Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

Б. З. Мороз

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Весной 1962 года Ю. В. Линник [1] (ср. [2, 3]) предложил мне заняться изучением свойств скалярных произведений L-рядов Гекке. Многие из моих работ так или иначе связаны с этой темой.

Определим скалярное произведение формальных рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \; g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

по формуле

$$(f * g)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s}.$$

Согласно [4], в 1950 году Ю. В. Линник ввёл в рассмотрение скалярное произведение

$$F(\vec{\chi},\, s) := (L(\chi_1,\, \cdot) * \cdots * L(\chi_r,\, \cdot))(s)$$

рядов Гекке

$$L(\chi_i,\, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(\chi_i, n) n^{-s}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

с гроссенхарактерами χ_i в полях алгебраических чисел k_i. Ряд Дирихле $F(\vec{\chi},\, s)$ сходится абсолютно при $\mathrm{Re}\, s > 1$, и возникает естественный вопрос о возможности аналитического продолжения функции

$$s \mapsto F(\vec{\chi},\, s) \tag{1}$$

в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s \leqslant 1$. В 1965 г. А. И. Виноградов [5] продолжил функцию (1) в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > 1/2$, а несколькими годами позже П. К. Й. Драксл [6] продолжил эту функцию в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > 0$. О. М. Фоменко [4] продолжил функцию (1) на всю комплексную плоскость при условии, что $r = [k_1 : \mathbb{Q}] = [k_2 : \mathbb{Q}] = 2$. В общем случае, как показал Н. Курокава [7–9], функция (1) не допускает аналитического продолжения в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s \leqslant 0$.

Как было замечено еще в 60-ые года [1–3, 5], аналитические свойства скалярного произведения Гекке (1) тесно связаны с вопросами распределения целых точек на норменных многообразиях [10]. Введенные в цитированной выше работе Драксла [6] L-функции позволяют изучать распределение целых точек на произвольных аффинных торических многообразиях [11–14], частным случаем которых являются норменные многообразия.

В п. 2 обсуждаются аналитические свойства скалярных произведений рядов Дирихле, в п. 3 рассматриваются L-функции Драксла, наконец, в п. 4 изучаются целые точки торических многообразий.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ – мультипликативная группа положительных вещественных чисел, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{N}$ – мультипликативная полугруппа положительных целых чисел и $\mathcal{P}$ – множество простых рациональных чисел. Число элементов множества S и степень конечного расширения полей $K \mid k$ обозначаются соответственно через $\operatorname{card} S$ и $[K : k]$. По определению, поле алгебраических чисел – это *конечное* расширение поля $\mathbb{Q}$. Как обычно, $N_{K/k}\mathfrak{A}$ и $N\mathfrak{A} = N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{A}$ обозначают соответственно норму *дробного* идеала $\mathfrak{A}$ поля K относительно подполя k и абсолютную норму этого идеала. Обозначим через

$$\mathfrak{M}_{lm} = \{c \mid c = (c_{ij}),\ c_{ij} \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

аддитивную группу целочисленных матриц из l строк и m столбцов, а через I_m – единичную $m \times m$-матрицу. Обозначим через $\mathfrak{I}(K)$ и $\mathcal{P}_K$ полугруппу (ненулевых) целых идеалов и множество простых идеалов поля алгебраических чисел K. Положим

$$b^+ := (|b| + b)/2,\ b^- := (|b| - b)/2$$

при $b \in \mathbb{Q}$. Обозначим через

$$S_1 := \{a \mid a \in \mathbb{C},\ |a| = 1\}$$

единичную окружность. В дальнейшем символ “1” используется для обозначения единичного элемента любой из встречающихся мультипливативных (полу)групп и часто опускается (например, мы пишем $z(a)$ вместо $1 \cdot z(a)$).

2. В цитированной выше работе [9] Курокава построил общую теорию скалярных произведений рядов Дирихле, разлагающихся в эйлерово произведение. Цель моей работы [15] – дать более простое доказательство теоремы об аналитическом продолжении и естественной границе скалярных произведений L-функций Вейля.

