Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

**А. В. Устинов**

# О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

## 1. Обозначения

1. Запись $[x_0; x_1, \dots, x_s]$ означает цепную дробь

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots + \frac{1}{x_s}}$$

длины $s$ с формальными переменными $x_0$, $x_1, \dots, x_s$.

2. Для рационального $r$ представление $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ есть каноническое (если не сделано дополнительных оговорок) разложение $r$ в цепную дробь, где $t_0 = [r]$ (целая часть $r$), $t_1, \dots, t_s$ – натуральные и $t_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$.

3. Для $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$, $s_x(r)$ есть количество номеров $j \in \{1, \dots, s\}$, для которых $[0; t_j, \dots, t_s] \leqslant x$. В частности, длина цепной дроби $s = s(r) = s_1(r)$.

4. Обозначение $K_n(x_1, \dots, x_n)$ используется для континуантов, которые определяются начальными условиями

$$K_0() = 1, \quad K_1(x_1) = x_1$$

и рекуррентным соотношением

$$K_n(x_1, \dots, x_n) = x_n K_n(x_1, \dots, x_{n-1}) + K_n(x_1, \dots, x_{n-2}) \qquad (n \geqslant 2).$$

При этом всегда выполняется равенство

$$[x_0; x_1, \dots, x_s] = \frac{K_{s+1}(x_0, x_1, \dots, x_s)}{K_s(x_1, \dots, x_s)}.$$

5. Знак звездочки в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m{}^{*} \dots$$

---

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант No. 03-51-5070.

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m,n)=1$.

6. Если $A$ – некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если $A$ истинно, и 0 в противном случае.

7. Для натурального $q$ через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на $q$:

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod p] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

8. Конечные разности функции $a(u,v)$:

$$\Delta_{1,0}a(u,v) = a(u+1,v) - a(u,v), \quad \Delta_{0,1}a(u,v) = a(u,v+1) - a(u,v),$$
$$\Delta_{1,1}a(u,v) = \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u,v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u,v)).$$

9. Сумма степеней делителей

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

10. Дилогарифм Эйлера

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = -\int\limits_0^z \frac{\log(1-z)}{z} dz.$$

11. Константа Каталана

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{Li}_2(i) - \mathrm{Li}_2(-i)\right]. \tag{1}$$

## 2. Введение

В метрической теории чисел ряд задач посвящен статистическим свойствам цепных дробей. Для почти всех действительных чисел $\alpha$ удается описать типичное поведение неполных частных в представлении

$$\alpha = [t_0; t_1, \ldots, t_s, \ldots]$$

(см. обзор в [1]).

При детальном исследовании алгоритма Евклида (см. [6], разд. 4.5.3) возникает необходимость изучать статистические свойства конечных цепных дробей

$$a/b = [t_0; t_1, \ldots, t_s],$$

когда числа $a$ и $b$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Этот вопрос был впервые изучен Хейльбронном [9] и Диксоном [7]. Хейльбронну удалось выделить главный член в асимптотической формуле

$$\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{12\log 2}{\pi^2}\log b+O(1).$$

Диксон показал, что для любого положительного $\varepsilon$ найдётся такая константа $c_0>0$, что

$$\left|s(a/b)-\frac{12\log 2}{\pi^2}\log b\right|<(\log b)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел $(a,b)$ лежащих в области $1\leqslant a\leqslant b\leqslant R$, за исключением быть может $R^2\exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар.

Позднее Портер [12] получил ещё более точный результат. Он показал, что

$$\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{12\log 2}{\pi^2}\log b+C_P+O(b^{-1/6+\varepsilon}),$$

где

$$C_P=\frac{6\log 2}{\pi^2}\left(3\log 2+4\gamma-24\frac{\zeta'(2)}{\pi^2}-2\right)-\frac{1}{2}$$

– константа, получившая название константы Портера (её окончательный вид был найден Ренчем, см. [10]).

В книге [5] (задача 1993–11) была поставлена задача о статистических свойствах элементов цепных дробей для чисел $a/b$, когда $a$, $b>0$, $a^2+b^2\leqslant R^2$. Более общим является вопрос об асимптотическом поведении суммы

$$N_x(R)=\sum_{\substack{a^2+b^2\leqslant R^2\\a,b\in\mathbb{N}}} s_x(a/b)$$

при $R\to\infty$. Ответ на него был впервые получен в работе [2]. Затем в статье [1] была доказана более точная асимптотическая формула

$$N_x(R)=\frac{3}{\pi}\log(1+x)R^2\log R+O(R^2),$$

в которой остаточный член на $\sqrt{\log R}$ лучше, чем в [2]. В настоящей работе для величины $N_x(R)$ получена асимптотическая формула с двумя значащими членами

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}R^2\left[\log(1+x)\log R + C(x)\right] + O(R^{17/9}\log^2 R),$$

с функцией $C(x)$, которая будет определена позднее.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за постановку задачи и полезные советы.

## 3. Формализация задачи

Следующее утверждение является видоизменением одной известной теоремы о цепных дробях (см. [3], § 50, теорема 1).

**Лемма 1.** *Пусть $P$ – целое неотрицательное число, $P'$, $Q$, $Q'$ – натуральные и $Q \leqslant Q'$. Предположим также, что $\alpha$ – действительное число из интервала $(0;1)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(I) *$P/Q$ и $P'/Q'$ – последовательные подходящие дроби к числу $\alpha$, отличные от $\alpha$, причем дробь $P'/Q'$ имеет больший номер;*

(II) $PQ' - P'Q = \pm 1$ *и* $0 < \dfrac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1$.

