Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ. III. ОЦЕНКИ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРОСТЫХ ПУТЕЙ И КОНТУРОВ

§1. Введение

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица. Как хорошо известно, спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A является ее собственным значением, которое называется перроновским корнем A. Через G_A будет обозначаться ориентированный граф матрицы A с множеством вершин $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$, а через E_A – множество дуг в графе G_A, т.е.

$$E_A = \{(i,j) \ : \ i,j \in \langle n\rangle \quad \& \quad a_{ij} \neq 0\}.$$

Пусть

$$\mathfrak{P}_k(A) = \big\{(i_1,\dots,i_{k+1}),\ i_1,\dots,i_{k+1} \in \langle n\rangle \ : \ (i_j,i_{j+1}) \in E_A, \\ j = 1,\dots,k\big\}, \quad k \geqslant 1, \tag{1.1}$$

– множество всех путей длины k в графе G_A. Подмножество множества $\mathfrak{P}_k(A)$, состоящее из всех простых путей длины k, будет обозначаться через $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$. Для $k = 0$, мы полагаем

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P}_0(A) = \mathfrak{P}_0(A) = \langle n\rangle.$$

Через $\mathfrak{C}(A)$ обозначается множество всех простых контуров в G_A. Напомним, что простой контур длины k в G_A – это упорядоченная последовательность $\gamma = (i_1,\dots,i_k,\, i_{k+1})$, где вершины $i_1,\dots,i_k \in \langle n\rangle$ все различны, $i_{k+1} = i_1$, и для каждого $j = 1,\dots,k$ в G_A существует дуга из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1,\dots,i_k\}$ называется носителем γ и обозначается через $\bar\gamma$. Длина контура γ обозначается через $|\gamma|$, $|\gamma| = k$. Величины $\mathfrak{g}(G_A) = \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} |\gamma|$ и

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ-2268.2003.1.

$\mathfrak{c}(G_A) = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}|\gamma|$, определенные при условии, что $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, называются соответственно обхватом G_A и окружением G_A.

Также мы будем использовать следующие обозначения:

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad r_i'(A) = r_i(A) - a_{ii}, \qquad i = 1, \dots, n;$$

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad c_j'(A) = c_j(A) - a_{jj}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Пусть $\pi = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{P}_k(A)$, пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть δ_i, $i = 1, \dots, n$, – набор положительных чисел. Определим вес $w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi)$ пути π следующим образом:
для $k \geqslant 1$ положим

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \left(\delta_{i_1}^{\alpha}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha}\right)^{1/k}, \tag{1.2}$$

а для $k = 0$ и $\pi = (i)$ положим

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \delta_i. \tag{1.3}$$

Заметим, что при

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \delta_i = r_i(A), \qquad i = 1, \dots, n,$$

вес, определенный в (1.2), совпадает со средним весом пути, определенным в [1].

В соответствии с определением (1.2), для контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $\gamma = (i_1, \dots, i_k, i_1)$, где $k \geqslant 1$, мы имеем

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\gamma) = \left(\delta_{i_1}^{\alpha}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\delta_{i_1}^{1-\alpha}\right)^{1/k} = \left(\delta_{i_1}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_k}\right)^{1/k} = \left(\prod_{i\in\bar{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|},$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Следовательно, вес $w_{\alpha,\,\delta_i}(\gamma)$ не зависит от α, и для контуров можно использовать обозначение

$$w_{\delta_i}(\gamma) = \left(\prod_{i\in\bar{\gamma}}\delta_i\right)^{1/|\gamma|}, \qquad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{1.4}$$

Во введенных выше обозначениях справедливы следующие двусторонние оценки для перроновского корня, зависящие от $\mathfrak{P}_k(A)$ и $\mathfrak{C}(A)$.

Теорема 1.1 [2, теорема 6.1]. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \qquad \delta_i > 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого фиксированного $k \geqslant 1$ перроновский корень $\rho(A)$ матрицы A удовлетворяет оценкам

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi). \tag{1.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (1.5) строгие, либо оба они являются равенствами, т.е.

$$w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi) = \rho(A)/\rho(\Delta^{-1}A), \qquad \pi \in \mathfrak{P}_k(A). \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Если $\mathfrak{P}_k(A) = \varnothing$, то оценки в (1.5) не определены. Однако, как было показано в [4] (см. замечание 4.1), в этом случае все собственные значения A равны нулю, так что $\rho(A) = 0$.

Замечание 1.2. Заметим, что оценки теоремы 1.1 можно распространить и на случай $k = 0$, если воспользоваться определением (1.3). В этом случае они сводятся к неравенствам

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{i \in \langle n \rangle} \delta_i \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{i \in \langle n \rangle} \delta_i, \tag{1.7}$$

обобщающим хорошо известные оценки Фробениуса

$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A)$$

(см. [2]).

Теорема 1.2 [3, теорема 2.1]. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \qquad \delta_i > 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для перроновского корня $\rho(A)$ матрицы A справедливы оценки

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} w_{\delta_i}(\gamma) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} w_{\delta_i}(\gamma). \tag{1.8}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо оба неравенства в (1.8) являются строгими, либо оба они выполняются с равенством, т.е.

$$w_{\delta_i}(\gamma) = \rho(A)/\rho(\Delta^{-1}A), \qquad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{1.9}$$

Замечание 1.3. Если $\mathfrak{C}(A) = \varnothing$, то оценки (1.8) не определены, но в этом случае (см., например, [5, теорема 6.1]) матрица A перестановочно подобна верхней треугольной матрице с нулевой диагональю, так что $\rho(A) = 0$.

Пусть B – неотрицательная матрица порядка n. Обозначим

$$\begin{aligned} D_{r(B)} &= \operatorname{diag}\left(r_1(B), \ldots, r_n(B)\right), \\ D_{c(B)} &= \operatorname{diag}\left(c_1(B), \ldots, c_n(B)\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Следующий простой результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 3.1] или [3, лемма 2.1]).

Лемма 1.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда для произвольной диагональной матрицы D порядка n с положительными диагональными элементами выполнено равенство*

$$\rho(D^{-1}_{r(D^{-1}AD)}A) = 1. \tag{1.11}$$

Положим

$$\delta_i = r_i(A), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.12}$$

Тогда, с учетом леммы 1.1, оценки теорем 1.1 и 1.2 соответственно принимают вид

$$\min_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} w_{\alpha,\, r_i(A)}(\pi) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} w_{\alpha,\, r_i(A)}(\pi) \tag{1.13}$$

и

$$\min_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} w_{r_i(A)}(\gamma) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} w_{r_i(A)}(\gamma). \tag{1.14}$$

Как будет показано, оценки теоремы 1.2 улучшают оценки теоремы 1.1, но при этом должны быть известны все простые контуры из $\mathfrak{C}(A)$, включая контуры большой длины. С другой стороны, оценки теоремы 1.1 используют только фиксированное k, и множество $\mathfrak{P}_k(A)$ нетрудно определить, если k достаточно мало. Например, если $k = 1$, то

$$\mathfrak{P}_1(A) = \{(i, j) \,:\, a_{ij} \neq 0\},$$

т.е. множество $\mathfrak{P}_1(A)$ немедленно определяется по структуре разреженности матрицы A (и наоборот). Однако, нам хотелось бы избавиться от непростых путей и заменить множество $\mathfrak{P}_k(A)$ множеством $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$ простых путей длины k. Это будет сделано в §2.

