Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 6. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

В статьях автора, относящихся к решению многопараметрических задач алгебры (см., например, [1]), используется определение скалярных спектральных характеристик q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы F ранга ρ, в терминах $(q-k)$-мерных решений системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), составленных из всевозможных миноров порядка ρ матрицы F.

В настоящей статье рассматриваются не только скалярные, но и векторные спектральные характеристики матрицы F. Для их определения вводится матрица $A[F]$, для которой вектор с компонентами из всевозможных миноров порядка ρ матрицы F является ассоциированным. Дается определение спектральных пар, их классификация и свойства.

Статья состоит из введения, двух параграфов и заключения. В §1 вводится матрица $A[F]$, рассматриваются ее свойства, скалярные и векторные характеристики, а также связь с соответствующими характеристиками матрицы F. В §2 приводится классификация спектральных пар матрицы полного ранга.

Ниже используются следующие обозначения и разложения многопараметрических матриц и полиномов:

$\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ – множество q-параметрических полиномиальных $m \times n$ матриц ранга ρ;

$\delta[Z]$ – общий наибольший делитель (НОД) компонент полиномиального вектора Z;

$\sigma[F]$ – конечный спектр матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$;

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (05-01-00945) и НШ-2268.2003.1.

$\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$ – соответственно конечный регулярный и сингулярный спектры F;

σ_s^- – левый, $\sigma_s^+[F]$ – правый сингулярный спектр F; $\sigma_s[F] = \sigma_s^-[F] \cup \sigma_s^+[F]$;

$f_k[F]$, $k = 0, 1, \ldots, \rho - 1$, – НОД всевозможных миноров порядка $\rho - k$ матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m \times n}$; $f_0 = f$ – характеристический полином матрицы F, т.е. НОД всевозможных миноров порядка ρ матрицы F;

$f_k[F] = \varphi_k[F] g_k[F]$ есть неполная относительная факторизация [2] полинома f_k от q переменных. Здесь $g_k[F]$ есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-1$ переменных;

$\psi_k[F] = \dfrac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]}$, $k = 1, \ldots, \rho$, есть последовательность так называемых наследственных полиномов матрицы F;

$\varepsilon_k[F] = \dfrac{g_{k-1}[F]}{g_k[F]}$, $k = 1, \ldots, v - 1$, есть последовательность так называемых обобщенных инвариантных полиномов матрицы F. Одной и той же буквой обозначаются оператор, матрица и линейная оболочка ее столбцов. Равенство между полиномами определяется с точностью до константы.

$F = PG$ есть PG-q факторизация [3] q-параметрической полиномиальной матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$. Здесь $P = P_1 \ldots P_{q-1}$, $P_k = \prod_{i=1}^{n_k} \nabla_i^{(k)}$, $\nabla_i^{(k)}$ есть регулярная $(q-k)$-параметрическая полиномиальная матрица, характеристический полином которой зависит от $q - k$ переменных и является примитивным над кольцом полиномов от $q - k - 1$ переменных из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$; G есть полиномиальная q-параметрическая $m \times n$ матрица ранга m.

§1. Спектральные характеристики

Пусть $F = F(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ. Рассмотрим уравнение

$$Fx = 0, \quad x \not\equiv 0. \tag{1.1}$$

Будем различать два вида решений уравнения (1.1). К первому виду относятся полиномиальные решения, т.е. полиномиальные векторы, удовлетворяющие уравнению (1.1) при любых значениях параметров. Они существуют только у сингулярной матрицы F и образуют правое нуль-пространство $N_c[F]$ из полиномиальных решений F. Ко второму виду решений уравнения (1.1) относятся полиномиальные векторы x, в частности, постоянные ненулевые векторы, удовлетворяющие (1.1) при всех или некоторых, фиксированных параметрах.[1] Совокупность параметров и им соответствующие векторы, при которых уравнение (1.1) имеет решения второго вида, образуют правые спектральные характеристики матрицы F. Ниже для определенности будем рассматривать правые полиномиальные решения и правые спектральные характеристики матрицы F. Очевидно, левые спектральные характеристики и левые нуль-пространства матрицы F совпадают с правыми для матрицы F^T. Слова “правые” и “левые” будем опускать, если их употребление не вызывает двусмысленного толкования.

1.1. Скалярные спектральные характеристики. Скалярные спектральные характеристики матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ определяются как совокупность нулей СНАУ вида

$$Z[F] := F\binom{i}{j} = F\binom{i_1, \dots, i_\rho}{j_1, \dots, j_\rho} = 0,$$
$$1 \leqslant i_1 < \dots \leqslant i_\rho \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots \leqslant j_\rho \leqslant n. \tag{1.2}$$

Здесь через $F\binom{i}{j}$ обозначен минор порядка ρ матрицы F, $Z = (z_1, \dots, z_k)$ – вектор, компонентами которого являются миноры, входящие в левые части уравнений СНАУ (1.2), занумерованные от 1 до N в любом порядке следования мультииндексов i и j. СНАУ (1.2) запишем в виде трех СНАУ:

$$f[Z] = 0; \quad \widehat{Z}[F] = 0; \quad \begin{cases} f[Z] = 0, \\ \widehat{Z}[F] = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $f[Z] := \delta[Z]$ есть НОД полиномов $z_1, \dots, z_N$, так что $z_i = f[Z]\widehat{z}_i$, $i = 1, \dots, N$; $\widehat{Z} := (\widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_N)^T$ – вектор, компоненты которого суть взаимно простые полиномы ($\delta[\widehat{Z}] = \mathrm{const}$). Каждый нуль СНАУ (1.2) (или, что то же, (1.3)) будем рассматривать как набор из q параметров, дополняя недостающие (не фиксированные) параметры произвольными (свободными) параметрами: $\bar{\mu}^* := (\mu_1^*, \dots, \mu_q^*)$ обозначает нуль, у которого все параметры

[1]Аналогично определяются два вида левых решений уравнения $y^T F = 0$.

фиксированы; $(\overline{\lambda}_k, \bar{\mu}^*_{q-k})$ обозначает нуль, у которого мультипараметры $\overline{\lambda}_k$ и $\bar{\mu}^*_{q-k}$ соответственно состоят из k свободных и $q-k$ фиксированных параметров. Будем использовать также обозначение $(\lambda, \bar{\mu}_*) := (\overline{\lambda}_k, \bar{\mu}^*_{q-k})$, где λ – один из свободных параметров, $\bar{\mu}_*$ – дополнительные к λ параметры, среди которых, по крайней мере, один фиксирован.

