2. Предварительное упорядочивание столбцов матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ в порядке невозрастания их степеней позволяет уменьшить возможные вычислительные затраты.

3. Имеет место следующее включение конечных спектров: $\sigma_{\mathrm{c}}[F_{t+1}] \supset \sigma_{\mathrm{c}}[F_t]$.

§3. Построение минимального базиса нуль-пространства

Предлагаются методы построения базиса правого нуль-пространства полиномиальной матрицы, степени полиномиальных базисных векторов которого являются минимальными. Хотя при описании методов предполагается, что исходная матрица имеет полный строчный ранг, их можно применять и к матрице, ранг которой меньше числа ее строк. В этом случае будет вычислен также и ранг полиномиальной матрицы. Однако для уменьшения объема вычислений целесообразно предварительно транспонировать исходную матрицу, применить к ней описанный в предыдущем параграфе метод и определить те строки исходной матрицы, которые являются линейно независимыми и имеют наименьшие степени. Очевидно, что правое нуль-пространство полученной матрицы будет таковым и для исходной матрицы.

3.1 Построение минимального базиса нуль-пространства однопараметрической полиномиальной матрицы. Пусть требуется вычислить минимальный базис правого нуль-пространства полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} F_i \lambda^i$ степени s полного строчного ранга $m < n$. Известно [16], что миниидексы такого базиса (степени базисных полиномиальных векторов) являются инвариантами. В работах [14, 15, 17] описываются методы построения минимального базиса левого нуль-пространства для однопараметрической полиномиальной матрицы полного столбцового ранга, основанные на построении базисов нуль-пространств последовательности обобщенных результантных матриц Сильвестра и Воловича. При этом базисные векторы строятся в порядке невозрастания их степеней. Аналогичный подход описан в работе [6].

В основе указанных методов лежит следующий факт. Пусть столбцы $n \times p$ матрицы $X(\lambda)$ принадлежат нуль-пространству $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$, т.е. выполняется соотношение (2.1). Тогда результантная матрица $X^{\mathrm{R}}_{n\times p;t}$ удовлетворяет, в частности, соотношению (2.3). Поскольку матрицы $X^k(\lambda) := \lambda^k X(\lambda)$ степени $t+k$, $k = 1, \ldots, l$, также удовлетворяют соотношениям вида (2.1)

$$F(\lambda) X^k(\lambda) = \mathbb{O}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

то результантные векторы $X^{k\,\mathrm{R}}_{n\times p;t+k}$ удовлетворяют соотношениям вида (2.3)

$$F^{\mathrm{Rr}\,t+k}_{m\times n;s} X^{k\,\mathrm{R}}_{n\times p;t+k} = \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \ldots, l.$$

Последние соотношения можно также записать в виде

$$F^{\mathrm{Rr}\,t+l}_{m\times n;s} X^{\mathrm{R}\,l}_{n\times p;t} = \mathbb{O}.$$

Следовательно, при определении базисных полиномиальных решений индекса $t > 0$ надо исключать из рассмотрения все полиномиальные решения меньших индексов с учетом возможности умножения их на некоторую степень λ. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для построения минимального базиса нуль-пространства полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ степени s:

вычислить базисную $n \times r_0$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;0} \equiv \widehat{X}^{0\,\mathrm{R}}_{n\times\varepsilon_0;0}$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} = \mathrm{col}\{F_{i-1}\}_{i=1}^{s+1}$;

$\theta_0 := 0$; $r_{-1} := 0$; $\eta_0 := r_0$; $\varepsilon_0 := r_0$;

для $t = 1$ *до* ms *повторять*

begin

вычислить базисную $n(t+1)\times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;t} \equiv \mathrm{col}\{X^t_i\}_{i=0}^t$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{R}r\,t}_{m\times n;s}$;

$\varepsilon_t := r_t - 2r_{t-1} + r_{t-2}$;

$\eta_t := \eta_{t-1} + \varepsilon_t$;

$\theta_t := \theta_{t-1} + t\varepsilon_t$;

если $\varepsilon_t > 0$, *то*

вычислить базисную $n(t+1)\times\varepsilon_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times\varepsilon_t;t} \equiv \mathrm{col}\{\widehat{X}^t_i\}_{i=0}^t$ разности подпространств[10] $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;t} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{t-1} \widehat{X}^{\mathrm{R}\,t-i}_{n\times r_i;i}$;

сформировать полиномиальную $n\times\varepsilon_t$ матрицу $\widehat{X}_t(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{t} \widehat{X}^t_i \lambda^i$;

если $\theta_t = ms$ *или* $\eta_t = n - m$, *то* выход

end

Действительно, по построению размерность ε_t подпространства $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;t} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{t-1} \widehat{X}^{\mathrm{R}\,t-i}_{n\times r_t;i}$ определяется выражением $\varepsilon_t = r_t - \sum\limits_{i=0}^{t-1}(t-i+1)\varepsilon_i$, так что $r_t = \sum\limits_{i=0}^{t}(t-i+1)\varepsilon_i$. Тогда легко убедиться в справедливости соотношения $\varepsilon_t = r_t - 2r_{t-1} + r_{t-2}$. На шаге t процесса вычисляются следующие характеристики минимального базиса матрицы $F(\lambda)$:

$\widehat{X}_t(\lambda)$ – $n\times\varepsilon_t$ матрица, столбцы которой являются базисными векторами миниидекса t;

ε_t – число базисных векторов миниидекса t;

[10] Базисная матрица разности подпространств может быть получена с помощью метода ΔW-0 разложения [3, 7]. Здесь и далее обозначение матрицы будем использовать и для обозначения линейной оболочки ее столбцов: $\mathrm{span}\{X_t\} \equiv X_t$.