**Доказательство.** Предположим, что выполнено первое условие. Соотношение $PQ' - P'Q = \pm 1$ сразу вытекает из свойств цепных дробей. Далее, так как $\alpha$ находится между $P/Q$ и $P'/Q'$, то для некоторых натуральных $t_1, \dots, t_s$ $(s \geqslant 1)$ и действительного $t_s < \alpha' < t_s + 1$

$$\frac{P}{Q} = [0; t_1, \dots, t_{s-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; t_1, \dots, t_s],$$
$$\alpha = [0; t_1, \dots, t_{s-1}, \alpha']. \tag{2}$$

Второе из условий (II) следует из равенства

$$\frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = \alpha' - t_s.$$

Докажем утверждение леммы в другую сторону. Из условий леммы и предположения $|PQ' - P'Q| = 1$ вытекает, что для некоторых натуральных $t_1, \dots, t_s$ $(s \geqslant 1)$ выполняются равенства (2).

Так как
$$0 < \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P},$$
то $\alpha$ находится между $P/Q$ и $P'/Q'$, значит, для некоторого $\alpha'$
$$\alpha = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}, \alpha'] = \frac{(\alpha' - t_s)P + P'}{(\alpha' - t_s)Q + Q'}.$$
Подставляя это равенство в условие $0 < \dfrac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} < 1$, получаем, что $0 < \alpha' - t_s < 1$. Значит, $t_s = [\alpha']$, и каждая из дробей $P/Q$ и $P'/Q'$ будет подходящей к числу $\alpha$.

**Замечание.** Аналогично проверяется, что если $P \geqslant 0$, $P'$, $Q$, $Q' \geqslant 1$ и $Q \leqslant Q'$, то условия
$$PQ' - P'Q = \pm 1, \qquad \frac{Q'\alpha - P'}{-Q\alpha + P} = 1$$
равносильны тому, что дроби $P/Q$ и $P'/Q'$ являются подходящими дробями вида (2) к числу $\alpha = \frac{P+P'}{Q+Q'}$, записанному в виде нестандартной цепной дроби
$$\alpha = [0; t_1, \ldots, t_{s-1}, t_s, 1] \qquad (s \geqslant 1).$$

**Лемма 2.** *Пусть $R \geqslant 1$ и на плоскости $Omn$ задана область $\Omega(R)$, содержащаяся внутри квадрата $0 < m, n \leqslant R$. Предположим также, что $\Omega(R)$ имеет кусочно-гладкую границу, длина которой есть $O(R)$. Обозначим через $M(R)$ число целых точек в области $\Omega(R)$, а через $M^*(R)$ – число примитивных точек (то есть таких, что $(m,n) = 1$). Тогда справедливо равенство*
$$M^*(R) = \frac{1}{\zeta(2)} M(R) + O(R \log R).$$

**Доказательство.** Пусть $\Omega(R/d)$ – область, полученная из $\Omega(R)$ гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $1/d$. Будем обозначать через $M(R/d)$ и $M^*(R/d)$ соответственно число целых и примитивных точек в области $\Omega(R/d)$, а через $V(R/d)$ – площадь этой области. Из равенства
$$M(R) = \sum_{d \leqslant R} M^*(R/d)$$

по формуле обращения Мёбиуса (см., например, [8], теорема 268)

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) M(R/d).$$

Далее, так как $M(R/d) = V(R/d) + O(R/d)$ и $V(R/d) = V(R)/d^2$, то

$$M^*(R) = \sum_{d \leqslant R} \mu(d) \left( \frac{V(R)}{d^2} + O\left(\frac{R}{d}\right) \right) = \frac{1}{\zeta(2)} M(R) + O(R \log R).$$

Лемма доказана.

Обозначим через $T_x^*(R)$ число решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ mP + nP' = a, \\ mQ + nQ' = b, \\ a^2 + b^2 \leqslant R^2, \end{cases} \tag{3}$$

в которой

$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q, \quad 1 \leqslant m \leqslant xn, \quad (m,n) = 1. \tag{4}$$

**Лемма 3.** *Для любого $R \geqslant 2$ и $x \in [0;1]$ справедливо равенство*

$$N_x^*(R) = 2T_x^*(R) + \frac{\pi}{2\zeta(2)} R^2 \operatorname{arctg} x \cdot (1 - 2[x=1]) + O\left(R \log R\right). \tag{5}$$

**Доказательство.** Пусть $(a,b) = 1$ и $a/b$ – некоторое фиксированное рациональное число из интервала $(0;1)$. Разложим его в цепную дробь:

$$a/b = [0; t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}, t_s] \qquad (s \geqslant 1).$$

Нас будет интересовать величина $s_x(a/b)$, которая определяется как число номеров $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ таких, что $[0; t_j, \ldots, t_s] \leqslant x$, где $x$ – фиксированное действительное число из отрезка $[0;1]$.

Если $s \geqslant 2$ и $P/Q$, $P'/Q'$ – пара последовательных подходящих дробей к числу $a/b$ ($P'/Q'$ – дробь с бо́льшим номером), отличных от этого числа, то для некоторого номера $j \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$

$$P = K_{j-2}(t_2, \ldots, t_{j-1}), \qquad P' = K_{j-1}(t_2, \ldots, t_j),$$
$$Q = K_{j-1}(t_1, \ldots, t_{j-1}), \qquad Q' = K_j(t_1, \ldots, t_j)$$

(в частности, при $j=1$ будем иметь $P=0$, $Q=P'=K()=1$, $Q'=t_1$). Так как $PQ'-P'Q=\pm 1$, то, по паре чисел $a$ и $b$ однозначно находятся $m$ и $n$ такие, что

$$mP+nP'=a,$$
$$mQ+nQ'=b.$$

Из свойств континуантов (см., напр., [4]) следует, что такими числами являются

$$m=K_{s-j-1}(t_{j+2},\dots,t_s),$$
$$n=K_{s-j}(t_{j+1},\dots,t_s),$$

и, кроме того, $m/n=[0;t_{j+1},\dots,t_s]$.