Множество нулей СНАУ (1.2) (СНАУ (1.3)) образует $\sigma[F]$, т.е. конечный спектр матрицы F. Нули СНАУ будем также называть точками спектра $\sigma[F]$. Множество нулей характеристического полинома $f[F]$ определяет $(q-1)$-мерное решение СНАУ (1.2) и образует конечный регулярный спектр $\sigma_r[F]$ матрицы F. Множество нулей $\widehat{Z}[F] = 0$ определяет $(q-k)$-мерные решения $(k = 2, \dots, q)$ СНАУ (1.2) и образует конечный сингулярный спектр $\sigma_s[F]$ матрицы F. Множество общих нулей системы $f[F] = 0$, $\widehat{Z}[F] = 0$ образует регулярно-сингулярный спектр $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ матрицы F:

$$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma^+_{rs}[F] \cup \sigma^-_{rs}[F] \cup \sigma^+_s[F] \cup \sigma^-_s[F].$$

При отсутствии двусмысленного толкования знаки “+” и “−” будем опускать.

1.2. Векторные спектральные характеристики. Векторные спектральные характеристики матрицы $F \in \mathcal{F}^{m\times n}_\rho$ будем определять, используя q-параметрическую $\rho N \times \rho$ матрицу $A[F]$ ранга ρ:

$$A := A[F] = [A_1, \dots, A_N]^B, \quad \det A_k = z_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

так что вектор $Z = (z_1, \dots, z_N)$ из (1.2) является ассоциированным вектором для матрицы $A[F]$, т.е. матрица A_k есть матрица минора z_k.

Для определения правых[2] векторных характеристик матрицы A введем в рассмотрение СНАУ вида

$$A\eta = 0, \quad A = A[F] = A(\mu_1, \dots, \mu_q). \tag{1.4}$$

Справедливы следующие очевидные свойства.

1°. $\sigma[F] = \sigma[A]$.

[2] Для определения левых векторных характеристик матрицы F берется матрица $A := A[F^T] = [A_1^T, \dots, A_N^T]^B$.

2°. Для любой фиксированной точки из $\sigma[A]$ имеют место соотношения[3]

$$N_c[A_*] \subseteq N_c[A_{k*}], \qquad k = 1, \ldots, N.$$

При этом $N_c[A_*] = N_c[F_*]$, если F имеет полный столбцовый ранг.

3°. Имеют место равенства

$$f_k[F] = f_k[A], \quad k = 0, 1, \ldots, \rho - 1; \quad \varphi_k[F] = \varphi_k[A]; \quad g_k[F] = g_k[A];$$

$$\psi_k[F] = \psi_k[A], \quad k = 1, \ldots, u_1 - 1; \quad \varepsilon_k[F] = \varepsilon_k[A], \quad k = 1, \ldots, v - 1.$$

4°. Любое решение СНАУ (1.4) есть пара $(|\cdot|; \eta_*)$, состоящая из точки множества $\sigma[A]$ (множества $\sigma[F]$), обозначенной символом $|\cdot|$, и вектора η_*, удовлетворяющего условиям

$$\eta_* \in N_c[A_*], \quad \eta_* \neq 0, \quad \delta[\eta_*] = \mathrm{const},$$

так что η_* есть или постоянный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $A_* = A(\mu^*, \ldots, \mu_q^*)$, если точка $|\cdot|$, принадлежащая $\sigma[A]$, имеет вид $\overline{\nu}^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$, или полиномиальный вектор (в частности, постоянный), принадлежащий $N_c[A_*]$, $A_* := A(\lambda, \bar{\mu}_*)$, если точка $|\cdot|$, принадлежащая $\sigma[A]$, имеет вид $(\lambda, \bar{\mu}_*)$. Не умаляя общности, в любом случае вектор η_* можем считать нормированным[4] так, что $\delta]\eta_*] = \mathrm{const}$.

Введем в рассмотрение полиномиальный вектор

$$\xi[A] := \xi(\mu_1, \ldots, \mu_q) = A(\mu_1, \ldots, \mu_q)\eta_* = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^B, \tag{1.5}$$

где $\xi_k := A_k(\mu_1, \ldots, \mu_q)\eta_*$ есть полиномиальный вектор из ρ компонент.

Спектральная пара $(|\cdot|; \eta_*)$ называется правой регулярной спектральной парой матрицы A, если соответствующий ей вектор $\xi[A]$ из (1.5) не является свободным ($\delta[\xi] \neq \mathrm{const}$). Спектральная пара $(|\cdot|; \eta_*)$ называется правой сингулярной спектральной парой матрицы A, если соответствующий ей вектор $\xi[A]$ из (1.5) удовлетворяет любому из следующих условий: $\delta[\xi] = \mathrm{const}$, т.е. $\xi[A]$ есть свободный вектор, или $\xi[A]$ есть сингулярный вектор.[5]

[3] Здесь и ниже через C_* обозначается значение матрицы C в рассматриваемой точке.

[4] Так нормированный ненулевой полиномиальный вектор будем называть свободным.

[5] Вектор $\xi(\lambda, \bar{\mu})$ называется сингулярным, если СНАУ $\xi(\lambda, \bar{\mu}) = 0$ имеет сингулярное решение ($(q-k)$-мерное решение) в точке $(\lambda, \bar{\mu}_*)$, и при этом (λ, μ_*) не является нулем полинома $\delta[\xi]$.

1.3. Свойства спектральных пар матрицы $A[F]$.

1°. Для того, чтобы спектральная пара $(|\cdot|, \eta_*)$ была правой регулярной для матрицы A необходимо, чтобы $\delta[\xi_k] \neq \mathrm{const}$ для всех $k = 1, \dots, N$. Справедливость следует из определения регулярных спектральных пар.

2°. Для того, чтобы пара $(|\cdot|, \eta_*)$ не была правой регулярной парой для матрицы A достаточно, чтобы, по крайней мере, для одного фиксированного k $(k = 1, \dots, N)$ выполнялось условие $\sigma[\xi_k] = \mathrm{const}$. При этом рассматриваемая пара будет правой сингулярной, если $\sigma_{rs}[A] = \varnothing$.