η_t – число базисных векторов миниидекса, не превосходящего t;
θ_t – сумма миниидексов, не превосходящих t.

Замечание. Величины ms и $n-m$ представляют собой соответственно максимально возможное значение миниидекса и размерность правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$. В случае применения метода к произвольной $m \times n$ матрице $F(\lambda)$ следует заменить величину ms, используемую как наибольшее значение θ_t и параметра цикла t, на $s \max\{m, n-1\}$, а величину $n-m$ на $n-1$.

3.2. Построение минимального базиса нуль-пространства многопараметрической полиномиальной матрицы. Рассмотрим два обобщения описанного выше метода, которые определяются тем, требуется ли построить минимальный базис по одному (ведущему) параметру или по совокупности всех параметров.

В первом случае q-параметрическая $m \times n$ матрица полного строчного ранга $m < n$ представляется в виде матричного полинома $F(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=0}^{s} F_i(\boldsymbol{\mu})\lambda^i$ степени $s = \deg_\lambda F$ по параметру λ. При этом утверждение об инвариантности миниидексов нуль-пространства относительно фиксированного ведущего параметра остается справедливым. Метод построения минимального базиса нуль-пространства матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ по параметру λ является тривиальным обобщением описанного выше метода. Единственным, но принципиальным отличием является то, что все обрабатываемые и получаемые объекты являются не постоянными, а зависят от мультипараметра $\boldsymbol{\mu}$. Поэтому, в отличие от однопараметрического случая, теперь приходится вычислять базисы нуль-пространств полиномиальных матриц, зависящих от мультипараметра $\boldsymbol{\mu}$. Это можно выполнить применением метода ΔW-$(q-1)$ разложения. Он позволяет также находить базис разности соответствующих подпространств. Однако, при $q > 2$ возможно появление дополнительного $\boldsymbol{\mu}$-спектра, что приводит к повышению степеней по остальным параметрам [7].

Второй случай предполагает представление q-параметрической $m \times n$ матрицы степени s в виде $F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$. Пусть столбцы $n \times p$ матрицы $X(\boldsymbol{\lambda})$ степени t принадлежат нуль-пространству $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, т.е. выполняется соотношение (2.6). Тогда результантная матрица $X^{\mathrm{R}}_{n \times p; q; t}$ удовлетворяет, в частности, соотношению (2.8). Поскольку матрицы $X^{\mathbf{k}}(\lambda) = \lambda^{\mathbf{k}} X(\lambda)$ степени

$t+\delta_{\mathbf{k}}$, $\delta_{\mathbf{k}} \equiv \sum\limits_{i=1}^{q} k_i = 1,\ldots,l$, также удовлетворяют соотношениям вида (2.6)

$$F(\lambda)X^{\mathbf{k}}(\lambda) = \mathbb{O}, \quad \delta_{\mathbf{k}} = 1,\ldots,l,$$

то результантные векторы $X^{k\,\mathrm{R}}_{n\times p;q;t+k}$ удовлетворяют соотношениям вида (2.8)

$$F^{\mathrm{Rr}\,t+\delta_{\mathbf{k}}}_{m\times n;q;s} X^{\mathbf{k}\,\mathrm{R}}_{n\times p;q;t+\delta_{\mathbf{k}}} = \mathbb{O}, \quad k = 0,1\ldots,l,$$

которые можно записать в виде соотношения

$$F^{\mathrm{Rr}\,t+l}_{m\times n;q;s} X^{\mathrm{R}\,l}_{n\times p;q;t} = \mathbb{O}.$$

Следовательно, при определении базисных полиномиальных решений индекса $t>0$ надо исключать из рассмотрения все полиномиальные решения меньших индексов с учетом возможности умножения их на некоторую степень $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$. Как это уже отмечалось, из линейной независимости столбцов матрицы, которые образуют базис подпространства $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{t-1} \widehat{X}^{\mathrm{R}\,t-i}_{n\times r_t;q;i}$, не следует линейная независимость столбцов соответствующей полиномиальной матрицы, за исключением случая $t=0$. Поэтому, в отличие от однопараметрического случая, к этой полиномиальной матрице необходимо применить метод из §2 и вычислить базисную матрицу полиномиальных решений индекса t. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для построения базиса нуль-пространства из полиномиальных решений наименьших индексов полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s:

вычислить базисную $n\times r_0$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;q;0}$ $(0\leqslant r_0\leqslant n)$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$;