Используя обобщенную версию леммы 4.3 в [4], верхнюю оценку в (1.5) можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, пусть*

$$\Delta_s = \operatorname{diag}(\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)}), \qquad s = 1, \dots, r, \quad r \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами и пусть числа $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, r$, таковы, что

$$\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1. \tag{1.15}$$

Тогда для любого $k \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1} A)\ w_{\alpha,\ \delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s}. \tag{1.16}$$

Переходя, если это необходимо, к главной подматрице матрицы A, которая не имеет нулевых строк и столбцов и перроновский корень которой равен перроновскому корню A, и полагая

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r(D_s^{-1} A D_s)}, & s = 1, \dots, p, \\ D_{c(D_s^{-1} A D_s)}, & s = p+1, \dots, r, \end{cases} \qquad 0 \leqslant p \leqslant r, \tag{1.17}$$

из теоремы 1.3 с учетом леммы 1.1 легко может быть получен следующий результат.

Следствие 1.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, пусть D_s, $s = 1, \dots, r$, – произвольные диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами и пусть числа $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, r$, удовлетворяют условию $\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1$. Тогда для любого $k \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} \left\{ \prod_{s=1}^{p} \left[w_{\alpha,\ r_i(D_s^{-1} A D_s)}(\pi)\right]^{\beta_s} \prod_{s=p+1}^{r} \left[w_{\alpha,\ c_i(D_s^{-1} A D_s)}(\pi)\right]^{\beta_s} \right\}.$$

Следующая теорема обобщает верхнюю оценку теоремы 1.2.

Теорема 1.4 [3, теорема 3.1]. *В условиях теоремы 1.3 справедливо неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1} A)\ w_{\delta_i^{(s)}}(\gamma)\right]^{\beta_s}.$$

Выбрав матрицы Δ_s в соответствии с (1.17), воспользовавшись леммой 1.1 и применив теорему 1.4 к матрице A (или ее неприводимой подматрице), мы приходим к следующей смешанной контурной верхней оценке для перроновского корня матрицы A (ср. со следствием 3.1 в [3]).

Следствие 1.2. *В условиях следствия* 1.1 *справедлива оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(A)} \left\{ \prod_{s=1}^{p} \left[w_{r_i(D_s^{-1} A D_s)}(\gamma) \right]^{\beta_s} \prod_{s=p+1}^{r} \left[w_{c_i(D_s^{-1} A D_s)}(\gamma) \right]^{\beta_s} \right\}.$$

В §2 этой работы для перроновского корня неотрицательной матрицы будут представлены новые двусторонние оценки и соответствующие им неравенства, которые для любого фиксированного k зависят только от простых контуров длины не больше k и простых путей длины k. Будет показано, что для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, новые двусторонние оценки занимают промежуточное положение между контурными оценками теоремы 1.2 и путевыми оценками теоремы 1.1, причем при $k = 1$ и $k = n$ они сводятся к оценкам теорем 1.1 и 1.2 соответственно.

В §3 для перроновского корня неотрицательной матрицы будут получены новые смешанные верхние оценки. В частности, будет улучшен результат теоремы 1.3.

2. Двусторонние оценки и неравенства

Введем следующие дополнительные обозначения. Пусть

$$\mathfrak{C}_k(A) = \{\gamma \in \mathfrak{C}(A) : \ |\gamma| \leqslant k\};$$

$$C_k(A, \delta_i) = \max_{\gamma \in \mathfrak{C}_k(A)} \{w_{\delta_i}(\gamma)\}, \qquad c_k(A, \delta_i) = \min_{\gamma \in \mathfrak{C}_k(A)} \{w_{\delta_i}(\gamma)\}; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} S_k(A, \alpha, \delta_i) &= \max_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)} \{w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi)\}, \\ s_k(A, \alpha, \delta_i) &= \min_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)} \{w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi)\}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} P_k(A, \alpha, \delta_i) &= \max_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} \{w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi)\}, \\ p_k(A, \alpha, \delta_i) &= \min_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A)} \{w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi)\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее, пусть $\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)$ – это подмножество множества $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$, состоящее из простых путей длины k, которые лежат на простых контурах. Ясно, что при $k \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ множество $\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)$ пусто. Наконец, положим

$$\begin{aligned} S'_k(A,\alpha,\delta_i) &= \max_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)} \{w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi)\}, \\ s'_k(A,\alpha,\delta_i) &= \min_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)} \{w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi)\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство первого результата этого параграфа будет основано на следующей лемме.

Лемма 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $\mathfrak{g}(G_A) \leqslant m \leqslant \mathfrak{c}(G_A)$, пусть $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$ – простой контур длины $|\gamma| = m$ и пусть $\delta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, – произвольные положительные числа. Тогда для любого k, $1 \leqslant k < m$, и произвольного числа α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, имеют место неравенства*

$$s'_k(A,\alpha,\delta_i) \leqslant w_{\delta_i}(\gamma) \leqslant S'_k(A,\alpha,\delta_i). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\gamma = (i_1,\dots,i_m,\, i_{m+1})$, где $i_{m+1} = i_1$ и $m = |\gamma| > k \geqslant 1$, – простой контур. Тогда для любого j, $j = 1,\dots,m$, путь

$$\pi_j = \{i_j, i_{j+1}, \dots, i_{j+k}\},$$

где $j+r$, $0 \leqslant r \leqslant k$, рассматривается по модулю m, – это простой путь длины k, принадлежащий множеству $\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)$. Следовательно, ввиду (2.4), мы имеем

$$s'_k(A,\alpha,\delta_i) \leqslant w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j) \leqslant S'_k(A,\alpha,\delta_i), \qquad j = 1,\dots,m. \tag{2.6}$$

Перемножая неравенства в (2.6), мы получаем, что

$$\begin{aligned} [s'_k(A,\alpha,\delta_i)]^m &\leqslant \prod_{j=1}^m w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j) = \prod_{j=1}^m \delta_{i_j} \\ &= \prod_{i \in \bar{\gamma}} \delta_i = [w_{\delta_i}(\gamma)]^{|\gamma|} \leqslant [S'_k(A,\alpha,\delta_i)]^m. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поскольку $m = |\gamma|$, полученные неравенства равносильны (2.5). $\square$

Новые двусторонние оценки для перроновского корня представлены в следующей теореме. Заметим, что эти оценки, так же как и контурные оценки теоремы 1.2, зависят только от главных подматриц матрицы A, соответствующих ее неприводимым компонентам.