Группа Вейля $W(k)$ поля алгебраических чисел k определяется как проективный предел

$$W(k) = \varinjlim W(E|k)$$

групп Вейля $W(E|k)$ конечных нормальных расширений $E|k$ поля k, см., например, [16]. Группа Вейля $W(E|k)$ квази-компактна:

$$W(E|k) \cong \mathbb{R}_+ \times W_1(E|k),$$

где группа $W_1(E|k)$ определяется как некоторое расширение компактной группы $C_1(E)$ классов иделей единичного объема поля E с помощью (конечной) группы Галуа $G(E|k)$ нормального расширения $E|k$ и потому компактна. Всякое *непрерывное* конечномерное комплексное представление

$$\rho\colon W(k) \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$$

пропускается через $W(E|k)$ для некоторого конечного нормального расширения $E|k$; если при этом $\mathbb{R}_+ \subseteq \operatorname{Ker}\ \rho$, т.е. представление ρ пропускается через $W_1(E|k)$, то это представление называется нормализованным. Обозначим через $\mathrm{ch}(k)$ множество характеров конечно-мерных непрерывных комплексных нормализованных представлений. Рассмотрим скалярное произведение

$$F_W(\vec{\chi},\ s) := \sum_{\mathfrak{a}} b(\vec{\chi}, \mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s} \tag{2}$$

L-функций Вейля

$$L_W(\chi_i,\ s) = \sum_{\mathfrak{a}} a(\chi_i, \mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s},\ \chi_i \in \mathrm{ch}(k),\ 1 \leqslant i \leqslant r,$$

где

$$b(\vec{\chi}, \mathfrak{a}) := \prod_{i=1}^{r} a(\chi_i, \mathfrak{a})$$

и $\mathfrak{a}$ пробегает целые идеалы поля k. Ряды Дирихле $L_W(\chi_i,\ s)$ и $F_W(\vec{\chi},\ s)$ сходятся абсолютно при $\mathrm{Re}\, s > 1$. Как известно [17], функция

$$s \mapsto L_W(\chi,\ s),\ \chi \in \mathrm{ch}(k),$$

мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Ясно, что

$$F_W(\vec{\chi},\ s) = L_W(\chi_1,\ s)$$

при $r = 1$. Обозначим через $d_i := \chi_i(1)$ степень представления, отвечающего характеру χ_i. Если $d_i = 1$ при каком-нибудь i, то скалярное произведение $F_W(\vec{\chi},\ s)$ представляется в виде скалярного произведения меньшего числа L-функций Вейля. Поэтому, не нарушая общности, можно предположить, что

$$d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_r \geqslant 2 \quad \text{и} \quad r \geqslant 2. \tag{3}$$

Теорема 1. *Функция*

$$s \mapsto F_W(\vec{\chi},\ s) \tag{4}$$

мероморфно продолжается в полуплоскость

$$\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s > 0\}.$$

Если $r = d_1 = d_2 = 2$, то функция (4) *мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Если выполняется условие* (3) *и $r \geqslant 3$ или $d_r \geqslant 3$, то прямая $\mathrm{Re}\, s = 0$ является естественной границей функции* (4), *и эта функция не допускает аналитического продолжения в левую полуплоскость*

$$\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s \leqslant 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{W}$ класс скалярных произведений L-функций Вейля (2).

Рассмотрим скалярное произведение

$$F(\vec{\chi},\ s) := \sum_{\mathfrak{a}} c(\vec{\chi}, \mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s} \tag{5}$$

L-рядов Гекке

$$L(\chi_i,\ s) = \sum_{\mathfrak{A}_i} \chi_i(\mathfrak{A}_i) N\mathfrak{A}_i^{-s}$$

с гроссенхарактерами χ_i в полях алгебраических чисел k_i, где

$$k \subseteq k_i, \quad c_i(\mathfrak{a}) := \sum_{N_{k_i/k}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}} \chi_i(\mathfrak{A}_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

и

$$c(\vec{\chi}, \mathfrak{a}) := \prod_{i=1}^{r} c_i(\mathfrak{a}),$$

а $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{a}$ пробегают соответственно целые идеалы полей k_i и k. Положим $d_i = [k_i : k]$.