$\theta_0 := 0$; $r_{-1} := 0$; $\eta_0 := r_0$; $\varepsilon_0 := r_0$;

для $t=1$ *до* ms *повторять*

begin

вычислить базисную $n\binom{t+q}{q}\times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t}$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;q;s}$;

$\delta_t := r_t - 2r_{t-1} + r_{t-2}$;

если $\delta_t>0$, *то*

вычислить базисную $n(t+1)\times\delta_t$ матрицу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\delta_t;q;t}$ разности подпространств $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{t-1} \widehat{X}^{\mathrm{R}\,t-i}_{n\times r_i;q;i}$;

сформировать полиномиальную $n \times \delta_t$ матрицу $\widehat{X}_t(\lambda) = \sum\limits_{\mathbf{k}} \widehat{X}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ степени t;

если $\delta_t > 1$, *то* вычислить базисную $n \times \varepsilon_t$ матрицу $\widetilde{X}_t(\lambda)$ образа матрицы $\widehat{X}_t(\lambda)$,

иначе $\varepsilon_t := \delta_t$; $\widetilde{X}_t(\lambda) := \widehat{X}_t(\lambda)$;

$\eta_t := \eta_{t-1} + \varepsilon_t$;

$\theta_t := \theta_{t-1} + t\varepsilon_t$

если $\eta_t = n - m$, *то* выход

end

На шаге t процесса вычисляются следующие характеристики минимального базиса матрицы $F(\lambda)$:

$\widetilde{X}_t(\lambda)$ – $n \times \varepsilon_t$ матрица, столбцы которой являются базисными векторами минииндекса t;

ε_t – число базисных векторов минииндекса t;

η_t – число базисных векторов минииндексов, не превосходящих t;

θ_t – сумма минииндексов, не превосходящих t.

Замечания. 1. Представляется корректным называть построенный полиномиальный базис минимальным, а степени его базисных векторов – (правыми) минииндексами и утверждать, что они инвариантны[11].

2. Неоднозначность минимального базиса в многопараметрическом случае является более существенной, чем в однопараметрическом случае. Для определенности построения минимального базиса можно, например, с помощью ортогональных преобразований приводить матрицу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n \times \varepsilon_t; q; t}$ к левому трапециевидному (ступенчатому) виду.

§4. Построение жордановых цепочек и полурешеток векторов

Предлагаются методы вычисления жордановых цепочек векторов и жордановых полурешеток векторов полиномиальной матрицы, отвечающих ее кратной конечной точке спектра.

[11] Исследования, относящиеся к понятию "минимальности" полиномиального базиса нетривиального подпространства линейного пространства, определенного над полем многопараметрических рациональных функций, автору не известны.

4.1. Построение жордановых цепочек векторов однопараметрической полиномиальной матрицы. Пусть требуется построить жорданову цепочку векторов, которые отвечают конечному кратному собственному значению λ^* полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} F_i \lambda^i$ степени s. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda^* = 0$. Жорданова цепочка векторов $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, t$, высоты $t+1$ ($\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_t \neq \mathbf{0}$), отвечающая нулевому собственному значению (алгебраической кратности $\gamma \geqslant t+1$), удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{k=0}^{l} F_k \mathbf{x}_{l-k} = \mathbf{0}, \quad l = 0, 1, \ldots, t, \tag{4.1}$$

причем система $F_0 \mathbf{z} = \sum\limits_{k=1}^{t+1} F_k \mathbf{x}_{t-k+1}$ является несовместной. При этом полиномиальный вектор $\mathbf{x}(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{t} \mathbf{x}_j \lambda^j$ степени t является соответствующим порождающим корневым вектором

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \mathbf{x}(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda^*}, \quad k = 0, 1, \ldots, t. \tag{4.2}$$

Из (4.1) следует, что результантный вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{R}}_{n\times 1;t} = \mathrm{col}\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{t}$, отвечающий полиномиальному вектору $\mathbf{x}(\lambda)$, удовлетворяет соотношению

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} \mathbf{x}^{\mathrm{R}}_{n\times 1;t} = \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

Здесь $\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$ – $m(t+1) \times n(t+1)$ матрица, образованная первыми $t+1$ блочными строками результантной $m(s+t+1) \times n(t+1)$ матрицы $F^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$:

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} = \begin{bmatrix} A_0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ A_t & \ldots & A_0 \end{bmatrix} \text{при} \quad t \leqslant s,$$

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s} = \begin{bmatrix} A_0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ A_s & \ddots & A_0 & & \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \\ & & A_s & \ldots & A_0 \end{bmatrix} \quad \text{при} \quad t > s.$$

Векторы $\mathbf{x}^k(\lambda) = \lambda^k \mathbf{x}(\lambda)$ степени $t+k$, $k = 1, \ldots, l$, также порождают жорданову цепочку векторов (4.2) "высоты" $t+k+1$, удовлетворяющую соотношениям (4.1), первые k векторов которой являются нулевыми. Соответствующие результантные векторы $\mathbf{x}^{k\,\mathrm{R}}_{n\times 1;t+k}$ удовлетворяют соотношениям вида (4.3)

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t+k}_{m\times n;s}\mathbf{x}^{k\,\mathrm{R}}_{n\times 1;t+k} = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \ldots, l,$$

так что

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t+l}_{m\times n;s}\mathbf{x}^{\mathrm{R}\,l}_{n\times 1;t} = \mathbb{O}. \tag{4.4}$$

Следовательно, при определении жордановых цепочек векторов высоты $t+1$ при $t > 0$ следует исключать из рассмотрения все жордановы цепочки векторов меньших высот с учетом возможности умножения отвечающих им порождающих корневых векторов на некоторую степень λ.