По лемме (1)

$$s_x(a/b)=[a/b\leqslant x]+l_x(a,b),$$

где $l_x(a,b)$ – число решений системы

$$\begin{cases} PQ'-P'Q=\pm 1,\\ 0<\dfrac{aQ'-bP'}{-aQ+bP}<1,\\ mP+nP'=a,\\ mQ+nQ'=b,\end{cases} \tag{6}$$

$$1\leqslant Q\leqslant Q',\quad 1\leqslant P'\leqslant Q',\quad 0\leqslant P\leqslant Q,\quad m/n\leqslant x.$$

Далее, так как

$$\frac{aQ'-bP'}{-aQ+bP}=\frac{m}{n},$$

то систему (6) можно переписать в виде

$$\begin{cases} PQ'-P'Q=\pm 1,\\ mP+nP'=a,\\ mQ+nQ'=b,\end{cases}$$

$$1\leqslant Q\leqslant Q',\quad 1\leqslant P'\leqslant Q',\quad 0\leqslant P\leqslant Q,\quad m/n\leqslant x,\quad 0<m<n.$$

Поскольку $b/a=[t_1;t_2,\dots,t_{s-1},t_s]$, то

$$s_x(b/a)=s_x(a/b)-[a/b\leqslant x]=l_x(a,b),$$
$$s_x(b/a)+s_x(a/b)=2l_x(a,b)+[a/b\leqslant x]. \tag{7}$$

Суммирование формулы (7) по примитивным точкам $(a, b)$, лежащим в секторе
$$\{(a,b): 1 \leqslant a \leqslant b, a^2+b^2 \leqslant R^2\}.$$
приводит к равенству
$$N_x^*(R) = 2L_x^*(R) + \frac{\pi}{2\zeta(2)} R^2 \operatorname{arctg} x + O\left(R \log R\right), \tag{8}$$
где $L_x^*(R)$ – число решений системы (3), в которой
$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q,$$
$$0 < m < n, \quad m/n \leqslant x, \quad (m,n) = 1.$$

Если $x < 1$ или $n \geqslant 2$, то условие $m < n$ можно отбросить. В этом случае $L_x^*(R) = T_x^*(R)$ и утверждение леммы доказано. Если же $x = 1$ и $m = n = 1$, то при отбрасывании условия $m < n$ число решений системы (3) увеличивается. Таким образом
$$L_x^*(R) = T_x^*(R) - T_0, \tag{9}$$
где $T_0$ – число решений системы
$$\begin{cases} PQ' - P'Q = \pm 1, \\ P + P' = a, \\ Q + Q' = b, \\ a^2 + b^2 \leqslant R^2, \end{cases} \tag{10}$$
$$1 \leqslant Q \leqslant Q', \quad 1 \leqslant P' \leqslant Q', \quad 0 \leqslant P \leqslant Q.$$
Согласно замечанию к лемме 1, для каждой примитивной точки $(a, b)$ такой, что $1 \leqslant a < b$, система (10) будет иметь ровно одно решение. Следовательно, по лемме 2,
$$T_0 = \frac{\pi}{2\zeta(2)} R^2 \operatorname{arctg} 1 + O\left(R \log R\right). \tag{11}$$
Объединяя формулы (8), (9) и (11), приходим к утверждению леммы.

Для дальнейшего исследования величины $T_x^*(R)$ введем параметр $U$, лежащий в пределах $1 \leqslant U \leqslant R$. Через $T_1$ обозначим число решений системы (3) с ограничениями (4), которые удовлетворяют дополнительному условию $Q' \leqslant U$. Число решений, для которых $Q' > U$ обозначим через $T_2$. Тогда
$$T_x^*(R) = T_1 + T_2.$$
Каждую из величин $T_1$ и $T_2$ исследуем отдельно.

## 4. Вычисление величины $T_1$

**Лемма 4.** *Пусть $q \geqslant 1$ – натуральное, $Q_1$, $Q_2$, $P_1$, $P_2$ – вещественные и $0 \leqslant P_1, P_2 \leqslant q$. Тогда для величины*

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < u \leqslant Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leqslant Q_2 + P_2}} \delta_q(uv-1)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$\Phi_q(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} P_1 P_2 + O\left(\psi(q)\sqrt{q}\right),$$

*где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$.*

Доказательство см. в [1].

**Лемма 5.** *Пусть $q \geqslant 1$ – целое и функция $a(u,v)$ задана в целых точках $(u,v)$, где $1 \leqslant u, v \leqslant q$. Предположим также, что эта функция удовлетворяет неравенствам*

$$a(u,v) \geqslant 0, \quad \Delta_{1,0} a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{0,1} a(u,v) \leqslant 0, \quad \Delta_{1,1} a(u,v) \geqslant 0 \tag{12}$$

*во всех точках, где эти условия определены. Тогда для суммы*

$$W = \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1) a(u,v)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^{q} a(u,v) + O\left(A\psi(q)\sqrt{q}\right),$$

*где $\psi(q)$ – функция, определенная в Лемме 4, и $A = a(1,1)$ – наибольшее значение функции $a(u,v)$.*

**Доказательство.** Доопределим функцию $a(u,v)$ с помощью условий

$$a(u, q+1) = a(q+1, v) = 0 \qquad (1 \leqslant u, v \leqslant q+1).$$

Тогда из неравенств (12) следует, что $\Delta_{1,1} a(u,v) \geqslant 0$ для всех целых $u$ и $v$ в пределах $1 \leqslant u, v \leqslant q$.

Применим к сумме $W$ преобразование Абеля

$$\sum_{n=1}^{q} f(n)g(n) = g(q+1)\sum_{n=1}^{q} f(n) - \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{n=1}^{k} f(n)\right)(g(k+1)-g(k))$$

последовательно по переменным $u$ и $v$. Полагая сначала $f(u) = \delta_q(uv-1)$, $g(u) = a(u,v)$, а затем $f(v) = \sum\limits_{u=1}^{k}\delta_q(uv-1)$, $g(u) = \Delta_{1,0}a(u,v)$, находим

$$W = \sum_{k,l=1}^{q} \Delta_{1,1}a(k,l)\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\delta_q(uv-1).$$

Согласно лемме 4, для внутренней двойной суммы справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}\delta_q(uv-1) = \frac{\varphi(q)}{q^2}kl + O\left(\psi(q)\sqrt{q}\right).$$

Следовательно,

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{k,l=1}^{q}\Delta_{1,1}a(k,l)\,kl + O\left(\psi(q)\sqrt{q}\sum_{k,l=1}^{q}|\Delta_{1,1}a(k,l)|\right).$$

Так как всегда $|\Delta_{1,1}a(k,l)| = \Delta_{1,1}a(k,l)$, то

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{k,l=1}^{q}\Delta_{1,1}a(k,l)\sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{l}1 + O\left(A\psi(q)\sqrt{q}\right).$$

Делая суммирование по $u$ и $v$ внешним и суммируя по $k$ и $l$, приходим к утверждению леммы.