3°. Свойства 1°–2° остаются справедливыми, если в формулировках матрицу A заменить на матрицу F полного столбцового ранга. Решение уравнения (1.4) можно заменить решением уравнения $\widetilde{F}\eta = 0$, где $\widetilde{F}$ получается из A вычеркиванием лишних (совпадающих) строк. Матрицы F и $\widetilde{F}$ могут отличаться только порядком следования строк, так что $N_c[A_*] = N_c[F_*]$. В случае, когда F имеет полный строчный ранг, в формулировках свойств 1°, 2° следует в качестве A взять матрицу $A^- := A[F^T]$, а в качестве векторов η_*, ξ_* взять векторы $\eta_*^- \in N_c[A_*^-]$, $\xi^- = A^-(\mu_1, \dots, \mu_q)\eta_*^-$.

4°. Для того, чтобы пара $(|\cdot|; \eta_*)$ была правой регулярной парой матрицы F полного столбцового ранга $(F \in \mathcal{F}_n^{m\times n})$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta[\xi] \neq \mathrm{const}$.

Для того, чтобы пара $(|\cdot|; \eta_*)$ была правой сингулярной парой матрицы $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих условий:

i) $\delta[\xi] = \mathrm{const}$;

ii) вектор $\xi = \xi(\lambda, \bar{\mu})$ является сингулярным, т.е. точка $(\lambda, \bar{\mu}_k)$ есть $(q-k)$-мерное $(k \neq 1)$ решение СНАУ вида

$$\xi(\mu_1, \dots, \mu_q) = F(\mu_1, \dots, \mu_q)\eta_* = 0, \quad \eta_* = N_c[F_*], \quad \delta[\eta_*] = \mathrm{const}.$$

Справедливость следует из определения спектральных пар матрицы $A[F]$ для $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$.

В дальнейшем будем ссылаться на свойство 4° как на "ξ-критерий", определяющий принадлежность спектральной пары матрицы полного столбцового ранга к регулярному (сингулярному) виду.

5°. Любая спектральная пара $(|\cdot|; \eta_*)$, порожденная нулями СНАУ $\widehat{Z}[F] = 0$ из (1.3), является сингулярной спектральной парой для матрицы A.

Для доказательства свойства 5° предварительно установим справедливость некоторых утверждений.

Пусть $A := [A_1, \dots, A_N]^B$, $\widehat{A} := [\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_N]^B$ суть матрицы размеров $\rho N \times \rho$ ранга ρ; A_k и $\widehat{A}_k$ – матрицы размеров $\rho \times \rho$, удовлетворяющие соотношениям $A_k = f\widehat{A}_k$, $k = 1, \dots, N$; f – полином; $Z[A] = (z_1, \dots, z_N)^B$ – ассоциированный вектор для матрицы A, так что $z_k = \det A_k$; $\widehat{Z}[A] = (\widehat{z}_1, \dots, \widehat{z}_N)^B$ – вектор, компонентами которого являются взаимно простые полиномы.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *между равенствами*

$$A = f\widehat{A} \quad \text{и} \quad Z[A] = f^\rho Z[\widehat{A}] \tag{1.6}$$

существует взаимно однозначное соответствие;

(б) *если f есть* НОД *компонент вектора $Z[A]$, то*

$$Z[\widehat{A}] = f^{1-\rho}\widehat{Z}[A]; \tag{1.7}$$

здесь $\widehat{Z} = (\widehat{z}_1, \dots, \widehat{z})^B$ есть свободный вектор ($\delta[\widehat{Z}] = \mathrm{const}$), удовлетворяющий равенству

$$Z[A] = f\widehat{Z}[A]. \tag{1.8}$$

Справедливость (а) устанавливается непосредственной проверкой.

Докажем справедливость (б). Из (1.6) имеем $\det A_k \equiv z_k[A] = f^\rho \det \widehat{A}_k$, так что

$$Z[A] = f^\rho Z[\widehat{A}]. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) находим $Z[\widehat{A}] = f^{1-\rho}\widehat{Z}[A]$. Лемма доказана

Следствие 1.2. *Вектор $\widehat{Z}[A]$ в равенстве* (1.8) *является ассоциированным вектором для матрицы $\widehat{A}$.*

Для доказательства будем искать представление $Z[\widehat{A}]$ в виде $Z[\widehat{A}] = f^r \hat{\hat{Z}}$, где $\delta[\hat{\hat{Z}}] = \mathrm{const}$. По лемме 1.1 имеем $Z[\widehat{A}] = f^{1-\rho}\widehat{Z}[A]$, где $\delta[\widehat{Z}] = \mathrm{const}$, так что справедливо равенство

$$f^r \hat{\hat{Z}} = f^{1-\rho}\widehat{Z}[A].$$

Отсюда с учетом того, что $\hat{\hat{Z}}$ и $\widehat{Z}$ суть свободные векторы (т.е. могут отличаться друг от друга только постоянным множителем), находим $r = 1 - \rho$. Справедливость следствия установлена.

Вернемся к доказательству свойства 5°.

Пусть $A = f\widehat{A}$; $Z[A] = f^{\rho}Z[\widehat{A}]$; $f-$НОД$\{\det A_k\}_{k=1,\dots,N}$; $(\lambda, \bar{\mu}_*) \in \{|\cdot| : \widehat{Z} = 0\}$, $\widehat{\xi} := \widehat{A}\,\eta_*$. Надо доказать, что $\delta_1 := \delta[\widehat{\xi}] = \mathrm{const}$.

Доказательство от противного. Допустим, что $\delta_1 \neq \mathrm{const}$, так что $\widehat{\xi} = \widehat{A}\eta_* = \delta_1\hat{\hat{A}}\eta_* \equiv \delta_1\hat{\hat{\xi}}$, где $\delta[\hat{\hat{\xi}}] = \mathrm{const}$. Но тогда по лемме 1.1 $\delta_1 = \mathrm{const}$, что противоречит предположению. Следовательно, $\widehat{\xi} = \widehat{A}\eta_*$ есть свободный вектор, так что пара $((\lambda, \bar{\mu}_*);\ \eta_*)$ есть сингулярная пара матрицы A, что и требовалось доказать.

§2. Классификация спектральных пар

В §1 предложен способ разделения спектральных пар матрицы $F \in \mathcal{F}_{\rho}^{m\times n}$ на регулярные и сингулярные, и в терминах матрицы $A[F]$ сформулирован критерий (ξ-критерий) для их определения.

Ниже в терминах так называемого уровня наследственности точек спектра матрицы рассматривается классификация и свойства спектральных пар q-параметрических полиномиальных матриц F полного ранга. Для определенности будем считать, что F есть матрица полного строчного ранга. Многие из результатов верны (или могут быть обобщены) на случай матриц произвольного ранга при условии, что спектры базисных матриц правого и левого нуль-пространств рассматриваемой матрицы не имеют общих точек. В противном случае требуются дополнительные исследования.