Теорема 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, где $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, – произвольные положительные числа. Если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$\begin{gathered}\rho(\Delta^{-1}A)\min\{c_k(A,\delta_i),\ s'_k(A,\alpha,\delta_i)\} \leqslant \rho(A) \\ \leqslant \rho(\Delta^{-1}A)\max\{C_k(A,\delta_i),\ S'_k(A,\alpha,\delta_i)\},\ \ \mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A);\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\rho(\Delta^{-1}A)\ c_k(A,\delta_i) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A)\ C_k(A,\delta_i), \qquad k \geqslant \mathfrak{c}(G_A); \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\rho(\Delta^{-1}A)\ s'_k(A,\alpha,\delta_i) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A)\ S'_k(A,\alpha,\delta_i), \\ k < \mathfrak{g}(G_A).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то в (2.8), (2.9) и (2.10) либо оба неравенства строгие, либо оба являются равенствами.

Доказательство. Поскольку, очевидно,

$$\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{C}_k(A) \cup \{\gamma \in \mathfrak{C}(A):\ |\gamma| > k\},$$

то при $\mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A)$ из теоремы 1.2 следует, что

$$\begin{aligned}\rho(A) &\leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)} w_{\delta_i}(\gamma) \\ &= \rho(\Delta^{-1}A)\ \max\left\{\max_{\gamma\in\mathfrak{C}_k(A)} w_{\delta_i}(\gamma),\ \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A):\ |\gamma|>k} w_{\delta_i}(\gamma)\right\}.\end{aligned}$$

С другой стороны, по лемме 2.1 мы имеем

$$\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A):\ |\gamma|>k} w_{\delta_i}(\gamma) \leqslant S'_k(A,\alpha,\delta_i), \qquad \mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A). \tag{2.11}$$

Учитывая указанные неравенства и используя определение (2.1), мы получаем неравенство

$$\rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A)\ \max\{C_k(A,\delta_i),\ S'_k(A,\alpha,\delta_i)\},$$

которое и доказывает верхнюю оценку в (2.8).

Если $k \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$, то $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{C}_k(A)$, и верхняя оценка в (2.9) совпадает с верхней оценкой теоремы 1.2. Наконец, если $k < \mathfrak{g}(G_A)$, то $\mathfrak{C}(A) = \{\gamma \in \mathfrak{C}(A):\ |\gamma| > k\}$, и верхняя оценка в (2.10) следует из теоремы 1.2 и леммы 2.1.

Нижние оценки в (2.8), (2.9) и (2.10) устанавливаются аналогично.

Рассмотрим случай равенства. Пусть матрица A неприводима, и предположим, что для некоторого k, $\mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A)$,

$$\rho(A) = \rho(\Delta^{-1}A)\ \max\{C_k(A,\delta_i),\ S'_k(A,\alpha,\delta_i)\}. \tag{2.12}$$

Тогда при

$$\xi = \rho(A)/\rho(\Delta^{-1}A)$$

мы имеем

$$C_k(A,\delta_i) \leqslant \xi, \qquad S'_k(A,\alpha,\delta_i) \leqslant \xi. \tag{2.13}$$

Из неравенств (2.11) и (2.13) следует, что

$$\max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\{w_{\delta_i}(\gamma)\} \leqslant \xi,$$

тогда как теорема 1.2 дает нам

$$\xi \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\{w_{\delta_i}(\gamma)\}.$$

Следовательно,

$$\xi = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\{w_{\delta_i}(\gamma)\},$$

т.е. верхняя оценка теоремы 1.2 выполняется с равенством. В этом случае, по теореме 1.2, мы имеем:

$$w_{\delta_i}(\gamma) = \xi \quad \text{для любого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A). \tag{2.14}$$

Но, в силу (2.14) и равенств в (2.7), для любого контура γ длины $|\gamma| > k$, справедливы соотношения

$$\xi^{|\gamma|} = [w_{\delta_i}(\gamma)]^{|\gamma|} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j), \tag{2.15}$$

где пути

$$\pi_j \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A), \qquad j = 1,\dots,|\gamma|,$$

определены в доказательстве леммы 2.1. Поскольку, в силу (2.13),

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j) \leqslant \xi, \qquad j = 1,\dots,|\gamma|,$$

из равенства (2.15) следует, что

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j) = \xi, \qquad j = 1,\dots,|\gamma|.$$

Теперь, для того чтобы доказать, что

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \xi \tag{2.16}$$

для каждого пути $\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)$, нам остается лишь вспомнить, что, по определению $\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)$, путь π лежит на некотором простом контуре γ длины $|\gamma| > k$. Таким образом, ввиду (2.14) и (2.16), мы имеем:

$$C_k(A, \delta_i) = c_k(A, \delta_i) = S'_k(A, \alpha, \delta_i) = s'_k(A, \alpha, \delta_i) = \xi = \rho(A)/\rho(\Delta^{-1}A),$$

откуда и следует, что оба неравенства в (2.8) являются равенствами.

Тот случай, когда левое неравенство в (2.8) является равенством, рассматривается аналогично.

Случай равенства в (2.10) рассматривается таким же образом.

Наконец, при $k \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ оценки (2.9) совпадают с оценками (1.8) теоремы 1.2, в силу которой либо оба неравенства являются строгими, либо оба они выполняются с равенством. □

Замечание 2.1. Если $\mathfrak{C}(A) = \varnothing$, так что $\mathfrak{g}(G_A)$ и $\mathfrak{c}(G_A)$ не определены, то, как было указано в замечании 1.3, $\rho(A) = 0$. Достаточным условием для того, чтобы множество $\mathfrak{C}(A)$ было непустым, является, например, условие отсутствия у матрицы A нулевых строк.

Замечание 2.2. Оценки (2.10) улучшают соответствующие оценки теоремы 1.1, поскольку при $k < \mathfrak{g}(G_A)$, $\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A) \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A) = \mathfrak{P}_k(A)$. С другой стороны, при $k \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ и, в частности, при $k = n$ оценки (2.9) совпадают с контурными оценками теоремы 1.2.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{R}_k(A) = \mathfrak{C}_k(A) \cup \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A), \tag{2.17}$$

состоящее из всех простых контуров длины, не превосходящей k, и всех простых путей длины k. Заметим, что если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то и множество $\mathfrak{R}_k(A)$ непусто.