**Лемма 6.** *Пусть $q \geqslant 1$ – натуральное и $x \in [0;1]$. Тогда для суммы*

$$W_1(q) = \sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv-1)\left[\operatorname{arctg}\frac{u}{q} - \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q+vx)}\right)\right]$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$W_1(q) = \frac{\pi}{4}\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2} + O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right).$$

**Доказательство.** По теореме Лагранжа о конечном приращении проверяется, что функция

$$a(u,v)=\operatorname{arctg}\frac{u}{q}-\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}-\frac{x}{q(q+vx)}\right)$$

удовлетворяет условиям (12). Следовательно, по лемме 5

$$W_1(q)=\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u,v=1}^{q}\left[\operatorname{arctg}\frac{u}{q}-\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}-\frac{x}{q(q+vx)}\right)\right]+O\left(\frac{\psi(q)\sqrt{q}}{q^2}\right).$$

Снова применяя теорему Лагранжа, находим

$$\operatorname{arctg}\frac{u}{q}-\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}-\frac{x}{q(q+vx)}\right)=\frac{x}{q(q+vx)}\cdot\frac{1}{1+\frac{u^2}{q^2}}\left(1+O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right),$$

$$\frac{x}{q+vx}=\log(q+vx)-\log(q+(v-1)x)+O\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

$$\frac{1}{q\left(1+\frac{u^2}{q^2}\right)}=\operatorname{arctg}\frac{u}{q}-\operatorname{arctg}\frac{u-1}{q}+O\left(\frac{1}{q^2}\right),$$

Поэтому

$$W_1(q)=\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{u=1}^{q}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{q}-\operatorname{arctg}\frac{u-1}{q}\right)$$

$$\sum_{v=1}^{q}\left[\log(q+vx)-\log(q+(v-1)x)\right]$$

$$+O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right)=\frac{\pi}{4}\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2}+O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right).$$

**Следствие 1.** *При* $N\geqslant 1$ *для суммы*

$$W_2=\sum_{q\leqslant N}W_1(q)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$W_2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log N+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+f(x)+O\left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}}\right), \tag{13}$$

*где $f(x)$ – функция, задаваемая рядом*

$$f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left( W_1(q) - \frac{\pi}{4} \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} \right). \tag{14}$$

**Доказательство.** Пользуясь оценкой $\psi(q) \leqslant \sigma_0^2(q) \log^2(q+1)$ и преобразованием Абеля, получим

$$\sum_{q>N} \frac{\psi(q)}{q^{3/2}} = O\left( \frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{q \leqslant N} \left( W_1(q) - \frac{\pi}{4} \log(1+x) \frac{\varphi(q)}{q^2} \right) = f(x) + O\left( \frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}} \right),$$

$$W_2 = \frac{\pi}{4} \cdot \log(1+x) \sum_{q \leqslant N} \frac{\varphi(q)}{q^2} + f(x) + O\left( \frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}} \right). \tag{15}$$

Расписывая $\varphi(q)$ через функцию Мёбиуса, находим

$$\sum_{q \leqslant N} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \sum_{q \leqslant N} \frac{1}{q} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{q \leqslant N/d} \frac{1}{q}$$
$$= \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d^2} \left( \log N - \log d + \gamma + O\left( \frac{d}{N} \right) \right).$$

Поскольку

$$\sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left( \frac{1}{N} \right),$$
$$\sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d^2} \log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left( \frac{\log(N+1)}{N} \right),$$

то

$$\sum_{q \leqslant N} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left( \log N + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O\left( \frac{\log(N+1)}{N} \right).$$

Подставляя последнюю формулу в равенство (15), приходим к утверждению следствия.

**Замечание.** Аналогично для суммы

$$W_3(q)=\sum_{u,v=1}^{q}\delta_q(uv+1)\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q}+\frac{x}{q(q+vx)}\right)-\operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right]$$

проверяется асимптотическая формула

$$W_3(q)=\frac{\pi}{4}\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2}+O\left(\frac{\psi(q)}{q^{3/2}}\right),$$

и соответственно для суммы

$$W_4=\sum_{q\leqslant N}W_3(q)$$

при $N\geqslant 1$ получается представление

$$W_4=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(\log N+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+g(x)+O\left(\frac{\log^5(N+1)}{\sqrt{N}}\right), \tag{16}$$

где $g(x)$ – функция, задаваемая рядом

$$g(x)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(W_3(q)-\frac{\pi}{4}\log(1+x)\frac{\varphi(q)}{q^2}\right). \tag{17}$$

**Теорема 1.** *Пусть $1\leqslant U\leqslant R$. Тогда для величины $T_1$, равной числу решений системы* (3), (4) *с дополнительным ограничением $Q'\leqslant U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^2}{\zeta^2(2)}\left[\log(x+1)\left(\log U+\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+C_1(x)\right]$$
$$+O\left(R^2U^{-1/2}\log^5 R\right)+O\left(RU\log R\right),$$

*где*

$$C_1(x)=\frac{2}{\pi}\left(f(x)+g(x)-\operatorname{arctg}\frac{x}{2+3x}\right), \tag{18}$$

*а функции $f(x)$ и $g(x)$ определены равенствами* (14) и (17).