Здесь мы используем результаты статьи [3], публикуемой в настоящем сборнике. Обе статьи взаимно связаны и для избежания повторов имеют ссылки друг на друга.

2.1. Уровень наследственности точек $\sigma[F]$**.** Уровнем наследственности точки $(\lambda, \bar{\mu}_*) \in \sigma_r[F]$ (точки $(\mu_1^*, \dots, \mu_q^*) \in \sigma_r[F]$) называется число $l_r = l$ наследственных полиномов $\psi_k[F]$, $k = 1, \dots, u_1 - 1$ (обобщенных инвариантных полиномов $\varepsilon_k[F]$, $k = 1, \dots, v_1 - 1$), общим нулем которых является эта точка. Другими словами, уровнем наследственности точки регулярного спектра $\sigma_r[F]$ матрицы $F \in \mathcal{F}_{\rho}^{m\times n}$ называется число $l_r = l$ полиномов $f_k[F]$, $k = 0, 1, \dots, \rho - 1$, общим нулем которых является эта точка.

Уровнем наследственности точки сингулярного спектра $\sigma_s[F]$ матрицы $F \in \mathcal{F}_{\rho}^{m\times n}$ называется число $(q-k)$-мерных решений, $k = 2, \dots, q$, системы $\widehat{Z}[F] = 0$, которым эта точка принадлежит. Заметим, что нули $(\mu_1^*, \dots, \mu_q^*)$ полинома $g[F]$, входящего в неполную относительную факторизацию характеристического полинома $f[F]$ матрицы F, не являются нулями наследственных полиномов матрицы F. В дальнейшем множество нулей $g[F]$ разделим на два множества: $\{|\cdot|: g[F]=0\} = \sigma_r[g]\cup\sigma_s[g]$: $\sigma_r[g]=\{|\cdot|: g[F]=0\}\setminus\sigma_s[F]$; $\sigma_s[g]=\{|\cdot|: g[F]=0\}\cap\sigma_s[F]$. Множества $\sigma_r[g]$ и $\sigma_s[g]$ соответственно имеют уровень наследственности $l_r=1$ и $l_r>1$. Конечный спектр $\sigma[F]=\sigma_r[F]\cup\sigma_s[F]\cup\sigma_{rs}[F]$ матрицы $F\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ представим в виде

$$\sigma_r[F] := \{|\cdot|: f[F]=0\} = \sigma_{r1}[F]\cup\sigma_{rl}[F];$$

$$\sigma_s[F] := \{|\cdot|: \widehat{Z}[F]=0\} = \sigma_{s1}[F]\cup\sigma_{sl}[F].$$

Здесь $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{rl}[F]$ ($\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{sl}[F]$) суть множества точек регулярного (сингулярного) спектра, имеющие соответственно уровень наследственности равный единице и больше единицы.

Регулярный спектр $\sigma_r[F]$ (сингулярный спектр $\sigma_s[F]$), все точки которого имеют уровень наследственности равный единице, будем называть простым регулярным (сингулярным) спектром. Матрицу $F\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, имеющую простые регулярный и сингулярный спектры, будем называть матрицей простой структуры.

2.2. Свойства спектра $\sigma[F]$

Теорема 2.1. *Для любой базисной матрицы X нуль-пространства из правых (левых) полиномиальных решений матрицы $F\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ справедливы равенства*

$$\sigma_s^-[X]=\sigma_s^+[F] \quad (\sigma_s^+[X]=\sigma_s^-[F]); \tag{2.1}$$

$$\sigma_r[X]\cap\sigma_s^-[X]=\sigma_r[F]\cap\sigma_s^+[F] \ \Big(\sigma_r[X]\cap\sigma_s^+[X]=\sigma_r[F]\cap\sigma_s^-[F]\Big). \tag{2.2}$$

Справедливость (2.1) известна (см., например, [4]).

Доказательство (2.2) для определенности приводим для правого нуль-пространства $N_c[F]$. Из включений $\sigma_{rs}^+[F] := \{\sigma_r[F]\cap\sigma_s^+[F]\}\subseteq\sigma_r[F]$ и $\sigma_{rs}^-[X] := \sigma_r[X]\cap\sigma_s^-[X]\subseteq\sigma_s^-[X]$ находим $\{\sigma_{rs}^+[F]\cap\sigma_{rs}^-[X]\}\subseteq\sigma_r[F]\cap\sigma_s^-[X]$. Отсюда с учетом (2.1) имеем $\sigma_{rs}^+[F]\cap\sigma_{rs}^-[X]\subseteq\sigma_{rs}^+[F]$, так что

$$\sigma_{rs}^-[X]\subseteq\sigma_{rs}^+[F]. \tag{2.3}$$

Аналогично из включений $\sigma_{rs}^+[F]\subseteq\sigma_s^+[F]$ и $\sigma_{rs}^-[X]\subseteq\sigma_r[X]$ имеем $\sigma_{rs}^+[F]\cap\sigma_{rs}^-[X]\subseteq\sigma_{rs}^-[X]\subseteq\sigma_{rs}^-[X]$, так что $\sigma_{rs}^+[F]\subseteq\sigma_{rs}^-[X]$, что с учетом (2.3) доказывает справедливость (2.2).

В дальнейшем при отсутствии двусмысленного толкования значки "+" и "−" в символах $\sigma_s[\ ]$ и $\sigma_{rs}[\ ]$ будем опускать.

Теорема 2.2. *Пусть $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $m \leqslant n$, и пусть $F = PG$ – есть PG-q факторизация матрицы F.*

Имеют место следующие равенства:

$$\sigma_{rs}[F] = \{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cap \sigma_s[F]; \tag{2.4}$$

$$\sigma_{r1}[F] = \sigma[P] \cup \sigma_r[G], \quad \sigma_{rl}[F] = \sigma_{rs}[F]. \tag{2.5}$$

Здесь $\sigma_r[G] = \{|\cdot| : g[F] = 0\}$, $g[F]$ – полином, входящий в неполную относительную факторизацию характеристического полинома матрицы F: $f[F] = \varphi[F]g[F]$; $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$; $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{rl}[F]$ – множества точек $\sigma_r[F]$, имеющие уровень наследственности $l_r = 1$ и $l_r > 1$ соответственно.