Принимая во внимание тривиальные соотношения

$$S'_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant S_k(A, \alpha, \delta_i), \qquad s'_k(A, \alpha, \delta_i) \geqslant s_k(A, \alpha, \delta_i),$$

из теоремы 2.1 мы немедленно получаем следующее более слабое, но и более простое утверждение, формулируемое в терминах множества $\mathfrak{R}_k(A)$.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и пусть $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$. Тогда для перроновского корня справедливы двусторонние оценки*

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A)} w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A)} w_{\alpha,\, \delta_i}(\pi), \tag{2.18}$$
$$1 \leqslant k \leqslant n.$$

Замечание 2.3. При $k < \mathfrak{g}(G_A)$ мы, очевидно, имеем

$$\mathfrak{R}_k(A) = \mathfrak{P}_k(A).$$

Следовательно, для таких k оценки (2.18) совпадают с оценками теоремы 1.1.

Замечание 2.4. Поскольку

$$\mathfrak{R}_1(A) = \{(i,\, j) :\ a_{ij} \neq 0\},$$

при $k = 1$ оценки (2.18) сводятся к оценкам

$$\rho(\Delta^{-1}A) \min_{i,j\,:\, a_{i,j}\neq 0} \left\{\delta_i^{\alpha}\ \delta_j^{1-\alpha}\right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A) \max_{i,j\,:\, a_{i,j}\neq 0} \left\{\delta_i^{\alpha}\ \delta_j^{1-\alpha}\right\},$$

которые в точности совпадают с оценками теоремы 1.1 для $k = 1$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{R}_n(A) = \mathfrak{C}(A)$, то при $k = n$ оценки (2.18) сводятся к контурным оценкам теоремы 1.2.

Из доказательства теоремы 2.1 немедленно следует, что новые оценки (2.8)–(2.10) и (2.18) не лучше, чем контурные оценки теоремы 1.2. Теперь мы покажем, что для всех $k \geqslant 1$ оценки теоремы 2.1 и следствия 2.1 не хуже, чем оценки теоремы 1.1. Для этого мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, пусть $k \geqslant 1$ и пусть $\gamma \in \mathfrak{C}_k(A)$. Справедливы следующие неравенства:*

$$p_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant w_{\delta_i}(\gamma) \leqslant P_k(A, \alpha, \delta_i). \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $\gamma = (i_1, \ldots, i_l, i_{l+1})$, где $i_{l+1} = i_1$, $l \leqslant k$, и пусть $k = ml + s$, где $0 \leqslant s \leqslant l - 1$. Если $s = 0$, т.е. $k = ml$, то обозначим

$$\pi = (i_1, \ldots, i_l) \tag{2.20}$$

и введем в рассмотрение путь

$$\tau = (\underbrace{\pi, \ldots, \pi}_{m}, i_1) \in \mathfrak{P}_k(A).$$

Очевидно, что

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\tau)^k = (\delta_{i_1} \cdots \delta_{i_l})^m = w_{\delta_i}(\gamma)^{lm} = w_{\delta_i}(\gamma)^k. \tag{2.21}$$

С другой стороны, в силу определений (2.3), мы имеем

$$p_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant w_{\alpha,\,\delta_i}(\tau) \leqslant P_k(A, \alpha, \delta_i). \tag{2.22}$$

Из соотношений (2.21) и (2.22) немедленно следует, что в рассматриваемом случае требуемые неравенства (2.19) справедливы.

Пусть теперь $m = 1$ и $s \neq 0$, т.е. $k = l + s$, $0 < s < l$. В этом случае рассмотрим следующие l путей длины $k = l + s$:

$$\pi_j = (i_j, \ldots, i_l, i_1, \ldots, i_{s+j}), \qquad j = 1, \ldots, l, \tag{2.23}$$

где индексы вершин рассматриваются по модулю l. Ясно, что

$$[w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j)]^k = [w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j)]^{l+s} = \left(\prod_{t=1}^{l} \delta_{i_t}\right) \frac{\delta_{i_j} \cdots \delta_{i_{s+j}}}{\delta_{i_j}^{1-\alpha} \delta_{i_{s+j}}^{\alpha}}, \qquad j = 1, \ldots, l.$$

Перемножая последние неравенства по $j = 1, \ldots, l$, мы получаем

$$\begin{aligned} \left[\prod_{j=1}^{l} w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j)\right]^k &= \left(\prod_{t=1}^{l} \delta_{i_t}\right)^l \frac{\left(\prod_{j=1}^{l} \delta_{i_j}\right)^{s+1}}{\prod_{j=1}^{l} \delta_{i_j}} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{l} \delta_{i_j}\right)^{l+s} = w_{\delta_i}(\gamma)^{lk}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

С другой стороны, ввиду (2.3) мы имеем

$$[p_k(A, \alpha, \delta_i)]^{lk} \leqslant \left[\prod_{j=1}^{l} w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi_j)\right]^k \leqslant [P_k(A, \alpha, \delta_i)]^{lk}. \tag{2.25}$$

Из соотношений (2.24) и (2.25) неравенства (2.19) следуют очевидным образом, что и завершает доказательство в случае $m = 1$.

Наконец, в оставшемся случае $k = ml + s$, где $m > 1$, $0 < s < l$, доказательство легко получается из случая $m = 1$, рассмотренного только что, если заменить пути (2.23) следующими l путями длины $k = ml + s$:

$$\pi_j = (i_j, \dots, i_l, \underbrace{\pi, \dots, \pi}_{m-1}, i_1, \dots, i_{s+j}), \qquad j = 1, \dots, l,$$

где путь π определен в (2.20), а индексы вершин опять же рассматриваются по модулю l.

Лемма доказана полностью. □

Поскольку, по лемме 2.2, мы имеем

$$p_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant c_k(A, \delta_i) \leqslant C_k(A, \delta_i) \leqslant P_k(A, \alpha, \delta_i), \qquad \mathfrak{g}(G_A) \leqslant k,$$

и, очевидно, для всех k таких, что $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A) \neq \varnothing$,

$$p_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant s_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant S_k(A, \alpha, \delta_i) \leqslant P_k(A, \alpha, \delta_i),$$

мы заключаем, что оценки теоремы 2.1 и следствия 2.1 являются промежуточными между между контурными оценками теоремы 1.2 и соответствующими оценками теоремы 1.1.