Далее, если ранг матрицы $F(\lambda)$ меньше числа ее столбцов, то каждое ее правое полиномиальное решение $\mathbf{x}(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{t} \mathbf{x}_j \lambda^j$ индекса t порождает "паразитическую" жорданову цепочку векторов вида (4.2) "высоты" $t+1$, отвечающую любому значению λ^*. Аналогичное утверждение будет справедливо и для векторов $\mathbf{x}^k(\lambda) = \lambda^k \mathbf{x}(\lambda)$ степени $t+k$, $k = 1, \ldots, l$. Таким образом, результантная матрица $\mathbf{x}^{\mathrm{R}\,l}_{n\times 1;t}$, отвечающая полиномиальному решению $\mathbf{x}(\lambda)$, также будет удовлетворять соотношению вида (4.4). Следовательно, при определении жордановых цепочек векторов высоты $t+1$ следует исключать из рассмотрения все паразитические жордановы цепочки векторов, порожденных полиномиальными решениями индексов, не превосходящих t с учетом возможности умножения их на некоторую степень λ. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для построения жордановых цепочек векторов полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$ степени s, отвечающих нулевому собственному значению:

вычислить базисную $n \times r_0$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;0}$ правого нуль-пространства результантного столбца $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} = \mathrm{col}\{F_i\}_{i=0}^{s}$;

вычислить базисную $n \times h_0$ матрицу $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;0}$ правого нуль-пространства $m \times n$ матрицы $\breve{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;s} \equiv F_0$;

$\tau_0 := h_0 - r_0$;

$\gamma_0 := \tau_0$;
вычислить базисную $n \times \tau_0$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;0}$ разности подпространств $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;0} \setminus X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;0}$;
для $t = 1$ *до* $s\min\{m,n\}$ *повторять*
begin
вычислить базисную $n(t+1)\times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t,t}$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s}$;
вычислить базисную $n(t+1)\times h_t$ матрицу $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{m\times h_t;t}$ правого нуль-пространства матрицы $\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;s}$;
$\tau_t := (h_t - r_t) - (h_{t-1} - r_{t-1})$;
$\sigma_t := \tau_{t-1} - \tau_t$;
$\gamma_t := \gamma_{t-1} + t\sigma_t$;
если $\tau_t = 0$, *то* $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;t-1} := \widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};t-1}$; выход
вычислить базисную $n(t+1)\times\tau_t$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;t}$ разности подпространств $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_t;t} \setminus \left(X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;t} \bigcup_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times r_i;i} \end{bmatrix} \right)$;
сформировать $nt\times\tau_t$ матрицу $\overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;t-1}$ из первых t блочных компонент матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;t}$;
вычислить базисную $nt\times\sigma_t$ матрицу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;t-1}$ разности подпространств $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};t-1} \setminus \overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;t-1}$;
если $\gamma_t = s\min\{m,n\}$, *то* выход
end

Столбцы матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;0}$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $F(\lambda)$; число τ_0 дает геометрическую кратность собственного значения. Величина $s\min\{m,n\}$ представляет собой максимально возможную высоту жордановой цепочки (равную максимально возможному структурному индексу собственного значения) матрицы $F(\lambda)$. На шаге t $(t > 0)$ процесса вычисляются следующие характеристики нулевого собственного значения матрицы $F(\lambda)$:
τ_t – число жордановых цепочек, высота которых не меньше $t+1$;
σ_t – число[12] жордановых цепочек, высота которых равна t;
γ_t – сумма[13] структурных индексов, не превосходящих t;

[12] Совпадает с числом элементарных делителей λ^t.

[13] По окончании процесса – алгебраическая кратность собственного значения.

$\widehat{X}_{t-1}(\lambda)$ – отвечающая результантному столбцу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;t-1}$ полиномиальная $n\times\sigma_t$ матрица, столбцы которой являются порождающими корневыми векторами порядка t, векторные коэффициенты которых образуют жордановы цепочки векторов высоты t.

Замечания. 1. В случае, когда матрица $F(\lambda)$ имеет полный столбцовый ранг n ($n \leqslant m$), соответствующие операции алгоритма следует опустить.

2. В процессе построения жордановых цепочек можно одновременно вычислять минимальный базис правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$, добавив соответствующие операции алгоритма из §3. Наоборот, если минимальный базис правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$ известен, то соответствующие операции алгоритма можно опустить.