Доказательство. С учетом свойств PG-q факторизации матрицы F представим спектр $\sigma[F]$ в виде

$$\sigma[F] = \sigma[P] \cup \{\sigma[P] \cap \sigma[G]\} \cup \sigma[G],$$

где $\sigma[G] = \sigma_r[G] \cup \sigma_s[G] \cup \sigma_{rs}[G]$; $\sigma[P] \cap \sigma[G] = \{\sigma[P] \cap \sigma_s[F]\} \cup \{\sigma[P] \cap \sigma_{rs}[G]\}$, так как $\sigma[P] \cap \sigma_r[G] = \varnothing$ (полиномы $\det P$ и $g[F]$ не имеют общих нулей). С учетом того, что $\sigma_s[G] = \sigma_s[F]$ и $\sigma_{rs}[G] = \sigma_r[G] \cap \sigma_s[G]$, имеем

$$\sigma[F] = \{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cup \{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cap \sigma_s[F] \cup \sigma_s[F]. \tag{2.6}$$

Справедливость (2.4) установлена. Для доказательства (2.5) множество $\sigma_r[G]$ в равенстве (2.6) представим в виде $\sigma_r[G] = \sigma_r[g] \cup \sigma_s[g]$, где по определению $\sigma_s[g] = \sigma_r[G] \cap \sigma_s[G] \equiv \{|\cdot| : g[F] = 0\} \cap \sigma_s[F]$. Тогда имеем

$$\sigma[F] = \{\sigma[P] \cup \sigma_r[g]\} \cup \{\sigma[P] \cap \sigma_s[G] \cap \sigma_s[F] \cup \sigma_s[g] \cup \sigma_s[F] =$$

$$= \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{rl}[F] \cup \sigma_s[F], \quad \text{где} \quad \sigma_{r1}[F] = \sigma[P] \cup \sigma_r[g];$$

$$\sigma_{rl}[F] = \{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cap \sigma_s[F] \cup \sigma_s[g] = \{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cap \sigma_s[F], \tag{2.7}$$

так как $\sigma_s[g] = \sigma_r[G] \cap \sigma_s[G] = \sigma_r[G] \cap \sigma_s[F]$. Из (2.7) следует, что $\sigma_{rl} = \sigma_{rs}[F]$, что и завершает доказательство теоремы.

В дальнейшем $\sigma_{rl}[F]$ и $\sigma_{rs}[F]$ будем обозначать $\sigma_{rs}[F]$.

2.3. Классификация спектральных пар. Пусть $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, $\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{rs}[F]$, и пусть $F = P^{(k)}G_k = P_1 \cdots P_k G_k$, $k \leqslant q-1$, есть PG-k факторизация матрицы $F\bigl(P^{(q-1)} := P = \prod\limits_{k=1}^{q-1} P_k;$ $G_{q-1} = G\bigr)$.

Рассмотрим классификацию спектральных пар для точек регулярного спектра матрицы F. Будем различать спектральные пары двух видов: собственные (или вполне регулярные) и смешанные (или регулярно-сингулярные).

Собственной парой $(|\cdot|, x_*)$ матрицы F называется спектральная пара, состоящая из точки множества $\sigma_{r1}[F]$ и ненулевого вектора x_*, удовлетворяющих любому из следующих условий:

(а) $(\mu_1^*, \dots, \mu_q^*) \in \sigma_r[g] \subseteq \sigma_{r1}[F], \quad x_* \in N_c[F_*] \setminus N_c[F]_*;$

(б) $(\lambda, \bar\mu_*) \in \sigma[P] \subseteq \sigma_{r1}[F], \quad x_* \in \{C^n \setminus N_c[F]\}_* \setminus N_c[F]_*.$

Здесь $\{C^n \setminus N_c[F]\}_* = \{\operatorname{im} G^T\}_*$ $(N_c[F] = N_c[G])$; ненулевой вектор x_* удовлетворяет уравнению $P(\lambda, \bar\mu_*)G(\lambda, \bar\mu_*)x = 0$. Полагая $y = G(\lambda, \bar\mu_*)x$, $P(\lambda, \bar\mu_*)y = 0$, получим $x_* = G_*^T(G_*G_*^T)^{-1}y$, так что $x_* \in \operatorname{im} G_*^T$, $\operatorname{im} G^T = C^n \setminus N_c[G]$, где C^n – пространство полиномиальных векторов.

В дальнейшем точку и вектор собственной пары будем называть собственным значением и собственным вектором матрицы F.

Каждому собственному значению множества $\sigma_{r1}[F]$ соответствует $r \geqslant 1$ линейно независимых собственных векторов x_{*i}, $i = 1, \dots, r$, где r есть кратность нуля полинома $\det P$ (кратность нуля полинома $g[F]$).

Все собственные пары матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ являются регулярными спектральными парами.

Смешанной спектральной парой $(|\cdot|; x_*)$ матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ называется пара, состоящая из точки множества $\sigma_{rs}[F]$ и ненулевого вектора x_*, удовлетворяющих любому из следующих условий:

(а) $(\mu_1^*, \dots, \mu_q^*) \in \sigma_s[g], \quad \sigma_s[g] := \{|\cdot| \colon g[F] = 0\} \cap \sigma_s[F],$
$x_* \in N_c[F_*] \cap N_c[F]_*;$

(б) $(\lambda, \bar\mu_*) \in \sigma[P] \cap \sigma_s[F], \quad x_* \in \{C^n \setminus N_c[F]\}_* \cap N_c[F]_*.$

Замечания. 1. В точке $(\lambda, \mu_*) \in \sigma[P] \cap \sigma_s[G] \subseteq \sigma_{rl}[F]$ множества $\{C^n \setminus N_c[F]\}_*$ и $\{\operatorname{im} G^T\}_*$ совпадают; вектор x_* удовлетворяет уравнению $(PG)_*x = 0$ $(Gx = y, Py = 0)$, так что $x_* =$

$G_*^T(G_*G_*^T)^{-1}y$ и, следовательно, $F_*x_* = P_*x_* = 0$. Тогда с учетом того, что $N_c[PG]_* = N_c[P_*] \cap N_c[G]_*$, $N_c[G] = N_c[F]$ и $x_* \in \{\operatorname{im} G^T\}_*$, имеем $x_* \in \{C^n \setminus N_c[F]\}_* \cap N_c[F]_*$.