**Доказательство.** При фиксированных значениях параметров $P$, $P'$, $Q$ и $Q'$ число решений системы (3) относительно неизвестных $m$ и $n$ равно числу примитивных точек $(m,n)$ в области $\Omega=\Omega(P,P',Q,Q')$ задаваемой условиями

$$(mP+nP')^2+(mQ+nQ')^2\leqslant R^2,\quad 1\leqslant m\leqslant nx.$$

Эта область содержится внутри квадрата $0 < m, n \leqslant R/Q'$ и имеет кусочно-гладкую границу, длина которой есть $O(R/Q')$. По лемме 2 число таких точек равно

$$\frac{1}{\zeta(2)} V(\Omega) + O\left(\frac{R}{Q'} \log R\right).$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{PQ'-P'Q=\pm 1} V(\Omega) + O\left(RU \log R\right),$$

где суммирование ведется по наборам $(P, P', Q, Q')$, удовлетворяющим ограничениям (4) и условию $Q' \leqslant U$. Заменяя переменные $m$ и $n$ на исходные параметры $a$ и $b$

$$m = \pm(aQ' - bP'), \quad n = \pm(bP - aQ),$$

находим, что величина $V(\Omega)$ совпадает с площадью сектора

$$\frac{aQ' - bP'}{bP - aQ} \leqslant x, \quad \pm(aQ' - bP') > 0, \quad a^2 + b^2 \leqslant R^2$$

на плоскости $Oab$. Значит,

$$V(\Omega) = \pm \frac{R^2}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{P' + Px}{Q' + Qx} - \operatorname{arctg} \frac{P'}{Q'}\right),$$

где знак перед скобкой совпадает со знаком, стоящим в правой части равенства $PQ' - P'Q = \pm 1$. При фиксированном значении параметра $Q' = q$ переменные $P'$ и $Q$ должны удовлетворять сравнению $P'Q \pm 1 \equiv 0 \pmod q$. Если $P' = u$, $Q = v$ – решение такого сравнения, то значение параметра $P$ находится однозначно: $P = (uv \pm 1)/q$. Площадь сектора, в зависимости от выбора знака, будет равна

$$\frac{R^2}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{u}{q} - \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q + vx)}\right)\right]$$

или

$$\frac{R^2}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{u}{q} + \frac{x}{q(q + vx)}\right) - \operatorname{arctg} \frac{u}{q}\right].$$

Значение параметра $P$ будет попадать в нужные границы $0 \leqslant P \leqslant Q = v$ всегда за исключением случая, когда $q = u = v = 1$, $P = 2$. Следовательно,

$$T_1 = \frac{R^2}{2\zeta(2)} \sum_{q\leqslant U} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv-1) \left[\operatorname{arctg}\frac{u}{q} - \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} - \frac{x}{q(q+vx)}\right)\right]$$

$$+\frac{R^2}{2\zeta(2)} \sum_{q\leqslant U} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv+1) \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{q} + \frac{x}{q(q+vx)}\right) - \operatorname{arctg}\frac{u}{q}\right]$$

$$-\frac{R^2}{2\zeta(2)} \left[\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{arctg} 1\right] + O\left(RU\log R\right).$$

Подставляя сюда асимптотические формулы (13) и (16), для сумм $W_2$ и $W_4$ и замечая, что

$$\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{x}{2+3x},$$

получаем утверждение теоремы.

## 5. Вычисление величины $T_2$

**Лемма 7.** *Пусть $q \geqslant 1$ и $f(u)$ – неотрицательная, невозрастающая функция на отрезке $[0;q]$, причем $f(0) \leqslant q$. Тогда*

$$\sum_{u=1}^{q} \sum_{1\leqslant v\leqslant f(u)} \delta_q(uv\pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} V(\Omega) + O\left(q^{3/4}\sigma_0(q)\log(q+1)\right),$$

*где $\Omega$ – область на плоскости $Ouv$, задаваемая условиями $0 \leqslant u \leqslant q$, $0 \leqslant v \leqslant f(u)$.*

**Доказательство.** Разобьём отрезок суммирования по переменной $u$ на $k$ частей $(1 \leqslant k \leqslant q)$:

$$0 = u_0 < u \leqslant u_1, \ldots, u_{k-1} < u \leqslant u_k = q,$$

где $u_j = jq/k$. Положим

$$S = \sum_{j=1}^{k} S_j, \qquad S_j = \sum_{u_{j-1}<u\leqslant u_j} \sum_{1\leqslant v\leqslant f(u)} \delta_q(uv\pm 1).$$

Тогда, в силу монотонности функции $f(u)$,

$$\sum_{u_{j-1}<u\leqslant u_j}\sum_{1\leqslant v\leqslant f(u_j)}\delta_q(uv\pm 1)\leqslant S_j\leqslant\sum_{u_{j-1}<u\leqslant u_j}\sum_{1\leqslant v\leqslant f(u_{j-1})}\delta_q(uv\pm 1).$$

Применяя к суммам, стоящим в последней формуле лемму 4, получаем неравенства

$$\frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot\frac{q}{k}f(u_j)+O\left(\sqrt{q}\psi(q)\right)\leqslant S_j\leqslant\frac{\varphi(q)}{q^2}\cdot\frac{q}{k}f(u_{j-1})+O\left(\sqrt{q}\psi(q)\right). \quad (19)$$

Так как

$$\frac{q}{k}\sum_{j=1}^{k}f(u_j)=\int_0^q f(u)\,du+O\left(\frac{q}{k}f(0)\right),$$

$$\frac{q}{k}\sum_{j=0}^{k-1}f(u_j)=\int_0^q f(u)\,du+O\left(\frac{q}{k}f(0)\right),$$

и $f(0)\leqslant q$, то после суммирования по $j$ оценок (19), получим асимптотическую формулу

$$S=\frac{\varphi(q)}{q^2}\int_0^q f(u)\,du+O\left(\frac{q}{k}\right)+O\left(k\sqrt{q}\psi(q)\right).$$

Полагая

$$k=q^{1/4}(\sigma_0(q)\log(q+1))^{-1},$$

приходим к утверждению леммы.