Рассмотрим теперь случай, когда собственное значение λ^* матрицы $F(\lambda)$ не равно нулю. Тогда делаем замену $\lambda := \lambda - \lambda^*$ и применяем описанный алгоритм к полиномиальной матрице $F_*(\lambda) := F(\lambda - \lambda^*)$. Получив жорданову цепочку векторов $\{\mathbf{x}_{*_k}\}$, $k = 0,1,\ldots,t$, и, тем самым, порождающий корневой вектор $\mathbf{x}_*(\lambda) = \sum_{j=0}^{t}\mathbf{x}_{*_j}\lambda^j$, отвечающий ее нулевому собственному значению, выполняем обратную замену $\lambda := \lambda + \lambda^*$. В результате получаем порождающий корневой вектор $\mathbf{x}(\lambda) := \sum\limits_{j=0}^{t}\mathbf{x}_{*_j}(\lambda+\lambda^*) \equiv \sum\limits_{j=0}^{t}\mathbf{x}_j\lambda^j$, отвечающий собственному значению λ^* матрицы $F(\lambda)$ и, тем самым, искомую жорданову цепочку векторов $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 0,1,\ldots,t$.

4.2. Построение жордановых цепочек и полурешеток векторов многопараметрической полиномиальной матрицы. Рассмотрим два обобщения описанного выше метода, которые определяются тем, требуется ли построить жорданову цепочку векторов по одному (ведущему) параметру или жорданову полурешетку векторов, которые соответственно отвечают кратной точке спектра матрицы $F(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = \sum\limits_{i=0}^{s}F_i(\boldsymbol{\mu})\lambda^i$ или $F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_q^{k_q}$.

В первом случае для вычисления жордановой цепочки векторов, отвечающей кратной точке $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ конечного спектра матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, достаточно применить приведенный выше алгоритм к однопараметрической матрице $F(\lambda, \boldsymbol{\mu}^*)$.

Пусть требуется вычислить жорданову полурешетку векторов, отвечающую кратной точке $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_q^*)$ конечного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Сначала рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0}$. Жорданова полурешетка векторов $\{\mathbf{x_k}\}$, $\delta_{\mathbf{k}} = 0, 1, \ldots, t$, порядка $t+1$, отвечающая нулевой точке спектра (алгебраической кратности $\gamma \geqslant t+1$), удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{k_1}^{l_1} \cdots \sum_{k_q}^{l_q} F_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{\mathbf{l}-\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \quad \delta_{\mathbf{l}} = 0, 1, \ldots, t, \tag{4.5}$$

причем система $F_{\mathbf{0}}\mathbf{z} = \sum\limits_{\substack{k_1=0 \\ \delta_{\mathbf{k}}>0}}^{l_1} \cdots \sum\limits_{k_q=0}^{l_q} F_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{\mathbf{l}-\mathbf{k}}$, $\delta_{\mathbf{l}} = t+1$, является несовместной. При этом полиномиальный вектор $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{x_k} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ степени t является соответствующим порождающим корневым вектором

$$\mathbf{x_k} = \frac{1}{k_1! \ldots k_q!} \frac{\partial^{\delta_{\mathbf{k}}}}{\partial \lambda_1^{k_1} \ldots \partial \lambda_q^{k_q}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\big|_{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}^*, \quad \delta_{\mathbf{k}} = 0, 1, \ldots, t. \tag{4.6}$$

Из (4.5) следует, что результантный вектор

$$\mathbf{x}^{\mathrm{R}}_{n \times 1; q; t} = \operatorname{col}\{\mathbf{x_k}\}_{\delta_k = 0}^{t},$$

отвечающий полиномиальному вектору $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяет соотношению

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m \times n; q; s} \mathbf{x}^{\mathrm{R}}_{n \times 1; q; t} = \mathbf{0}. \tag{4.7}$$

Здесь $\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m \times n; q; s}$ – $m\binom{t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ матрица, образованная первыми $\binom{t+q}{q}$ блочными строками результантной $m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ матрицы $F^{\mathrm{R}\,t}_{m \times n; q; s}$.

Вектор $\mathbf{x}^{\mathbf{e}_j}(\lambda) = \lambda_j \mathbf{x}(\lambda)$ степени $t+1$ порождает жорданову полурешетку векторов (4.6) "порядка" $t+2$, удовлетворяющую соотношениям (4.5). Она получается "сдвигом" исходной полурешетки в направлении, отвечающем параметру λ_j. При этом первые векторы $\mathbf{x_k} = \mathbf{0}$ при $\delta_{\mathbf{k}} = 0, 1$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}_j$. Соответственно векторы $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}(\lambda) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t + \delta_{\mathbf{k}}$ ($\delta_{\mathbf{k}} = 1, \ldots, l$) также порождают жордановы полурешетки векторов "высоты" $t + \delta_{\mathbf{k}} + 1$, получаемые "сдвигом" исходной полурешетки на k_j позиций в направлении, отвечающем параметру λ_j, $j=1,\ldots,q$. При этом соответствующее число начальных векторов получаемой полурешетки будут равны нулю. Таким образом, результантные векторы $\mathbf{x}^{\mathbf{k}\,\mathrm{R}}_{n\times 1;t+\delta_{\mathbf{k}}}$ удовлетворяют соотношениям вида (4.7)