2. Каждой точке $(\lambda, \bar{\mu}_*) \in \sigma_{rl}[F]$, имеющей уровень наследственности l $(1 < l \leqslant q-1)$, соответствуют цепочки векторов x_{*i}, $k = 1, \ldots, l$, удовлетворяющих соотношениям

$$x_{*k} \in \{\operatorname{im} G_k^T\}_* \cap N_c[F]_* = \{C^n \setminus N_c[G_k]\}_* \cap N_c[F]_*.$$

Здесь $F = P_1 \cdots P_k G_k = P^{(k)} G_k$ есть PG-k факторизация q-параметрической полиномиальной матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$ (см. [3]).

2.4. Критические и особые точки. Критическими точками (λ, ν_*) и $(\nu_1^*, \ldots, \nu_q^*)$ будем называть точки спектра матрицы F, удовлетворяющие любому из следующих условий:

а) В точке $(\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ выполняется равенство

$$N_c[F_*] = N_c[F]_*, \tag{2.8}$$

так что соответствующая спектральная пара имеет вектор $x_* \in \{N_c[F_*] = N_c[F]_*\} \neq \varnothing$.

б) В точке (λ, ν_*) выполняется равенство

$$\{C^n \setminus N_c[F]\}_* = N_c[F]_*, \tag{2.9}$$

так что соответствующая спектральная пара имеет вектор $x_* \in \{C^n \setminus N_c[F]\}_* = N_c[F]_* \neq \varnothing$.

На спектральные пары, порожденные критическими точками, будем ссылаться как на критические пары. Обозначим $\sigma_\nu[F]$ множество всех критических точек $\sigma_r[F]$.

Очевидно, что критические спектральные пары относятся к смешанным спектральным парам, так что имеют место следующие соотношения: $\sigma_\nu[F] \subseteq \sigma_{rs}[F]$ или (что то же) $\sigma_\nu[F] \subseteq \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$. Критическую точку $(\nu_1^*, \ldots, \nu_q^*)$ будем относить к особым точкам спектра матрицы F, если соответствующий ей вектор x_* из спектральной пары является полиномиальным решением матрицы F нулевого индекса: $x_* \in \{N_c[F_*] = N_c[F]\}$.

Критическую точку (λ, ν_*) будем относить к особым точкам спектра, если соответствующий ей вектор x_* из спектральной пары является полиномиальным решением матрицы F нулевой степени по всем свободным параметрам рассматриваемой точки и, в частности, по параметру λ: $x_* \in \big\{\{C^n \setminus N_c[F]\}_* = N_c[F]\big\}$.

Замечания.

1. Особая точка может присутствовать в спектре матрицы F, когда нуль полинома $g[F]$ совпадает с нульмерным решением спектра $\sigma_s[F]$, при этом соответствующий вектор $x_* \in \{N_c[F_*] = N_c[F]_*\}$, т.е. является полиномиальным решением нулевого индекса для матрицы F.

2. Вектор x_*, соответствующий особой точке спектра F, является решением как уравнения $F(\mu_1, \dots, \mu_q)x_* = 0$ при любых значениях параметров $\mu_1, \dots, \mu_q$, так и решением уравнения $F(\lambda, \mu^*_{i_2}, \dots, \mu^*_{i_q})x = 0$ при $(\lambda, \mu^*_{i_2}, \dots, \mu^*_{i_q}) \in \{| \cdot | : \det P_1 = 0\}$.

2.5. Сопутствующая матрица и ее свойства. Матрица $C_\lambda[F] := C(\lambda; \bar{\mu})$ называется λ-сопутствующей матрицей для $F \in \mathcal{F}^{m\times n}_\rho$, $\rho \leqslant m < n$, если выполнены следующие условия.

(α) $C(\lambda, \bar{\mu}) = [C_{\lambda 1}(\lambda, \bar{\mu}), C_{\lambda 0}(\lambda, \bar{\mu})]$ есть регулярная q-параметрическая полиномиальная $n \times n$ матрица, унимодулярная[6] по параметру λ, с блоками $C_{\lambda 1} := C_{\lambda 1}(\lambda, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}^{n\times\rho}_\rho$ и $C_{\lambda 0} := C_{\lambda 0}(\lambda, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}^{n\times(n-\rho)}_{n-\rho}$. При этом $C_{\lambda 0}$ есть базисная матрица нуль-пространства $N_c[F]$ из правых полиномиальных решений F.

(β) Непустое множество $\sigma[C_\lambda]$ состоит из точек $(\lambda, \bar{\mu}_*) := (\lambda, \overline{\nu}_*)$, для которых, по крайней мере, один из q параметров множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$, обозначенный λ, является свободным.

(γ) Каждой точке $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \sigma[C_\lambda]$ соответствует полиномиальный (в частности постоянный) вектор $Y_* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий равенству $C_\lambda(\lambda, \nu_*)Y_* = 0$ или (что то же)

$$C_{\lambda 1}(\lambda, \nu_*)y_1 = -C_{\lambda 0}(\lambda, \nu_*)y_0 \neq 0.$$

Рассмотрим следующие свойства $C_\lambda[F]$.

1°. Для матриц C_λ, $C_{\lambda 1}$ и $C_{\lambda 0}$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\sigma_{r1}[C_{\lambda i}] = \varnothing; \quad \sigma_r[C_{\lambda i}] = \sigma_{rs}[C_{\lambda i}];\\ &\sigma[C^T_{\lambda i}] = \sigma_{rs}[C_{\lambda i}] \cup \sigma_s[C_{\lambda i}], \quad i = 1, 0;\\ &\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}] = \sigma_{rs}[F]; \quad \sigma[C^T_{\lambda 0}] = \sigma_{rs}[F] \cup \sigma_s[F]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

[6] Регулярную q-параметрическую ($q \geqslant 2$) матрицу назовем унимодулярной по λ, если точки её спектра не зависят от параметра λ.

$$\begin{aligned}&\sigma[C_\lambda]=\sigma[C_\lambda^T];\\&\sigma[C_\lambda]=\sigma[C_{\lambda 1}^T]\cap\sigma[C_{\lambda 0}^T]=\sigma[C_{\lambda 1}^T]\cap\{\sigma_{rs}[F]\cup\sigma_s[F]\}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_r[C_{\lambda 0}]&=\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\cap\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cup\sigma_s[C_{\lambda 1}]\};\\\sigma_r[C_{\lambda 1}]&=\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\cup\sigma_s[C_{\lambda 0}]\}\\&=\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\{\sigma_{rs}[F]\cup\sigma_s[F]\}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Доказательство. Справедливость (2.10) следует из определения сопутствующей матрицы. При этом с учетом того, что $C_{\lambda 0}$ есть базисная матрица $N_c[F]$, по теореме 2.1 выполняются равенства $\sigma_s^-[C_0]=\sigma_s^+[F]$, $\sigma_{rs}[C_0]=\sigma_{rs}[F]$. Для доказательства (2.11) и (2.12) рассмотрим систему $C_\lambda^T(\lambda,\bar\mu)z=0$ или (в развернутом виде)

$$C_{\lambda 1}^T(\lambda,\bar\mu)z=0,\quad C_{\lambda 0}^T(\lambda,\bar\mu)z=0.\tag{2.13}$$