**Лемма 8.** *Пусть $1\leqslant U<R$ и $R_1=R/U$. Тогда для величины $T_2$, равной числу решений системы (3), (4) с дополнительным ограничением $Q'>U$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_2=2\sum_{n<R_1}\sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx}\sum_{U<q\leqslant R}\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q)+O\left(R^2U^{-1/4}\log^2 R\right),$$

*где $V(m,n,q)$ – площадь области $\Omega(m,n,q)$ на плоскости $Ouv$, задаваемой условиями*

$$0\leqslant u,v\leqslant q,\quad\left(\frac{u^2}{q^2}+1\right)(mv+nq)^2\leqslant R^2.$$

**Доказательство.** Согласно определению величины $T_2$,

$$T_2 = \sum_{2\leqslant n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \sum_{u,v=1}^{q} \delta_q(uv\pm 1)$$
$$\left[\left(m\frac{uv\pm 1}{q}+nu\right)^2+(mv+nq)^2\leqslant R^2\right].$$

По лемме 7,

$$T_2 = \sum_{2\leqslant n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \left(\frac{\varphi(q)}{q^2}V_\pm(m,n,q)+O\left(q^{3/4}\sigma_0(q)\log q\right)\right),$$

где $V_\pm(m,n,q)$ – площадь области $\Omega_\pm(m,n,q)$ на плоскости $Ouv$, задаваемой условиями

$$0\leqslant u,v\leqslant q,\qquad \left(m\frac{uv\pm 1}{q}+nu\right)^2+(mv+nq)^2\leqslant R^2.$$

Так как

$$\Omega_+(m,n,q)\subset\Omega(m,n,q)\subset\Omega_-(m,n,q),$$

то при замене $V_\pm(m,n,q)$ на $V(m,n,q)$ возникнет погрешность, не превосходящая разности $V_-(m,n,q)-V_+(m,n,q)$. Но при фиксированном $u$ разность между величинами $v_-$ и $v_+$ такими, что

$$\left(m\frac{uv_\pm\pm 1}{q}+nu\right)^2+(mv_\pm+nq)^2=R^2$$

есть $O(u/q^2)$. Следовательно, $V_-(m,n,q)-V_+(m,n,q)=O(1)$ и

$$T_2 = 2\sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \left[\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q)+O\left(q^{3/4}\sigma_0(q)\log q\right)\right].$$

После суммирования остатка находим:

$$T_2 = 2\sum_{n<R_1} \sideset{}{^*}\sum_{m\leqslant nx} \sum_{U<q\leqslant R/n} \frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q)+O\left(R^2U^{-1/4}\log^2 R\right).$$

Остается заметить, что условие $q\leqslant R/n$ можно заменить более простым $q<R$, так как при $nq>R$ область $\Omega(m,n,q)$ пуста и $V(m,n,q)=0$.

**Лемма 9.** *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. *Тогда для суммы*

$$W_5 = \sum_{n<R_1} \sum_{m\leqslant nx}{}^{*} \sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m,n,q)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$W_5 = \frac{U^2}{\zeta(2)} \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi\, F^*(\xi)\, d\xi + O(R^2 U^{-1} \log R),$$

*где* $R_1(t) = R_1/\sqrt{t^2+1}$ *и*

$$F^*(\xi) = \sum_{n<\xi} \sum_{m\leqslant nx}{}^{*} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right)[\xi \geqslant m+n]$$
$$+ \sum_{n<\xi} \sum_{m\leqslant nx}{}^{*} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\xi}\right)[\xi < m+n].$$

**Доказательство.** Найдем сначала приближенное значение для суммы

$$\sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m,n,q).$$

Запишем величину $V(m,n,q)$ в виде интеграла

$$V(m,n,q) = \int\limits_0^q du \int\limits_0^q dv \left[\sqrt{u^2/q^2+1}(mv+nq) \leqslant R\right].$$

Вводя переменные $t = u/q$, $w = mv + nq$ и функцию $R(t) = R/\sqrt{t^2+1}$, находим

$$V(m,n,q) = \frac{q}{m} \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R(t)} dw \left[\frac{w}{m+n} < q \leqslant \frac{w}{n}\right].$$

Далее

$$\sum_{U<q\leqslant R} \frac{\varphi(q)}{q^2} V(m,n,q) = \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}} \frac{V(m,n,\delta q)}{q}.$$

Найдем внутреннюю сумму:

$$\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{V(m,n,\delta q)}{q}=\frac{\delta}{m}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R(t)}dw\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\left[\frac{w}{m+n}<q\leqslant\frac{w}{n}\right]$$

$$=\frac{\delta}{m}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R(t)}dw\left(\frac{w}{n\delta}-\max\left\{\frac{w}{(m+n)\delta},\frac{U}{\delta}\right\}+O(1)\right)[w\geqslant nU]$$

$$=\frac{1}{m}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R(t)}dw\left(\frac{w}{n}-\max\left\{\frac{w}{m+n},U\right\}\right)[w\geqslant nU]+O\left(\frac{\delta R}{m}\right).$$

Вводя переменную $\xi=w/U$

$$\sum_{\frac{U}{\delta}<q\leqslant\frac{R}{\delta}}\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q)$$

$$=\frac{U^2}{m}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R_1(t)}d\xi\left(\frac{\xi}{n}-\max\left\{\frac{\xi}{m+n},1\right\}\right)[\xi\geqslant n]+O\left(\frac{\delta R}{m}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{U<q\leqslant R}\frac{\varphi(q)}{q^2}V(m,n,q)$$

$$=\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R_1(t)}d\xi\left(\frac{\xi}{n}-\max\left\{\frac{\xi}{m+n},1\right\}\right)[\xi\geqslant n]+O\left(\frac{R}{m}\log R\right)$$

$$=\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R_1(t)}d\xi\left(\frac{\xi}{n}-\frac{\xi}{m+n}\right)[\xi\geqslant m+n]$$

$$+\frac{U^2}{m\zeta(2)}\int\limits_0^1 dt\int\limits_0^{R_1(t)}d\xi\left(\frac{\xi}{n}-1\right)[n\leqslant\xi\leqslant m+n]+O\left(\frac{R}{m}\log R\right).$$

Суммируя последнее равенство по $n$ и $m$ приходим к утверждению леммы.