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t+\delta_{\mathbf{k}}}_{m\times n;q;s}\mathbf{x}^{\mathbf{k}\,\mathrm{R}}_{n\times 1;t+\delta_{\mathbf{k}}}=\mathbf{0},\quad \delta_{\mathbf{k}}=1,\ldots,l,$$

так что

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\,t+l}_{m\times n;q;s}\mathbf{x}^{\mathrm{R}\,l}_{n\times 1;q;t}=\mathbb{O}. \tag{4.8}$$

Следовательно, при определении жордановых полурешеток векторов порядка $t+1$ при $t>0$ следует исключать из рассмотрения все жордановы полурешетки векторов меньших порядков. Причем полурешетка порядка $p+1$ "поднятая" до порядка $t+1$ $(t>p)$ дает $\binom{t-p+q}{q}$ различных "полурешеток".

Аналогичные рассуждения справедливы в отношении правых полиномиальных решений $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})=\sum\limits_{\mathbf{k}}\mathbf{x}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, которые (в случае их существования) порождают "паразитические" жордановы полурешетки векторов вида (4.6) "высоты" $t+1$, отвечающие любому значению $\boldsymbol{\lambda}^*$. Аналогичное утверждение будет справедливо и для векторов $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t+\delta_{\mathbf{k}}$ $(\delta_{\mathbf{k}}=1,\ldots,l)$. Таким образом, результантная матрица $\mathbf{x}^{\mathrm{R}\,l}_{n\times 1;q;t}$, отвечающая полиномиальному решению $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$, также будет удовлетворять соотношению вида (4.8). Следовательно, при определении жордановых полурешеток векторов порядка $t+1$ следует исключать из рассмотрения все паразитические жордановы полурешетки векторов, порожденные полиномиальными решениями индексов, не превосходящих t с учетом возможности умножения их на некоторую степень $\boldsymbol{\lambda}$. Таким образом, получаем следующий алгоритм.

Для построения жордановых полурешеток векторов полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s, отвечающих нулевой точке спектра:

вычислить базисную $n\times r_0$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;q;0}$ правого нуль-пространства результантного вектора $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$;

вычислить базисную $n\times h_0$ матрицу $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;q;0}$ правого нуль-пространства $m\times n$ матрицы $\breve{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}\equiv F_0$;

$\tau_0:=h_0-r_0$;

$\gamma_0 := \tau_0$;
вычислить базисную $n \times \tau_0$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;q;0}$ разности подпространств $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;q;0} \setminus X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;q;0}$;
для $t = 1$ *до* $s\min\{m, n\}$ *повторять*
begin
вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t}$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{Rr}\,t}_{m\times n;s}$;
вычислить базисную $n\binom{t+q}{q}\times h_t$ матрицу $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_t;q;t}$ $(r_t \leqslant h_t \leqslant n)$ правого нуль-пространства матрицы $\breve{F}^{\mathrm{R}\,t}_{m\times n;q;s}$;
$\tau_t := (h_t - r_t) - (h_{t-1} - r_{t-1})$;
$\sigma_t := \tau_{t-1} - \tau_t$;
$\gamma_t := \gamma_{t-1} + \binom{t-1+q}{q}\sigma_t$;
если $\tau_t = 0$, *то* $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1} := \widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};q;t-1}$; выход
вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times \tau_t$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t}$ разности подпространств $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_t;q;t} \setminus \left(X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t} \bigcup_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \mathbb{O} \\ \widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times r_i;q;i} \end{bmatrix} \right)$;
сформировать $n\binom{t-1+q}{q} \times \tau_t$ матрицу $\overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t-1}$ из первых $\binom{t-1+q}{q}$ блочных компонент матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t}$;
вычислить базисную $n\binom{t-1+q}{q} \times \sigma_t$ матрицу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1}$ разности подпространств $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};q;t-1} \setminus \overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t-1}$
end

Столбцы матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;q;0}$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$; число τ_0 дает геометрическую кратность собственного значения. Величина $s\min\{m, n\}$ представляет собой максимально возможный порядок жордановой полурешетки векторов матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. На шаге t $(t > 0)$ процесса вычисляются следующие характеристики нулевого собственного значения матрицы $F(\lambda)$:

τ_t – число жордановых полурешеток, порядок которых не меньше $t + 1$;
σ_t – число жордановых полурешеток, порядок которых равен t;
γ_t – число векторов из жордановых полурешеток, порядки мультииндексов которых не превосходят t;
$\widehat{X}_{t-1}(\boldsymbol{\lambda})$ – отвечающая результантному столбцу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1}$ полиномиальная $n \times \sigma_t$ матрица, столбцы которой являются порожда-

ющими корневыми векторами порядка t, векторные коэффициенты которых образуют соответствующие жордановы полурешетки векторов порядка t.