Теперь мы рассмотрим некоторые специфические результаты, вытекающие из следствия 2.1. Пусть матрица A не имеет нулевых строк. Тогда, в силу замечания 2.1, $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$. Полагая в следствии 2.1

$$\Delta = D_{r(D^{-1}AD)} \tag{2.26}$$

и применяя лемму 1.1, мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк, и пусть D – произвольная диагональная матрица порядка n с положительными диагональными элементами. Тогда при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, справедливы оценки*

$$\min_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A)} \{w_{\alpha,\, r_i(D^{-1}AD)}(\pi)\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A)} \{w_{\alpha,\, r_i(D^{-1}AD)}(\pi)\}, \tag{2.27}$$

$$1 \leqslant k \leqslant n.$$

Замечание 2.5. Верхняя оценка следствия 2.2 справедлива для любой неотрицательной матрицы A такой, что $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$. Действительно, если $n = 1$, то из условия $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$ следует, что $A = a \neq 0$, и верхняя оценка в (2.27) верна тривиальным образом. Если $n \geqslant 2$ и матрица A неприводима, то у A нет нулевых строк, и применимо следствие 2.2. Наконец, если $n \geqslant 2$ и A приводима, то $\rho(A) = \rho(A[S])$, где $S \subseteq \langle n \rangle$ и $A[S]$ – неприводимая компонента матрицы A, не имеющая нулевых строк. В этом случае верхняя оценка в (2.27) верна для подматрицы $A[S]$ и, следовательно, также и для A. Что касается нижней оценки следствия 2.2, то она может быть обобщена на произвольные неотрицательные матрицы с использованием скалярного сдвига и непрерывности. Однако, для матрицы A, не имеющей нулевых строк, нижняя оценка в (2.27) всегда нетривиальна, тогда как для матрицы A такой, что $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, у которой есть нулевые строки, эта оценка может оказаться равной нулю, как это имеет место, например, для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ при $k = 1$.

Если неотрицательная матрица A не имеет нулевых строк, то, как легко видеть, все строки матриц A^q, $q \geqslant 0$, также ненулевые, а значит матрицы

$$D_q = D_{r(A^q)}, \qquad q \geqslant 0,$$

имеют положительные диагональные элементы. Учитывая равенства

$$r_i(D_q^{-1} A^t D_q) = \frac{r_i\left[A^t D_{r(A^q)}\right]}{r_i(A^q)} = \frac{r_i(A^{q+t})}{r_i(A^q)}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant 1, \quad q \geqslant 0, \tag{2.28}$$

и применяя следствие 2.2 к матрице A^t, $t \geqslant 1$, с $D = D_q$, мы приходим к следующему ослабленному аналогу оценок (2.13) из [3].

Следствие 2.3. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,*

$$\left[\min_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A^t)} \left\{ w_{\alpha, \frac{r_i(A^{q+t})}{r_i(A^q)}}(\pi) \right\}\right]^{1/t} \leqslant \rho(A)$$
$$\leqslant \left[\max_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A^t)} \left\{ w_{\alpha, \frac{r_i(A^{q+t})}{r_i(A^q)}}(\pi) \right\}\right]^{1/t}, \quad q \geqslant 0, \quad t \geqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.29}$$

Следующая теорема дает неравенства для перроновского корня $\rho(A)$ матрицы A, представленной в виде $A = D_A + P$, где D_A – это диагональная часть A. Напомним, что матрица порядка $n \geqslant 2$ называется *слабо неприводимой*, если порядок каждой ее неприводимой компоненты не меньше 2.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, пусть $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть*

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n), \qquad \delta_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда существует либо простой контур $\gamma_1 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_1| \leqslant k$, такой что

$$\prod_{i \in \bar{\gamma}_1} (\rho(A) - a_{ii}) \leqslant \left[\rho(\Delta^{-1}P)\right]^{|\gamma_1|} \prod_{i \in \bar{\gamma}_1} \delta_i, \tag{2.30}$$

либо простой путь $\pi_1 = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_k(A)$, такой что

$$\begin{gathered}(\rho(A) - a_{i_1 i_1})^\alpha \left[\prod_{s=2}^{k} (\rho(A) - a_{i_s i_s})\right] \left(\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}}\right)^{1-\alpha} \\ \leqslant [\rho(\Delta^{-1}P)]^k \; \delta_{i_1}^\alpha \left(\prod_{s=2}^{k} \delta_{i_s}\right) \delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha}.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Аналогично, существует либо простой контур $\gamma_2 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_2| \leqslant k$, такой что

$$\prod_{i \in \bar{\gamma}_2} (\rho(A) - a_{ii}) \geqslant \left[\rho(\Delta^{-1}P)\right]^{|\gamma_2|} \prod_{i \in \bar{\gamma}_2} \delta_i, \tag{2.32}$$

либо простой путь $\pi_2 = (j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_k(A)$, такой что

$$\begin{gathered}(\rho(A) - a_{j_1 j_1})^\alpha \left[\prod_{s=2}^{k} (\rho(A) - a_{j_s j_s})\right] \left(\rho(A) - a_{j_{k+1} j_{k+1}}\right)^{1-\alpha} \\ \geqslant [\rho(\Delta^{-1}P)]^k \; \delta_{j_1}^\alpha \left(\prod_{s=2}^{k} \delta_{j_s}\right) \delta_{j_{k+1}}^{1-\alpha}.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Доказательство теоремы 2.2 основано на следствии 2.1 и двух простых леммах, приводимых ниже.

Лемма 2.3 [3, лемма 2.3]. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}.$$

Лемма 2.4 (см. [3, лемма 2.2] или [2, лемма 4.2]). *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ такая, что*

$$\rho(A) > \max_{i \in \langle n \rangle} a_{ii}.$$

Тогда

$$\rho([\rho(A)I_n - D_A]^{-1}P) = 1,$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Доказательство теоремы 2.2. По леммам 2.3 и 2.4, для

$$D = \rho(A)I_n - D_A$$

мы имеем

$$\rho(D^{-1}P) = 1. \tag{2.34}$$

Обозначим

$$\Delta' = D^{-1}\Delta.$$

Тогда, применяя следствие 2.1 к матрице $D^{-1}P$ с заменой Δ на Δ' и используя (2.34), мы получаем

$$\begin{aligned} &\rho(\Delta^{-1}P) \min_{\pi \in \mathfrak{R}_k(P)} \left\{ w_{\alpha,\, \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}}(\pi) \right\} \leqslant \rho(D^{-1}P) \\ &= 1 \leqslant \rho(\Delta^{-1}P) \max_{\pi \in \mathfrak{R}_k(P)} \left\{ w_{\alpha,\, \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}}(\pi) \right\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Правое неравенство в (2.35) означает, что существует либо контур $\gamma_1 \in \mathfrak{C}_k(A - D_A)$, длина которого очевидно удовлетворяет условиям $2 \leqslant |\gamma_1| \leqslant k$, такой что