**Следстви 2.** *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$ *и* $R_1(t) = R_1/\sqrt{t^2+1}$. *Тогда для величины* $T_2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$T_2 = 2\frac{U^2}{\zeta(2)} \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{R_1(t)} \xi\, F^*(\xi)\, d\xi + O(R^2 U^{-1/4} \log^2 R).$$

Доказательство вытекает из лемм 8 и 9.

**Лемма 10.** *При* $N > 1$ *для суммы*

$$F^*(N) = \sum_{n<N} \sideset{}{^*}\sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) - \sum_{n<N} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{m \leqslant nx \\ m+n>N}} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m+n}\right)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$F^*(N) = \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)} \log N + \frac{H(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(N+1)}{N}\right),$$

*где*

$$H(x) = \log(x+1)\left(\log x - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2}\log(x+1) + \gamma - 1\right) + h(x),$$

*и*

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{\frac{m}{x} \leqslant n < \frac{m}{x}+m} \frac{1}{n} - \log(x+1) \right). \tag{20}$$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала сумму $F(N)$, в которой отсутствует условие взаимной простоты чисел $m$ и $n$. Положим $F(N) = F_1(N) - F_2(N)$, где

$$F_1(N) = \sum_{n<N} \sum_{m \leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right),$$

$$F_2(N) = \sum_{n<N} \sum_{\substack{m \leqslant nx \\ m+n>N}} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{m+n}\right).$$

Используя введенную функцию $h(x)$, находим

$$F_1(N) = \sum_{m<xN} \frac{1}{m}\left( \sum_{\frac{m}{x} \leqslant n < \frac{m}{x}+m} \frac{1}{n} - \sum_{N \leqslant n < N+m} \frac{1}{n} \right)$$

$$= h(x) + \log(x+1)\sum_{m<xN}\frac{1}{m} - \sum_{m<xN}\frac{1}{m}\sum_{N\leqslant n<N+m}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= h(x) + (\log(x+1) + \log N)(\log xN + \gamma) - \sigma + O\left(\frac{\log(N+1)}{N}\right),$$

где

$$\sigma = \sum_{m<xN}\frac{\log(N+m)}{m}. \tag{21}$$

Величину $F_2(N)$ представим в виде $F_2(N) = F_3(N) - F_4(N)$, где

$$F_3(N) = \frac{1}{N}\sum_{n<N}\sum_{\substack{m\leqslant nx\\ m+n>N}}\frac{1}{m},$$

$$F_4(N) = \sum_{n<N}\sum_{\substack{m\leqslant nx\\ m+n>N}}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m+n}.$$

После перемены порядка суммирования в сумме $F_3(N)$ находим

$$F_3(N) = \frac{1}{N}\sum_{m\leqslant\frac{xN}{x+1}}\frac{1}{m}\sum_{N-m<n<N}1 + \frac{1}{N}\sum_{\frac{xN}{x+1}<m<xN}\frac{1}{m}\sum_{\frac{m}{x}\leqslant n<N}1$$

$$= \log(x+1) + O\left(\frac{\log(N+1)}{N}\right).$$

Аналогично,

$$F_4(N) = \sum_{m\leqslant\frac{xN}{x+1}}\frac{1}{m}\sum_{N-m<n<N}\frac{1}{m+n} + \sum_{\frac{xN}{x+1}<m<xN}\frac{1}{m}\sum_{\frac{m}{x}\leqslant n<N}\frac{1}{m+n}$$

$$= \sigma - \log N(\log xN + \gamma) - \frac{1}{2}\log^2(x+1) + O\left(\frac{\log(N+1)}{N}\right),$$

где величина $\sigma$ определена равенством (21). Значит,

$$F_2(N) = \log N(\log xN + \gamma) + \frac{\log^2(x+1)}{2}$$
$$+ \log(x+1) - \sigma + O\left(\frac{\log(N+1)}{N}\right),$$

$$F(N) = \log(x+1)\left(\log Nx - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right)$$
$$+h(x) + O\left(\frac{\log(N+1)}{N}\right).$$

По формуле обращения Мёбиуса

$$F^*(N) = \sum_{d<N} \frac{\mu(d)}{d^2} F(N/d)$$

$$= \frac{\log(x+1)}{\zeta(2)}\left(\log Nx - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(x+1)}{2} + \gamma - 1\right)$$
$$+\frac{h(x)}{\zeta(2)} + O\left(\frac{\log^2(N+1)}{N}\right).$$

**Лемма 11.** *Пусть* $X > 0$ *и* $X(t) = X/\sqrt{t^2+1}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{X(t)} \xi\, d\xi = \frac{\pi}{8} X^2,$$

$$\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{X(t)} \xi \log\xi\, d\xi = \frac{\pi}{8} X^2 \left(\log\frac{X}{2} + 2\frac{C}{\pi} - \frac{1}{2}\right),$$

$C$ – *константа Каталана, задаваемая равенствами* (1).

**Доказательство.** Обозначим через $I_1$, $I_2$ интегралы, фигурирующие в условии леммы.

В первом интеграле после замены переменной $y = \xi^2$ получаем

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{X^2(t)} dy = \frac{X^2}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{X^2}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_{t=0}^{1} = \frac{\pi}{8} X^2.$$

Для доказательства второго равенства найдём сначала значение интеграла

$$I_0 = \int\limits_0^1 \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt.$$

Рассмотрим главную ветвь логарифма $\log z$, для которой $|\arg z| < \pi$. Формула

$$\operatorname{Li}_2(z) = -\int\limits_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt$$

задаёт главную ветвь дилогарифма, определённую на всей комплексной плоскости за исключением луча $[1;+\infty)$. Для функции, стоящей в интеграле $I_0$, первообразную можно указать явно:

$$\int \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{2} [\log(t^2+1) \\ +2\log 2] + \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+it}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-it}{2}\right)\right].$$