Теорема 2. *Функция*

$$s \mapsto F(\vec{\chi},\ s) \tag{6}$$

мероморфно продолжается в полуплоскость

$$\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0\}.$$

Если $r = d_1 = d_2 = 2$, то функция (6) мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Если выполняется условие (3) и $r \geqslant 3$ или $d_r \geqslant 3$, то прямая $\operatorname{Re} s = 0$ является естественной границей функции (6), и эта функция не допускает аналитического продолжения в левую полуплоскость

$$\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s \leqslant 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ класс скалярных произведений L-рядов Гекке (5). Легко видеть, что

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{W} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \neq \mathfrak{W}.$$

Теорема 2 является непосредственнм следствием теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 используется следующее предложение, представляющее независимывй интерес [18]. Зафиксируем элемент g группы $W(k)$, вещественное число λ в интервале $0 < \lambda < 1$ и *конечное* подмножество $\mathfrak{N}$ множества характеров $\operatorname{ch}(k)$. Рассмотрим множество простых идеалов

$$A(\mathfrak{N}, g, \lambda;\ X) := \\ \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_k,\ N\mathfrak{p} \leqslant X,\ |\chi(\sigma_\mathfrak{p}) - \chi(g)| \leqslant \lambda \quad \text{при} \quad \chi \in \mathfrak{N}\},$$

где $\sigma_\mathfrak{p}$ есть подмножество группы $W(k)$, отвечающее автоморфизму Фробениуса [16, 18], и $X \in R_+$. Обозначим через $\pi(\mathfrak{N}, g, \lambda;\ X)$ число элементов множества $A(\mathfrak{N}, g, \lambda;\ X)$.

Предложение 1. *Имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\pi(\mathfrak{N}, g, \lambda;\ X) = a(\mathfrak{N}, g, \lambda) \int\limits_2^X \frac{du}{\log u} + O(X \exp(-c_1 \sqrt{\log X}));$$

при этом

$$a(\mathfrak{N}, g, \lambda) \geqslant c_2 \lambda^{c_3}, \quad c_i > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Положительные константы c_i не зависят от X и λ (но могут зависеть от $\mathfrak{N}$ и g).

Предложение 1 обобщает теорему плотности Чеботарёва на группы Вейля.

В цитированной выше работе [15] приводится подробное доказательство теорем 1 и 2; в обзорной статье [19] читатель найдет набросок доказательства теорем 1 и 2 и детальное обсуждение различных результатов, тесно связанных с тематикой настоящей статьи.

Обозначим через

$$K := k_1 \bullet \cdots \bullet k_r$$

композит полей $k_1, \ldots, k_r$, и пусть $d := [K : k]$. Говорят, что поля $k_1, \ldots, k_r$ линейно разделены над k, если

$$d = \prod_{i=1}^{r} d_i.$$

Предложение 2. *Найдутся такие гроссенхарактеры ψ_j в полях E_j,*

$$E_j \subseteq K,\ 1 \leqslant j \leqslant \nu,$$

для которых функция

$$s \mapsto F(\vec{\chi},\ s)\Big(\prod_{j=1}^{\nu} L(\psi_j,\ s)\Big)^{-1}$$

регулярна при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ и ограничена в полуплоскости

$$\Big\{ s \mid s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \Big\}$$

при $\varepsilon > 0$. *Если поля* $k_1, \ldots, k_r$ *линейно разделены над* k, *то* $\nu = 1$, $E_1 = K$ *и*

$$\psi_1 = \prod_{i=1}^{r} \chi_i \circ N_{K/k_i}.$$

Идея доказательства предложения 2 восходит к цитированной выше работе Виноградова [5] (см. также [20, с. 124]).

3. Рассмотрим конечное нормальное расширение $K \mid k$ полей алгебраических чисел с группой Галуа $\mathfrak{G}$ и $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-модуль M. Предположим, что элементы u_j, $1 \leqslant j \leqslant l$, модуля M порождают $\mathfrak{G}$-инвариантную полугруппу

$$\sigma := \Big\{ \sum_{j=1}^{l} a_j u_j \mid a_j \in \mathbb{Z},\ a_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l \Big\},$$

что множество $\{u_j \mid 1 \leqslant j \leqslant l\}$ порождает абелеву группу M, и что это множество является единственной *минимальной* системой образующих полугруппы σ. Выберем $\mathbb{Z}$-базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ модуля M и положим

$$g\ e_i = \sum_{j=1}^{m} e_j\ r(g)_{ji}, \quad g \in \mathfrak{G}, \quad 1 \le i \le m; \quad u_j = \sum_{i=1}^{m} e_i\ c_{ij}, \quad 1 \le j \le l.$$

Ясно, что $r(g) \in \mathfrak{M}_{mm}$, $c \in \mathfrak{M}_{ml}$. Пусть

$$\mathfrak{C} := \{b \mid\ b \in \mathfrak{M}_{lm},\ c \cdot b = I_m\}, \quad \widetilde{r}(g,b) := b \cdot r(g) \cdot c, \quad g \in \mathfrak{G}, \quad b \in \mathfrak{C},$$