Замечания. 1. В случае, когда матрица $F(\lambda)$ имеет полный столбцовый ранг n ($n \leqslant m$), соответствующие операции алгоритма следует опустить.

2. В процессе построения жордановых полурешеток можно одновременно вычислять минимальный базис правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$, добавив соответствующие операции алгоритма из §3. Наоборот, если минимальный базис правого нуль-пространства матрицы $F(\lambda)$ известен, то соответствующие операции алгоритма можно опустить.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $\boldsymbol{\lambda}^*$спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ не является нулевой. Тогда делаем замену $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*$ (т.е. замену $\lambda_j := \lambda_j - \lambda_j^*$, $j = 1, \dots, q$) и применяем описанный алгоритм к полиномиальной матрице $F_*(\boldsymbol{\lambda}) := F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)$. Получив жорданову полурешетку векторов $\{\mathbf{x}_{*\mathbf{k}}\}$, $\delta_{\mathbf{k}} = 0, 1 \dots, t$, и, тем самым, порождающий корневой вектор $\mathbf{x}_*(\lambda) = \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{*\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$, отвечающие ее нулевому собственному значению, выполняем обратную замену $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^*$ (т.е. замену $\lambda_j := \lambda_j + \lambda_j^*$, $j = 1, \dots, q$). В результате получаем порождающий корневой вектор $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) := \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{*\mathbf{k}} (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)^{\mathbf{k}} \equiv \sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{x}_{k_1 \dots k_q} (\lambda + \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda + \lambda_q)^{k_q}$ степени t, отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ спектра матрицы $F(\lambda)$ и, тем самым, искомую жорданову полурешетку векторов $\{\mathbf{x}_{\mathbf{k}}\}$, $\delta_{\mathbf{k}} = 0, 1, \dots, t$.

§5. Замечания

Приведем общие замечания, относящиеся как к однопараметрическому, так и к многопараметрическому случаям. При этом $\boldsymbol{\lambda}$ используется для обозначения как мультипараметра, так и для одного параметра, поскольку однопараметрический случай является частным случаем q-параметрического случая при $q = 1$ (в этом случае $\boldsymbol{\lambda} = \lambda$).

5.1. Простой способ вычисления ранга полиномиальной матрицы и базиса ее образа. Этот способ является обобщением известного подхода (см., например, [8]) и состоит в выполнении следующих операций:

> выбрать некоторую точку $\boldsymbol{\lambda}^*$, не принадлежащую спектру $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, и вычислить матрицу $F^* = F(\boldsymbol{\lambda}^*)$;
> применить к постоянной $m \times n$ матрице F^* метод ранговой факторизации (ΔW-0 метод)[14]
>
> $$F^*[W_1 \quad W_0] = [\Delta \quad \mathbb{O}_{m\times n-p}]$$
>
> и вычислить ее ранг p и $n \times (n-p)$ матрицу W_1;
> вычислить полиномиальную $m \times (n-p)$ матрицу $F\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda})W_1$.

Основной проблемой данного подхода является выбор точки, не принадлежащей спектру исходной матрицы. С большой вероятностью это можно выполнить с помощью датчика случайных чисел. Для большей уверенности подобные вычисления можно выполнить несколько раз. Данный подход обладает еще одним недостатком: он предполагает преобразование столбцов исходной полиномиальной матрицы, которого хотелось бы избежать в силу отмеченной выше причины.

Ранг q-параметрической полиномиальной матрицы и базис ее образа можно вычислить также с помощью метода ΔW-q разложения [2–4, 6], но он также приводит к преобразованию исходной полиномиальной матрицы.

5.2. Вычисление минимального базиса образа полиномиальной матрицы. Для вычисления минимального базиса линейной оболочки столбцов полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ следует:

> вычислить минимальную базисную $m \times (m-\rho)$ матрицу $X(\boldsymbol{\lambda})$ правого нуль-пространства $n \times m$ матрицы $F^T(\boldsymbol{\lambda})$;
> вычислить искомую минимальную базисную $m \times \rho$ матрицу $F_{\mathrm{Im}}(\boldsymbol{\lambda})$ правого нуль-пространства $(m-\rho)\times m$ матрицы $X^T(\boldsymbol{\lambda})$.

Очевидно, что полученный минимальный базис уже не состоит из столбцов исходной полиномиальной матрицы.

5.3. Свойство полиномиальных характеристик полиномиальной матрицы. Пусть $F_{\mathrm{Im}}(\boldsymbol{\lambda})$ и $X(\boldsymbol{\lambda})$ – базисные матрицы образа и правого нуль-пространства полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно. Очевидно, что $F_{\mathrm{Im}}(\boldsymbol{\lambda}^*)$ и $X(\boldsymbol{\lambda}^*)$ будут

[14] Нормализованный процесс разложения или SVD (см., например, [3, 7]).

являться базисными матрицами соответственно образа и правого нуль-пространства постоянной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}^*)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\lambda}^*$ не принадлежит спектру матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Аналогичное замечание справедливо в отношении полиномиальных объектов, получаемых при решении других параметрических задач алгебры (см., например, [13]).