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \rho(\Delta^{-1}P)\, w_{\frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}}(\gamma_1) \\ &= \rho(\Delta^{-1}P) \left[\prod_{i \in \bar{\gamma}_1} \delta_i \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}_1} (\rho(A) - a_{ii}) \right]^{1/|\gamma_1|}, \end{aligned}$$

либо простой путь $\pi_1 \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A - D_A) = \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$, $\pi_1 = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1})$, такой что

$$1 \leqslant \rho(\Delta^{-1}P)\, w_{\alpha,\, \frac{\delta_i}{\rho(A)-a_{ii}}}(\pi_1) =$$

$$\rho(\Delta^{-1}P)\left[\frac{\delta_{i_1}^{\alpha}\left(\prod\limits_{s=2}^{k}\delta_{i_s}\right)\delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha}}{(\rho(A)-a_{i_1i_1})^{\alpha}\left[\prod\limits_{s=2}^{k}(\rho(A)-a_{i_si_s})\right](\rho(A)-a_{i_{k+1}i_{k+1}})^{1-\alpha}}\right]^{1/k}.$$

Отсюда следует, что справедливо одно из неравенств (2.30) или (2.31). Оставшееся утверждение аналогичным образом выводится из левого неравенства в (2.35). $\square$

Заметим, что для слабо неприводимой матрицы $A = D_A + P$ и произвольной диагональной матрицы D с положительными диагональными элементами мы имеем

$$r_i'(D^{-1}AD) > 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, диагональные элементы матрицы

$$\Delta = \operatorname{diag}\left(r_1'\left(D^{-1}AD\right), \ldots, r_n'(D^{-1}AD)\right) = D_{r(D^{-1}PD)}$$

положительны. Применяя теорему 2.2 с этой матрицей Δ и используя лемму 1.1, мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.4. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, пусть D – диагональная матрица с положительными диагональными элементами, пусть $k \geqslant 1$ и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда существует либо простой контур $\gamma_1 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_1| \leqslant k$, такой что*

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_1}(\rho(A) - a_{ii}) \leqslant \prod_{i\in\bar{\gamma}_1} r_i'(D^{-1}AD), \tag{2.36}$$

либо простой путь $\pi_1 = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$, такой что

$$\begin{aligned}(\rho(A)-a_{i_1i_1})^{\alpha}&\left[\prod_{s=2}^{k}(\rho(A)-a_{i_si_s})\right](\rho(A)-a_{i_{k+1}i_{k+1}})^{1-\alpha}\\ &\leqslant \left[r_{i_1}'(D^{-1}AD)\right]^{\alpha}\left[\prod_{s=2}^{k} r_{i_s}'(D^{-1}AD)\right]\left[r_{i_{k+1}}'(D^{-1}AD)\right]^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Аналогично, существует либо простой контур $\gamma_2 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_2| \leqslant k$, такой что

$$\prod_{i \in \bar{\gamma}_2} (\rho(A) - a_{ii}) \geqslant \prod_{i \in \bar{\gamma}_2} r'_i(D^{-1}AD), \tag{2.38}$$

либо простой путь $\pi_2 = (j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$, такой что

$$\begin{gathered}(\rho(A) - a_{j_1 j_1})^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} (\rho(A) - a_{j_s j_s})\right] (\rho(A) - a_{j_{k+1} i j_{k+1}})^{1-\alpha} \\ \geqslant \left[r'_{j_1}(D^{-1}AD)\right]^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} r'_{j_s}(D^{-1}AD)\right] \left[r'_{j_{k+1}}(D^{-1}AD)\right]^{1-\alpha}.\end{gathered} \tag{2.39}$$

В частности, положив в следствии 2.4

$$D = D_{r(A^q)}, \qquad q \geqslant 0,$$

и приняв во внимание соотношения

$$r'_i(D^{-1}_{r(A^q)} A D_{r(A^q)}) = \frac{r_i(A^{q+1})}{r_i(A^q)} - a_{ii}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, пусть $k \geqslant 1$, $q \geqslant 0$ и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда существует либо простой контур $\gamma_1 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_1| \leqslant k$, такой что*

$$\prod_{i \in \bar{\gamma}_1} (\rho(A) - a_{ii}) \leqslant \prod_{i \in \bar{\gamma}_1} \left[\frac{r_i(A^{q+1})}{r_i(A^q)} - a_{ii}\right],$$

либо простой путь $\pi_1 = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_k(A)$, такой что

$$\begin{gathered}(\rho(A) - a_{i_1 i_1})^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} (\rho(A) - a_{i_s i_s})\right] (\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}})^{1-\alpha} \\ \leqslant \left[\frac{r_{i_1}(A^{q+1})}{r_{i_1}(A^q)} - a_{i_1 i_1}\right]^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} \left(\frac{r_{i_s}(A^{q+1})}{r_{i_s}(A^q)} - a_{i_s i_s}\right)\right] \\ \times \left[\frac{r_{i_{k+1}}(A^{q+1})}{r_{i_{k+1}}(A^q)} - a_{i_{k+1} i_{k+1}}\right]^{1-\alpha}.\end{gathered}$$

Аналогично, существует либо простой контур $\gamma_2 \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma_2| \leqslant k$, *такой что*

$$\prod_{i\in\bar{\gamma}_2} (\rho(A) - a_{ii}) \geqslant \prod_{i\in\bar{\gamma}_2} \left[\frac{r_i(A^{q+1})}{r_i(A^q)} - a_{ii}\right],$$

либо простой путь $\pi_2 = (j_1, \dots, j_k, j_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_k(A)$, *такой что*

$$(\rho(A) - a_{j_1j_1})^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} (\rho(A) - a_{j_sj_s})\right] (\rho(A) - a_{j_{k+1}j_{k+1}})^{1-\alpha}$$

$$\geqslant \left[\frac{r_{j_1}(A^{q+1})}{r_{j_1}(A^q)} - a_{j_1j_1}\right]^{\alpha} \left[\prod_{s=2}^{k} \left(\frac{r_{j_s}(A^{q+1})}{r_{j_s}(A^q)} - a_{j_sj_s}\right)\right]$$

$$\times \left[\frac{r_{j_{k+1}}(A^{q+1})}{r_{j_{k+1}}(A^q)} - a_{j_{k+1}j_{k+1}}\right]^{1-\alpha}.$$

3. Верхние оценки

В этом параграфе представлены смешанные верхние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы. Эти оценки будут получены на основе соответствующих результатов §2 с использованием следующей леммы.