так что

$$g\ u_i = \sum_{j=1}^{l} u_j\ \widetilde{r}(g,b)_{ji}, \quad 1 \le i \le l,$$

при $b \in \mathfrak{C}$. Рассмотрим $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-модуль $\check{M}$, двойственный к M, и полугруппу

$$\check{\sigma} = \{v \mid v \in \check{M},\ (v \mid\ u) \ge 0 \ \text{ при } \ u \in \sigma\}.$$

Зафиксируем элемент

$$z := \Big(\sum_{g \in \mathfrak{G}} g\Big)\Big(\sum_{1 \le j \le l} u_j\Big)$$

в полугруппе σ и положим

$$\sigma(n) := \{v \mid v \in \check{\sigma},\ (v \mid z) = n\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\kappa := \min\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 1,\ \sigma(n) \neq \emptyset\}.$$

Рассмотрим следующую полугруппу

$$\mathfrak{I}(\sigma) := \Big\{\vec{\mathfrak{B}} \mid \vec{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l),\ \mathfrak{B}_j \in \mathfrak{I}(K),$$
$$g \cdot \mathfrak{B}_j = \prod_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}},\ 1 \leqslant j \leqslant l,\ g \in \mathfrak{G}\Big\}$$

последовательностей целых идеалов поля K (умножение в $\mathfrak{I}(\sigma)$ задается покомпонентно) и положим, по определению,

$$N\vec{\mathfrak{B}} := \prod_{i=1}^{l} N\mathfrak{B}_i \quad \text{при} \quad \vec{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{I}(\sigma).$$

Назовем элемент $\mathfrak{P}$ полугруппы $\mathfrak{I}(\sigma)$ простым элементом этой полугруппы, если $\mathfrak{P} \neq 1$ и

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{P} \Rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{P} \quad \text{при} \quad \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}(\sigma)\backslash\{1\}.$$

Отличный от единицы элемент полугруппы $\mathfrak{I}(\sigma)$ представляется в виде произведения простых элементов, возможно, неоднозначно; обозначим множество простых элементов полугруппы $\mathfrak{I}(\sigma)$ через $\mathcal{P}(\sigma)$. Гомоморфизм $\chi\colon \mathfrak{I}(\sigma) \to \mathbb{C}$ называется характером полугруппы $\mathfrak{I}(\sigma)$, если множество $\chi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{P}(\sigma)$ является конечным, $\chi(1) = 1$ и

$$|\chi(\mathfrak{A})| \in \{0,\ 1\} \quad \text{при} \quad \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}(\sigma).$$

Для любого характера χ полугруппы $\mathfrak{I}(\sigma)$ определена L-функция Дракслa

$$L_D(\chi,\ s) := \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(\sigma)} \chi(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s/\kappa}. \tag{7}$$

Ряд Дирихле (7) сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s > 1$ и разлагается в абсолютно сходящееся при $\operatorname{Re} s > 1$ эйлерово произведение; функция

$$s \mapsto L_D(\chi,\ s) \tag{8}$$

мероморфно продолжается в полуплоскость

$$\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > 0\},$$

см. [6, 11–14]. Обозначим $\mathbb{Z}$-ранг подмодуля $\mathfrak{G}$-инвариантов

$$M(\mathfrak{G}) := \bigl\{u \mid u \in M,\ gu = u,\ g \in \mathfrak{G}\bigr\}$$

модуля M через μ. Легко видеть, что

$$\mu = 0 \Rightarrow \mathfrak{I}(\sigma) = \{1\},$$

и потому функция $L_D(\chi,\ s) = 1$ (для любого s) при $\mu = 0$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс L-функций Дpaкcлa (8). Можно доказать, что

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \neq \mathfrak{D}.$$

Если

$$L_D(\chi,\ s) \in \mathfrak{H}$$

при каком-либо выборе расширения $K \mid k$, $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$-модуля M и полугруппы σ, то, как можно показать, $\mu = 1$ при этом выборе упомянутых параметров.

Предложение 2 вытекает из следующего более общего утверждения, доказанного в цитированных выше работах.