5.4. Использование "столбцово-строчной" реализации умножения полиномиальных матриц. Пусть требуется вычислить минимальный базис матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = [f_1(\boldsymbol{\lambda})\ f_2(\boldsymbol{\lambda})]$ степени s, где $f_j(\boldsymbol{\lambda})$ – скалярные полиномы степени s_j, $j = 1, 2$. Искомый базис состоит из одного вектора $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{col}\{x_j(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^2$, причем степени t_j компонент $x_j(\boldsymbol{\lambda})$, $j = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям $s_1+t_1 = s_2+t_2$. Поэтому в данном случае целесообразно использовать "столбцово-строчный" вариант результантной реализации умножения вида (1.20) и вычислять вектор $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$, используя соотношение вида (2.10)

$$F^{\mathrm{Rc}\,l-s}_{1\times 2;q;s}\mathbf{x}^{\mathrm{Rr}}_{2\times 1;q;t} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, для вычисления минимального базиса правого нуль-пространства матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ следует:

для $t = 0$ *до* $\min\{s_j\}$ *повторять*

begin

сформировать результантную

$$\binom{s+t+q}{q} \times \left(\binom{s-s_1+t+q}{q} + \binom{s-s_2+t+q}{q} \right)$$

матрицу $F^{\mathrm{Rc}\,t}_{1\times 2;q;s} = \lfloor (f_1)^{\mathrm{R}(s-s_1+t)}_{1\times 1;s_1} \quad (f_2)^{\mathrm{R}(s-s_2+t)}_{1\times 1;s_2} \rfloor$;

вычислить базисный

$$\left(\binom{s-s_1+t+q}{q} + \binom{s-s_2+t+q}{q} \right) \times r,$$

вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{Rr}}_{2\times 1;q;t} = \operatorname{col}\{(x_j)^{\mathrm{R}}_{1\times 1;s-s_j+t}\}_{j=1}^2$ правого нуль-пространства матрицы $F^{\mathrm{Rc}\,t}_{1\times 2;q;s}$;

если $r_t > 0$, *то*

сформировать полиномиальный вектор $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})=\operatorname{col}\{x_j(\boldsymbol{\lambda})\}_{j=1}^2$;

выход

end

Литература

1. Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра.* — Наука, М. (1976).
2. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–330.
4. В. Н. Кублановская, *Применение метода ранговой факторизации к анализу спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 115–144.
5. В. Н. Кублановская, Т. В. Ващенко, *Построение фундаментального ряда решений пучка матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **139** (1984), 74–93.
6. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Модификации метода ΔW-q разложения многопараметрических полиномиальных матриц и их свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 154–166.
7. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть* 1*. Однопараметрические задачи.* — Наука, СПб. (2004).
8. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, В. А. Белый, *Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы.* III. — Препринт ЛОМИ Р–4–88. Л. (1988).
9. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах λ-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **111** (1981), 195–217.
10. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 284–321.
11. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.
12. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 177–191.
13. В. Б. Хазанов, *Методы решения некоторых параметрических задач алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **323** (2005), 164–181.
14. B. D. O. Anderson, E. I. Jury, *Generalized Bezoutian and Sylvester matrices in multivariable linear control.* — IEEE Trans. Automat. Control, **AC-21**, No. 3 (1976), 551–556.
15. E. N. Antoniou, A. I. G. Vardulakis, S. Vologiannidis S., *Numerical computations of minimal polynomial bases: A generalized resultant approach.* — Linear Algebra Appl., to appear.
16. G. D. Forney, *Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems.* — SIAM J. Control, **13**, No. 3 (1975), 493–520.
17. R. R. Bitmead, S.-Y. Kung, B. D. O. Anderson, *Generalized greatest common matrices divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices.* — IEEE Trans. Automat. Control, **AC-23**, No. 6 (1978), 1043–1047.
18. H. H. Rosenbrock, *Generalized resultant.* — Electron. Lett., **4** (1968), 250–251.

19. W. A. Wolovich, *Linear Multivariable Systems.* — Springer Verlag, New York (1974).

Khazanov V. B. A resultant approach to computing vector characteristics of multiparameter polynomial matrices.

Known types of resultant matrices corresponding to one-parameter matrix polynomials are generalized to the multiparameter case. Based on the resultant approach suggested, methods for solving the following problems for multiparameter polynomial matrices are developed: computing a basis of the matrix range, computing a minimal basis of the right null-space, and constructing Jordan chains and semilattices of vectors associated with a multiple spectrum point. In solving these problems, the original polynomial matrix is not transformed. Methods for solving other parameter problems of algebra can be developed on the basis of the method for computing a minimal basis of the null-space of a polynomial matrix. Issues concerning the optimality of computing the null-spaces of sparse resultant matrices and numerical precision are not considered.

С.-Петербургский государственный морской технический университет
E-mail: khazanovvb@mail.ru

Поступило 19 мая 2005 г.