Лемма 3.1 [2, лемма 4.1]. *Пусть* A – *неотрицательная матрица порядка* $n \geqslant 1$ *и пусть*

$$\Delta_s = \operatorname{diag}(\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)}), \qquad s = 1, \dots, r, \quad r \geqslant 1,$$

– *диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда для произвольных* $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, r$, *таких что*

$$\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1,$$

справедливо неравенство

$$\rho\left(\prod_{s=1}^{r} \Delta_s^{-\beta_s} A\right) \leqslant \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\right]^{\beta_s}. \tag{3.1}$$

Оценки, приводимые в следующей теореме, являются смешанными аналогами верхних оценок теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, пусть*

$$\Delta_s = \mathrm{diag}\,(\delta_1^{(s)}, \ldots, \delta_n^{(s)}), \qquad s = 1, \ldots, r, \quad r \geqslant 1,$$

– диагональные матрицы с положительными диагональными элементами и пусть $0 \leqslant \beta_s \leqslant 1$, $s = 1, \ldots, r$, таковы, что

$$\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1.$$

Если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то справедливы следующие оценки:

$$\rho(A) \leqslant \max\left\{ \max_{\gamma \in \mathfrak{C}_k(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\; w_{\delta_i^{(s)}}(\gamma)\right]^{\beta_s}, \right. \tag{3.2}$$

$$\left. \max_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\; w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s} \right\}, \quad \mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A);$$

$$\rho(A) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}_k(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\; w_{\delta_i^{(s)}}(\gamma)\right]^{\beta_s}, \qquad k \geqslant \mathfrak{c}(G_A); \tag{3.3}$$

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)} \prod_{s=1}^{r} \left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\; w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s}, \qquad k < \mathfrak{g}(G_A). \tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta = \prod_{s=1}^{r} \Delta_s^{\beta_s} = \mathrm{diag}\,(\delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{3.5}$$

Тогда, по лемме 3.1,

$$\rho(\Delta^{-1}A) \leqslant \prod_{s=1}^{r} [\rho(\Delta_s^{-1}A)]^{\beta_s}. \tag{3.6}$$

Заметим также, что для любого пути π в графе G_A мы, очевидно, имеем

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \prod_{s=1}^{r} \left[w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s}. \tag{3.7}$$

Применяя теорему 2.1 и используя неравенство (3.6) и равенство (3.7), мы выводим оценку (3.2) следующим образом: если $\mathfrak{g}(G_A) \leqslant k < \mathfrak{c}(G_A)$, то

$$\rho(A) \leqslant \rho(\Delta^{-1}A)\ \max\{C_k(A,\delta_i),\ S'_k(A,\alpha,\delta_i)\}$$

$$\leqslant \prod_{s=1}^{r}[\rho(\Delta_s^{-1}A)]^{\beta_s}\ \max\left\{\max_{\gamma\in\mathfrak{C}_k(A)} w_{\delta_i}(\gamma),\ \max_{\pi\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)} w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi)\right\}$$

$$= \prod_{s=1}^{r}[\rho(\Delta_s^{-1}A)]^{\beta_s}\ \max\left\{\max_{\gamma\in\mathfrak{C}_k(A)}\prod_{s=1}^{r}\left[w_{\delta_i^{(s)}}(\gamma)\right]^{\beta_s},\right.$$

$$\left.\max_{\pi\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)}\prod_{s=1}^{r}\left[w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s}\right\}$$

$$= \max\left\{\max_{\gamma\in\mathfrak{C}_k(A)}\prod_{s=1}^{r}\left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\ w_{\delta_i^{(s)}}(\gamma)\right]^{\beta_s},\right.$$

$$\left.\max_{\pi\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}'_k(A)}\prod_{s=1}^{r}\left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\ w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s}\right\}.$$

Для $k \geqslant \mathfrak{c}(G_A)$ и $k < \mathfrak{g}(G_A)$ неравенства, соответственно, (3.3) и (3.4) выводятся аналогично. $\square$

Следующий результат, вытекающий из теоремы 3.1, дает смешанное обобщение верхней оценки следствия 2.1, улучшающее оценку теоремы 1.3 за счет перехода от множества $\mathfrak{P}_k(A)$ к множеству $\mathfrak{R}_k(A)$.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и пусть* $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$. *Тогда для перроновского корня* $\rho(A)$ *справедлива верхняя оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi\in\mathfrak{R}_k(A)}\prod_{s=1}^{r}\left[\rho(\Delta_s^{-1}A)\ w_{\alpha,\,\delta_i^{(s)}}(\pi)\right]^{\beta_s},\quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{3.8}$$

Здесь, как и в §2, множество $\mathfrak{R}_k(A)$ определяется с помощью (2.17).

Положим, как в (1.17),

$$\Delta_s = \begin{cases} D_{r(D_s^{-1}AD_s)}, & s=1,\dots,p,\\ D_{c(D_s^{-1}AD_s)}, & s=p+1,\dots,r,\end{cases}\qquad 0\leqslant p\leqslant r, \tag{3.9}$$

где D_s, $s = 1, \ldots, r$, – диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. В этом случае следствие 3.1 с учетом леммы 1.1 и соображений, приведенных в замечании 2.5, приводит к следующему аналогу верхней оценки следствия 2.2, очевидно улучшающему оценку следствия 1.1.

Следствие 3.2. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, пусть $r \geqslant 1$ и пусть D_s, $s = 1, \ldots, r$, – произвольные диагональные матрицы порядка n с положительными диагональными элементами. Если $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$, то для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, произвольных $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, r$, таких что*

$$\sum_{s=1}^{r} \beta_s = 1,$$

и любого p, $0 \leqslant p \leqslant r$, справедлива верхняя оценка

$$\rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{N}_k(A)} \left\{ \prod_{s=1}^{p} \left[w_{\alpha,\, r_i(D_s^{-1} A D_s)}(\pi) \right]^{\beta_s} \prod_{s=p+1}^{r} \left[w_{\alpha,\, c_i(D_s^{-1} A D_s)}(\pi) \right]^{\beta_s} \right\}, \tag{3.10}$$
$$1 \leqslant k \leqslant n.$$

В частности, при $r = 2$, $p = 1$, $D_1 = D_2 = I$ и $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = 1 - \beta$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, следствие 3.2 дает следующий результат.

Следствие 3.3. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ такая, что $\mathfrak{C}(A) \neq \varnothing$. Тогда*

$$\begin{gathered} \rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{N}_k(A)} \left\{ \left[w_{\alpha,\, r_i(A)}(\pi) \right]^{\beta} \left[w_{\alpha,\, c_i(A)}(\pi) \right]^{1-\beta} \right\}, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Заметим, что при $k = 1$ (см. замечание 2.4) оценка (3.11) принимает вид

$$\begin{gathered} \rho(A) \leqslant \max_{i,j:\, a_{i,j} \neq 0} \left\{ \left[r_i^{\alpha}(A) r_j^{1-\alpha}(A) \right]^{\beta} \left[c_i^{\alpha}(A) c_j^{1-\alpha}(A) \right]^{1-\beta} \right\}, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \end{gathered} \tag{3.12}$$

и совпадает с оценкой (5.19) в [2].