Предложение 3. *Найдутся такие гроссенхарактеры ψ_j в полях E_j,*

$$k \subseteq E_j \subseteq K,\ 1 \leqslant j \leqslant B,$$

для которых функция

$$s \mapsto L_D(\chi,\ s)\Bigl(\prod_{j=1}^{B} L(\psi_j,\ s)\Bigr)^{-1}$$

регулярна при $\operatorname{Re} s > \frac{\kappa}{\kappa+1}$ и ограничена в полуплоскости

$$\Bigl\{s \mid s \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s \geq \frac{\kappa}{\kappa+1} + \varepsilon\Bigr\}$$

при $\varepsilon > 0$.

Открытые проблемы.

1) Выяснить, при каких условиях функция Дpaкcлa (8) продолжима на всю комплексную плоскость.

2) Описать множество $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{D}$.

4. Пусть теперь $k=\mathbb{Q}$. Выберем базис $\{\omega_i^{(1)},\dots,\omega_i^{(d_i)}\}$ расширения $k_i\mid\mathbb{Q}$ и систему независимых переменных

$$x_i:=(x_i^{(1)},\dots,x_i^{(d_i)}),\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

Рассмотрим норменные формы

$$f_i(x_i)=N_{k_i(x_i)/\mathbb{Q}(x_i)}\Big(\sum_{j=1}^{d_i}x_i^{(j)}\omega_i^{(j)}\Big)N_{k_i/\mathbb{Q}}\mathfrak{A}_i^{-1},$$

где $\mathfrak{A}_i:=(\omega_i^{(1)},\dots,\omega_i^{(d_i)})$ есть (дробный) идеал поля k_i, порожденный элементами $\omega_i^{(j)}$, $1\leqslant j\leqslant d_i$. Ясно, что $f_i(x_i)\in\mathbb{Z}[x_i]$, $1\leqslant i\leqslant r$. Обозначим, для краткости, всю систему независимых переменных

$$\{x_i^{(j)}\mid 1\leqslant j\leqslant d_i,\ 1\leqslant i\leqslant r\}$$

через x. Рассмотрим идеал

$$I:=(f_1(x_1)-f_2(x_2),\dots,f_1(x_1)-f_r(x_r))$$

кольца $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Z}$-схему $V:=\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x]/I)$. Положим

$$Y_t:=\{a\mid a=(a_1,\ \dots,\ a_r),\ a_i\in\mathbb{R}^{d_i},\ |f_i(a_i)|=t\ \ \text{при}\ \ 1\leqslant i\leqslant r\},$$

где $t\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$. Ясно, что

$$V(\mathbb{R})\subseteq\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}Y_t\cup Y_0.$$

Пусть $U_1\subseteq Y_1$. Рассмотрим отображение

$$\tau_t\colon Y_1\to Y_t,\ (a_1,\ \dots,\ a_r)\mapsto(t^{1/d_1}a_1,\ \dots,\ t^{1/d_r}a_r)$$

и положим

$$U(X):=\bigcup_{1\leqslant t\leqslant X}\tau_tU_1.$$

Предложение 2 позволяет доказать следующую теорему о распределении целых точек схемы V, см. [10–13].

Теорема 3. *Предположим, что поля $k_1,\dots,k_r$ линейно разделены над $\mathbb{Q}$ и множество U_1 является "достаточно хорошим" подмножеством множества Y_1. Тогда*

$$\operatorname{card}(U(X)\cap V(\mathbb{Z}))=c\,X\,\nu(U_1)+O(X^{1-\gamma})\quad \textit{при}\quad X\to\infty,$$

где $c \geq 0$, $\gamma > 0$, а ν – некоторая естественно определенная мера на Y_1; при этом, если $V(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$, то $c > 0$.

Рассмотрим конечное нормальное расширение $K \mid \mathbb{Q}$ степени $n := [K : \mathbb{Q}]$ и последовательность $\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_l)$ *дробных* идеалов поля K, удовлетворяющую следующему условию:

$$g \cdot \mathfrak{B}_j = \prod_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \quad g \in \mathfrak{G}, \quad b \in \mathfrak{C}, \tag{9}$$

в обозначениях п. 3. Зафиксируем $\mathbb{Z}$-базис $\{\omega_{1j}, \dots, \omega_{nj}\}$ идеала $\mathfrak{B}_j$ и $\mathbb{Z}$-базис $\{\omega_1^{(j,b,g)}, \dots, \omega_n^{(j,b,g)}\}$ идеала

$$\prod_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}^{+}} \quad \Big(= g\mathfrak{B}_j \prod_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}^{-}} \Big), \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \quad b \in \mathfrak{C}, \quad g \in \mathfrak{G}.$$