В силу регулярности матрицы C_λ, система (2.13) в любой точке $(\lambda,\overline{\nu}_*)\in\sigma[C_\lambda^T]$ имеет ненулевое решение $z\in\{N_c[C_{\lambda 1}^T(\lambda,\overline{\nu}_*)]\cap N_c[C_{\lambda 0}^T(\lambda,\overline{\nu}_*)]\}$. Следовательно, с учетом условия (γ) для $C_\lambda[F]$ и равенств (2.10), любая точка $(\lambda,\overline{\nu}_*)\in\sigma[C_\lambda]$ принадлежит одному из следующих четырех множеств:

$$\begin{aligned}&\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\},\quad\{\sigma_s^-[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\},\\&\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_s^-[C_{\lambda 0}]\},\quad\{\sigma_s^-[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_s^-[C_{\lambda 0}]\},\end{aligned}\tag{2.14}$$

так что множество $\sigma[C_\lambda^T]$ (или, что то же, $\sigma[C_\lambda]$) совпадает с объединением всех множеств из (2.14). Имеем $\sigma[C_\lambda^T]=\sigma[C_\lambda]=\sigma[C_{\lambda 1}^T]\cap\sigma[C_{\lambda 0}^T]$. Отсюда, ввиду (2.10), следует справедливость равенств (2.11).

Для доказательства (2.12) заметим, что любая точка (λ,ν_*) из $\sigma_r[C_{\lambda 1}]$ принадлежит множеству $\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\}\cup\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_s^-[C_{\lambda 0}]\}$; любая точка $(\lambda,\overline{\nu}_*)$ из $\sigma_r[C_{\lambda 0}]$ принадлежит множеству $\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\}\cup\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}\cap\sigma_s^-[C_{\lambda 1}]\}$. Следовательно, имеют место равенства $\sigma_r[C_{\lambda 1}]=\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cap\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\cup\sigma_s[C_{\lambda 0}]\}$ и $\sigma_r[C_{\lambda 0}]=\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]\cap\{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]\cup\sigma_s[C_{\lambda 1}]\}$. Отсюда с учетом (2.10) следует справедливость (2.12).

2°. Справедливы равенства

$$\sigma_r[C_{\lambda 1}]=\sigma_r[C_{\lambda 0}]=\sigma_r[F]\cap\sigma_s[F]\tag{2.15}$$

или (что то же) $\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}] = \sigma_{rs}[C_{\lambda 0}] = \sigma_{rs}[F]$, и

$$\sigma[C_\lambda] = \sigma_{rs}[F]. \tag{2.16}$$

Доказательство. Из (2.12) следуют включения $\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}] \supseteq \{\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}] \cup \sigma_s[C_{\lambda 0}]\} \supseteq \sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]$ и $\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}] \supseteq \{\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}] \cup \sigma_s[C_{\lambda 1}]\} \supseteq \sigma_{rs}[C_{\lambda 1}]$. Отсюда $\sigma_{rs}[C_{\lambda 1}] = \sigma_{rs}[C_{\lambda 0}]$. Равенство $\sigma_{rs}[C_{\lambda 0}] = \sigma_{rs}[F] \equiv \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ следует из теоремы 2.2 с учетом того, что $C_{\lambda 0}$ есть базисная матрица $N_c[F]$. Справедливость (2.15) установлена. Равенство (2.16) следует из (2.15) и (2.11).

3°. Имеет место включение

$$\sigma[C_\lambda] \subseteq \sigma_\nu[F], \tag{2.17}$$

где $\sigma_\nu[F]$ есть множество критических точек спектра $\sigma[F]$.

Доказательство. По определению сопутствующей матрицы $C_\lambda[F]$, любой точке (λ, ν_*) непустого множества $\sigma[C_\lambda]$ соответствует спектральная пара (λ, ν_*); $Y_* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющая условию (γ). Следовательно, в любой точке $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \sigma[C_\lambda]$ выполняется равенство $\{C^n \setminus N[F]\}_* = N_c[F]_*$, где $\operatorname{span} C_{\lambda 0}(\lambda, \nu_*) = N_c[F]_*$, $\operatorname{span} C_{\lambda 1}(\lambda, \overline{\nu}_*) = \{C^n \setminus N[F]\}_*$. Отсюда, с учетом определения критических точек (λ, ν_*), следует справедливость (2.17).

4°. Если $\sigma_\nu[F] \neq \varnothing$, то сопутствующая матрица $C_\lambda[F]$ с непустым множеством $\sigma[C_\lambda]$ существует и может быть построена алгоритмом ΔG-q факторизации [3] матрицы $F(\lambda, \bar{\mu}) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\bar{\mu})\lambda^k$, где в качестве ведущего параметра λ выбран свободный параметр любой критической точки $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \sigma_\nu[F]$. В дальнейшем такой выбор ведущего параметра будем называть согласованным.

Действительно, матрица $G(\lambda, \bar{\mu})$, реализующая ΔG-q факторизацию [3] матрицы $F(\lambda, \bar{\mu})$ (т.е. факторизацию вида $F(\lambda, \bar{\mu})G(\lambda, \mu) = [\widehat{\Delta}(\lambda, \mu), \mathbb{O}]$, $G = [\widehat{G}_1, \widehat{G}_0]$, где $\widehat{G}_0 = N_c[F]$), также является сопутствующей $C_\lambda[F]$ матрицей для $F \in \mathcal{F}_m^{m \times n}$. Справедливость следует из свойств матрицы G. Следовательно, наличие точки (λ, ν_*) в спектре $\sigma[G]$, в которой выполняется равенство

$$\widehat{G}_1(\lambda, \nu_*)\widehat{y}_1 = -\widehat{G}_0(\lambda, \nu_*)\widehat{y}_0 \neq 0,$$

является достаточным условием для того, чтобы точка (λ, ν_*) принадлежала спектру $\sigma_\nu[F]$.