Для того, чтобы получить смешанный аналог верхней оценки следствия 2.3, мы предполагаем, что матрица A не имеет ни нулевых строк, ни нулевых столбцов, применяем следствие 3.2 к матрице A^t, $t \geqslant 1$, при

$$D_s = \begin{cases} D_{r(A^{q_s})}, & s = 1, \ldots, p, \\ D^{-1}_{c(A^{q_s})}, & s = p+1, \ldots, r, \end{cases} \qquad q_s \geqslant 0, \qquad s = 1, \ldots, r,$$

и используем соотношения (см. (2.28))

$$r_i(D^{-1}_{r(A^{q_s})} A^t D_{r(A^{q_s})}) = \frac{r_i(A^{q_s+t})}{r_i(A^{q_s})}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и их столбцовые аналоги

$$c_i(D_{c(A^{q_s})} A^t D^{-1}_{c(A^{q_s})}) = \frac{c_i(A^{q_s+t})}{c_i(A^{q_s})}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Это приводит нас к следующему результату.

Следствие 3.4. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов, и пусть $k \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $0 \leqslant p \leqslant r$, $q_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, r$, $t \geqslant 1$. Тогда для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и произвольных $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, r$, таких что $\sum_{s=1}^r \beta_s = 1$, справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \rho(A) \leqslant \max_{\pi \in \mathfrak{R}_k(A^t)} \Bigg\{ \prod_{s=1}^{p} \left[w_{\alpha,\, \frac{r_i(A^{q_s+t})}{r_i(A^{q_s})}}(\pi) \right]^{\beta_s} \\ \times \prod_{s=p+1}^{r} \left[w_{\alpha,\, \frac{c_i(A^{q_s+t})}{c_i(A^{q_s})}}(\pi) \right]^{\beta_s} \Bigg\}^{1/t}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

В заключение рассмотрим случай, когда A – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, представленная в виде $A = D_A + P$. Пусть $\Delta_s = \operatorname{diag}(\delta_1^{(s)}, \ldots, \delta_n^{(s)})$, $s = 1, \ldots, r$, – диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. В этом случае, при

$$D = \rho(A) I_n - D_A$$

мы имеем (см. доказательство теоремы 2.2)

$$\rho(D^{-1}P) = 1. \tag{3.14}$$

Обозначим

$$\Delta'_s = D^{-1}\Delta_s, \qquad s = 1, \dots, r.$$

Применив следствие 3.1 к матрице $D^{-1}P$ с заменой Δ_s на Δ'_s, $s = 1, \dots, r$, и воспользовавшись равенством (3.14), мы приходим к следующему смешанному обобщению первого утверждения теоремы 2.2.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A + P$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$, пусть $r \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, пусть $\Delta_s = \operatorname{diag}(\delta_1^{(s)}, \dots, \delta_n^{(s)})$, $s = 1, \dots, r$, – диагональные матрицы с положительными диагональными элементами и пусть $\beta_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, r$, таковы, что $\sum_{s=1}^r \beta_s = 1$. Тогда для любого $k \geqslant 1$ существует либо простой контур $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma| \leqslant k$, такой что*

$$\prod_{i\in\bar\gamma}(\rho(A) - a_{ii}) \leqslant \prod_{s=1}^{r}\left[\rho(\Delta_s^{-1}P)^{|\gamma|}\prod_{i\in\bar\gamma}\delta_i^{(s)}\right]^{\beta_s}, \tag{3.15}$$

либо простой путь $\pi = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_k(A)$, такой что

$$(\rho(A) - a_{i_1i_1})^{\alpha}\prod_{j=2}^{k}\left(\rho(A) - a_{i_ji_j}\right)\left(\rho(A) - a_{i_{k+1}i_{k+1}}\right)^{1-\alpha}$$

$$\leqslant \prod_{s=1}^{r}\left[\rho(\Delta_s^{-1}P)^{k}\ \left(\delta_{i_1}^{(s)}\right)^{\alpha}\left(\prod_{j=2}^{k}\delta_{i_j}^{(s)}\right)\left(\delta_{i_{k+1}}^{(s)}\right)^{1-\alpha}\right]^{\beta_s}. \tag{3.16}$$

В частности, положив в теореме 3.2 $r = 2$, $\Delta_1 = D_{r(P)} = D_{r'(A)}$, $\Delta_2 = D_{c(p)} = D_{c'(A)}$ и $\beta_1 = \beta$ и воспользовавшись леммой 1.1, мы получаем следующий результат.

Следствие 3.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ – слабо неприводимая неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 2$ и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Тогда для любого $k \geqslant 1$ существует либо простой контур $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $2 \leqslant |\gamma| \leqslant k$, такой что*

$$\prod_{i\in\bar\gamma}(\rho(A) - a_{ii}) \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma}(r'_i(A))^{\beta}\,(c'_i(A))^{1-\beta}, \tag{3.17}$$

либо простой путь $\pi = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{SP}_k(A)$, *такой что*

$$\begin{aligned}(\rho(A) - a_{i_1 i_1})^{\alpha} \prod_{j=2}^{k} (\rho(A) - a_{i_j i_j}) \left(\rho(A) - a_{i_{k+1} i_{k+1}}\right)^{1-\alpha} \\ \leqslant \left[\left(r'_{i_1}(A)\right)^{\beta} \left(c'_{i_1}(A)\right)^{1-\beta}\right]^{\alpha} \left[\prod_{j=2}^{k} r'_{i_j}(A)\, c'_{i_j}(A)\right] \\ \times \left[\left(r'_{i_{k+1}}(A)\right)^{\beta} \left(c'_{i_{k+1}}(A)\right)^{1-\beta}\right]^{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перроновского корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Мат. заметки, **58** (1995), 635–637.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 77–122.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 60–88.
4. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 40–83.
5. F. Harary, *Graph Theory.* — Addison–Wesley Publ. Co. (1969).

Kolotilina L. Yu. Bounds and inequalities for the Perron root of a nonnegative matrix. III. Bounds dependent on simple paths and circuits.

The paper presents new upper and lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix in terms of the simple circuits of length not exceeding k and the simple paths of length k, $1 \leqslant k \leqslant n$, in the directed graph of the matrix. For each k, $1 \leqslant k \leqslant n$, these bounds are intermediate between the circuit bounds and the path-dependent bounds suggested previously, and for $k = 1$ and $k = n$ they reduce to the corresponding path-dependent bounds and the circuit bounds, respectively.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 18 апреля 2005 г.