Рассмотрим множество многочленов

$$\mathcal{R}(\mathfrak{B}) := \Big\{ R_h^{(j,b,g)}(y) \mid 1 \leq h \leq n,\ 1 \leqslant j \leqslant l,\ b \in \mathfrak{C},\ g \in \mathfrak{G} \Big\},$$

определяемых следующими условиями:

$$gz_j \prod_{i=1}^{l} z_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}^{-}} - \prod_{i=1}^{l} z_i^{\widetilde{r}(g,b)_{ij}^{+}} = \sum_{h=1}^{n} R_h^{(j,b,g)}(y)\, \omega_h^{(j,b,g)},\ R_h^{(j,b,g)}(y) \in \mathbb{Z}[y]$$

при всех j в интервале $1 \leqslant j \leqslant l$, любых b из $\mathfrak{C}$ и любых g из $\mathfrak{G}$, где

$$gz_j := y_1^{(j)} g\omega_{1j} + \dots + y_n^{(j)} g\omega_{nj}, \quad 1 \leq j \leq l, \quad g \in \mathfrak{G},$$

и вся система независимых переменных

$$\{y_i^{(j)} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant l\}$$

обозначена через y; ввиду соотношения (9), многочлены $R_h^{(j,b,g)}(y)$ корректно определены. Обозначим через J идеал кольца $\mathbb{Z}[y]$, порожденный множеством $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$, и назовем $\mathbb{Z}$-схему

$$\mathfrak{V} := \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[x]J)$$

аффинным *торическим многообразием*, ср. [21, 22]. Можно показать, что определенная выше $\mathbb{Z}$-схема V является аффинным торическим многообразием, см. [6, 10–14]. Для любого коммутативного кольца A положим, по определению,

$$gz_j(a) := a_1^{(j)} g\omega_{1j} + \dots + a_n^{(j)} g\omega_{nj}, \quad a_i^{(j)} \in A,$$

$$1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leq j \leq l, \quad g \in \mathfrak{G}.$$

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ открытую подсхему схемы $\mathfrak{V}$, определяемую следующим условием:

$$\mathfrak{Y}(A) = \Big\{a \mid a \in \mathfrak{V}(A),\ \prod_{j=1}^{l} z_j(a) \neq 0\Big\}$$

для любого коммутативного кольца A. Можно доказать, что топологическая группа $\mathfrak{Y}(\mathbb{R})$ изоморфна произведению

$$\mathbb{R}_+^{m_1} \times S_1^{m_2} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{m_1},$$

в котором $m_1 \geqslant \mu$ и $m_1 + m_2 = m$. Обозначим этот изоморфизм через

$$\xi : \mathfrak{Y}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^{m_1} \times S_1^{m_2} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{m_1}$$

и предположим, что

$$\xi_i(a) \in \mathbb{R}_+ \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m_1 \text{ и } \xi_i(a) \in S_1 \text{ при } m_1 < i \leqslant m,$$
$$\xi_i(a) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ при } i > m$$

для любого элемента a множества $\mathfrak{Y}(\mathbb{R})$. Пусть $a \in \mathfrak{Y}(\mathbb{R})$; положим

$$N(a) := \prod_{j=1}^{l} \prod_{g \in \mathfrak{G}} g z_j(a),$$
$$|a| := \max\Big\{N(a)^{1/\kappa}, \xi_i(a),\ \xi_i(a)^{-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant m_1\Big\}$$

и рассмотрим множество

$$\mathfrak{U}(X) = \{a \mid a \in \mathfrak{Y}(\mathbb{R}),\ |a| < X\}, \quad X \in R_+.$$

Зафиксируем пару

$$f = (f_0, f_1):\ f_0 \in \mathbb{N},\ f_0 = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p},\ \alpha_p \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ f_1 \subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{m_1}.$$

Будем говорить, что $a = 1(\operatorname{mod} f)$, если

$$a \in \mathfrak{Y}(\mathbb{Z}),\ (\xi_{m+1}(a), \ldots, \xi_{m+m_1}(a)) \in f_1$$

и

$$z_j(a) = 1(\operatorname{mod} \mathfrak{p}^{\alpha_p}) \text{ при } \mathfrak{p}|p, \quad \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K, \quad p \in \mathcal{P}, \quad 1 \leq j \leq l;$$

положим
$$Z_f = \{a \mid a \in \mathfrak{Y}(\mathbb{Z}),\ a = 1 (\mathrm{mod}\, f)\}.$$

Предложение 3 позволяет доказать следующую теорему о числе целых точек схемы $\mathfrak{Y}$ ограниченной высоты [14].