5°. Справедливы следующие утверждения:

1) $\sigma_v[F] = \bigcup\limits_{\lambda} \sigma[C_\lambda]$,

где множество $\bigcup\limits_{\lambda} \sigma[C_\lambda]$ есть объединение спектров λ-сопутствующих матриц при всевозможных способах выбора параметра λ из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$.

2) Алгоритм ΔG-q факторизации матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ позволяет вычислять критические спектральные пары $((\lambda, \overline{\nu}_*); x_*)$ матрицы F. Каждой точке $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \{| \cdot |\colon \det G = 0\}$ соответствует ненулевой вектор $x_* = \widehat{G}_1(\lambda, \overline{\nu}_*) y_1 = -\widehat{G}_0(\lambda, \overline{\nu}_*) y_0$, где $\operatorname{span} \widehat{G}_0(\lambda, \overline{\nu}_*) = N_c[F]_*$ и $\operatorname{span} \widehat{G}_1(\lambda, \nu_*) = \{C^n \setminus N[F]\}_*$. Так вычисленная пара $((\lambda, \overline{\nu}_*); x_*)$ является критической, а следовательно и смешанной спектральной парой матрицы F.

Справедливость следует из 2°–4° и свойств критических точек, рассмотренных в п. 2.4.

Заключение.

В настоящей статье предложен анализ той части конечного спектра $\sigma[F]$ матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, которая определяется нулями $(q-1)$-мерных решений СНАУ, составленной из всевозможных миноров порядка ρ матрицы F.

Для обобщения этого анализа на случай любого $(q-k)$-мерного решения может быть применена следующая схема.

Конечный спектр $\sigma[F]$ матрицы F рассматривается как объединение спектров $\sigma^{(k)}[F] : \sigma[F] = \bigcup\limits_{k=0}^{q-1} \sigma^{(k)}[F]$. Здесь множество $\sigma^{(k)}[F]$ определяется нулями $(q-k)$-мерных решений систем вида

$$Z^{(k)}[F] = 0, \qquad \begin{cases} \widehat{Z}^{(k)}[F] = 0, \\ f^{(k)}[F] = 0, \end{cases}$$

где $Z^{(k)}[F] = f^{(k)}[F]\widehat{Z}^{(k)}[F]$ – есть вектор, составленный из всевозможных миноров порядка $\rho_k = \rho - k$ матрицы F; $f^{(k)}[F]$ есть НОД компонент вектора $Z^{(k)}[F]$. Представим множество $\sigma^{(k)}[F]$ в виде

$$\sigma^{(k)}[F] = \sigma_{r1}^{(k)}[F] \cup \sigma_{rs}^{(k)}[F] \cup \sigma_s^{(k)}[F].$$

Здесь $\sigma_{r1}^{(k)}[F]$ – множество нулей полинома $f^{(k)}[F]$, не принадлежащих нулям полиномов $f^{(i)}[F]$, $i > k$ $(i = k+1, \dots, q-1)$. Другими словами, $\sigma_{r1}^{(k)}[F]$ есть множество точек $\sigma[F]$, имеющих уровень наслественности равный k; $\sigma_{rs}^{(k)}[F]$ – множество нулей $f^{(k)}[F]$, общих с нулями $f^{(k+1)}[F]$, $k = 0, 1, \dots, q-2$; $\sigma_s^{(k)}[F]$ – множество точек $\sigma[F]$, определяемых нулями $(q-k-i)$-мерных решений ($i > 1$). Как и выше, на $\sigma_s^{(k)}[F]$ будем ссылаться как на сингулярный спектр матрицы F по отношению к спектру $\sigma^{(k)}[F]$.

Для определения векторных характеристик, т.е. спектральных пар, дающих решение уравнения $F_* x = 0$ в рассматриваемой точке $(\lambda, \bar{\mu}_*)$ спектра $\sigma^{(k)}[F]$, введем в рассмотрение матрицу $A^{(k)}[F] = [A_1^{(k)}, \dots, A_{N_k}^{(k)}]^B$, для которой вектор $Z^{(k)}[F]$ является ассоциированным. Здесь $A_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N_k$, – регулярная $\rho_k \times \rho_k$ матрица соответствующего минора, а N_k – число всевозможных миноров порядка ρ_k матрицы F.

Будем различать спектральные пары, соответствующие точкам $\sigma^{(k)}[F]$ двух видов: регулярные (собственные) и сингулярные (смешанные), используя следующий "ξ_k-критерий".

Пусть $\xi^{(k)} := \xi^{(k)}(\lambda, \bar{\mu}) = A^{(k)}(\lambda, \bar{\mu})\eta_*^{(k)}$, $\eta_*^{(k)} \not\equiv 0$, есть вектор, принадлежащий $N_c[A^{(k)}(\lambda, \bar{\mu}_*)]$; $\delta[\xi^{(k)}]$ есть НОД компонент вектора $\xi^{(k)}$.

Пару $(|\lambda|; \eta_*)$, где $(\lambda, \bar{\mu}_*) \in \sigma^{(k)}[F]$, $\eta_* \in N_c[A^{(k)}(\lambda, \bar{\mu}_*)]$, будем называть регулярной, если $\delta[\xi^{(k)}] \neq \mathrm{const}$. В противном случае, т.е. если $\delta[\xi^{(k)}] = \mathrm{const}$ или (λ, μ_*) есть "сингулярное" решение СНАУ $\xi_*(\xi_k\lambda, \bar{\mu}_*) = 0$, рассматриваемую спектральную пару будем называть сингулярной (смешанной) спектральной парой матрицы F.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизицации и его применение*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 89–107.
3. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 7. Метод PG-q факторизицации и его свойства*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **323** (2005), 150–163.
4. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (2003), 284–321.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 6. Spectral characteristics of polynomial matrices.

For a q-parameter polynomial $m\times n$ matrix F of rank ρ, solutions of the equation $Fx = 0$ at points of the spectrum of the matrix F determined by the $(q-1)$-dimensional solutions of the system $Z[F] = 0$ are considered. Here, $Z[F]$ is the polynomial vector whose components are all possible minors of order ρ of the matrix F. A classification of spectral pairs in terms of the matrix $A[F]$, with which the vector $Z[F]$ is associated, is suggested. For matrices F of full rank, a classification and properties of spectral pairs in terms of the so-called levels of heredity of points of the spectrum of F are also presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 13 марта 2004 г.