Значит,

$$I_0 = \int\limits_0^1 \frac{\log(t^2+1)}{t^2+1} dt = \frac{3\pi}{8}\log 2 + \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+i}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\right].$$

Применяя тождество (см. [11])

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\operatorname{Li}_2(z) - \frac{1}{2}\log^2(1-z), \qquad z \notin [1;+\infty),$$

при $z = \frac{1\pm i}{2}$, находим

$$\frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+i}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\right] = \frac{i}{2}\left[\operatorname{Li}_2(i) - \operatorname{Li}_2(-i)\right] + \frac{\pi}{8}\log 2 \\ = -C + \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Следовательно,

$$I_0 = -C + \frac{\pi}{2}\log 2.$$

После замены $y = \xi^2$ во втором интеграле, получим

$$I_2 = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dt \int\limits_0^{X^2(t)} \log y \, dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 dt (y\log y - y)\Big|_{y=0}^{X^2(t)}$$

$$= \frac{X^2}{4}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1}\left(\log\frac{X^2}{t^2+1}-1\right) = \frac{\pi}{16}X^2(2\log X-1) - \frac{X^2}{4}I_0.$$

Подставляя в последнюю формулу значение интеграла $I_0$, приходим к нужному равенству.

**Теорема 2.** *Пусть* $1 \leqslant U \leqslant R$, $R_1 = R/U$. *Тогда для величины* $T_2$, *равной числу решений системы* (3) *с дополнительным ограничением* $Q' > U$, *справедлива асимптотическая формула*

$$T_2 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^2}{\zeta^2(2)}\left[\log(x+1)\log R_1 + C_2(x)\right] + O(R^2U^{-1/4}\log^2 R)$$
$$+O(RU^2\log^2 R),$$

*где*

$$C_2(x) = \log(x+1)\left(2\frac{C}{\pi} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \gamma - \frac{1}{2}\log(x+1) + \log\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) + h(x), \tag{22}$$

*а функция* $h(x)$ *определена равенством* (20).

Доказательство следует подстановкой результатов лемм 10–11 в следствие 2.

## 6. Основной результат

**Теорема 3.** *Пусть* $R \geqslant 2$. *Тогда для величины* $N_x(R)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi}R^2\left[\log(x+1)\log R + C(x)\right] + O(R^{17/9}\log^2 R),$$

*где*

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) + \log(x+1)\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \zeta(2)\operatorname{arctg} x(1-2[x=1]),$$

*а величины* $C_1(x)$ *и* $C_2(x)$ *определены равенствами* (18) *и* (22).

**Доказательство.** Из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$T_x^*(R) = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^2}{\zeta^2(2)}\left[\log(x+1)\log R + C_1(x) + C_2(x)\right]$$

$$+O(R^2U^{-1/2}\log^5 R)+O(R^2U^{-1/4}\log^2 R)+O(RU^2\log^2 R).$$

Выбирая $U=R^{4/9}$ и подставляя результат в формулу (5), получаем

$$N_x^*(R)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^2}{\zeta^2(2)}\left[\log(x+1)\log R+C_3(x)\right]+O(R^{17/9}\log^2 R),$$

где

$$C_3(x)=C_1(x)+C_2(x)+\zeta(2)\operatorname{arctg} x(1-2[x=1]).$$

Наконец, применяя равенство

$$N_x(R)=\sum_{d\leqslant R}N_x^*(R/d),$$

приходим к утверждению теоремы.

**Замечание.** Для константы $C(x)$ в итоге получается представление

$$C(x)=\log(x+1)\left(2\frac{C}{\pi}+\gamma-\frac{\log(x+1)}{2}+\log\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)$$
$$+h(x)+\frac{2}{\pi}\left(f(x)+g(x)-\operatorname{arctg}\frac{x}{2+3x}\right),$$

где функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены равенствами (14), (17), (20) и, по-видимому, не могут быть посчитаны явно.

## Литература


1. М. О. Авдеева, *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей.* — Функц. анализ и его прил. **38**, вып. 2 (2004), 1–11.
2. М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина.* — Владивосток, Дальнаука (2002) (препринт).
3. И. В. Арнольд, *Теория чисел.* — Госуд. учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФС (1939).
4. Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики.* — М., Мир (1998).
5. *Задачи Арнольда.* — М., Фазис (2000).
6. Д. Э. Кнут, *Искусство программирования.* Т. 2. *Получисленные алгоритмы.* — М., Санкт-Петербург, Киев, Вильямс (2000).
7. J. D. Dixon, *The Number of Steps in the Euclidean Algorithm.* – J. of Number Theory v. 2 (1970), 414–422.
8. G. H. Hardy, E. M. Write, *An Introduction to the Number Theory.* — Clarendon Press, Oxford (1979).

9. H. Heilbronn, *On the average length of a class of finite continued fractions.* — in Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB (1968), 89–96.
10. D. E. Knuth, *Evaluation of Porter's Constant.* — Comp. and Maths. with Appls. **2** (1976), 137–139.
11. L. Lewin, *Polylogaritms and associated functions.* — New York, Elsevier North Holland (1981).
12. J. W. Porter, *On a theorem of Heilbronn.* — Mathematika **22**, No. 1 (1975), 20–28.

Ustinov A. V. On the statistical properties of finite continued fractions.

The article is devoted to the statistical properties of continued fractions for the numbers $a/b$, for $a$ and $b$ in the sector $a, b \geqslant 1$, $a^2+b^2 \leqslant R^2$. Main result is asymptotic formula with two meaning terms for the value

$$N_x(R) = \sum_{\substack{a^2+b^2\leqslant R^2\\ a,b\in\mathbb{N}}} s_x(a/b),$$

where $s_x(a/b) = |\{j \in \{1, \dots, s\} : [0; t_j, \dots, t_s] \leqslant x\}|$ is Gaussian statistic for the fraction $a/b = [t_0; t_1, \dots, t_s]$.

МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра теории чисел

Поступило 2 марта 2005 г.

Хабаровское отделение Института
прикладной математики
Дальневосточного отделения РАН

*E-mail*: ustinov@mech.math.msu.su