Теорема 4. *Предположим, что $\mu \geq 1$. Тогда*
$$\mathrm{card}\,(\mathfrak{U}(X) \cap Z_f) = c\, X\, (\log X)^{\beta}(1 + O(1/\log X)) \quad \text{при} \quad X \to \infty,$$
где $c \geq 0$, $\beta \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \beta < B + m_1 - \mu$; при этом, если $Z_f \neq \emptyset$, то $c > 0$.

Теорема 3, разумеется, не является частным случаем теоремы 4.

В общем случае вопрос о распределении целых точек на аффинном торическом многообразии $\mathfrak{V}$ недостаточно изучен. Как было отмечено в [14], развитая в работе [10] (и в моих более ранних работах на эту тему) техника позволяет доказать аналог теоремы 3 для многообразий $\mathfrak{V}$ при определенных ограничениях на эту $\mathbb{Z}$-схему, потребовав, в частности, выполнения условия: $B = \mu = 1$.

В заключение я пользуюсь случаем выразить благодарность Математическому институту имени Макса Планка за многолетнее гостеприимство и финансовую поддержку.

Литература

1. Ю. В. Линник, *Частное сообщение.* Март 1962 г.
2. Б. З. Мороз, *Аналитическое продолжение скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей и его применение.* — ДАН СССР, Сер. мат. **150** (1963), 752–754.
3. Б. З. Мороз, *О продолжимости скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей.* — ДАН СССР, Сер. мат. **155** (1964), 1265–1267.
4. О. М. Фоменко, *Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения рядов Гекке двух квадратичных полей.* — Тр. МИАН СССР **128** (1972), 232–241.
5. А. И. Виноградов. *О продолжимости в левую полуплоскость скалярного произведения L-рядов Гекке с характерами величины.* — Изв. АН СССР **29** (1965), 485–492.
6. P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori.* — J. Number Theory **3** (1971), 444–467.
7. N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products.* — Proceedings Japan Academy **54A** (1978), 163–166.

8. N. Kurokawa, *On Linnik's problem.* — Proceedings Japan Academy **54A** (1978), 167–169.
9. N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products.* I, II. — Proceedings London Math. Soc. **53** (1986), 1–47, 209–236.
10. B. Z. Moroz, *On the distribution of integral points on an algebraic torus defined by a system of norm-form equations.* — Quart. J. Math. (2), **45** (1994), 243–253.
11. B. Z. Moroz, *Exercises in analytic arithmetic on an algebraic torus.* — in: Israel Mathematical Conferences Proceedings (F. Hirzebruch Festband) **9** (1996), pp. 347–359.
12. B. Z. Moroz, *On the integer points of some toric varieties.* — Quart. J. Math. (2), **48** (1997), 67–82.
13. B. Z. Moroz, *On the distribution of integer points in the real locus of an affine toric variety.* — Lect. Notes Series London Math. Soc. **237** (1997), 283–291.
14. B. Z. Moroz, *On the integer points of an affine toric variety (general case).* — Quart. J. Math. (2), **50** (1999), 37–47.
15. B. Z. Moroz, *On a class of Dirichlet series associated to the ring of representations of a Weil group.* — Proceedings London Math. Soc. **56** (1988), 209–228.
16. Дж. Тэйт, *Теоретико-числовое введение.* — Автоморфные формы, представления и L-функции, Мир, М. (1984), сс. 73–112.
17. A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes.* — J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 1–35.
18. B. Z. Moroz, *Equidistribution of Frobenius classes and the volumes of tubes.* — Acta Arithmetica **51** (1988), 269–276.
19. B. Z. Moroz, *Scalar product of Hecke L-functions and its application.* — Adv. Stud. Pure Math. **21** (1992), 153–171.
20. B. Z. Moroz, *Analytic arithmetic in algebraic number fields.* — Lect. Notes Math. **1205**, Springer-Verlag (1986).
21. Б. Э. Кунявский, Б. З. Мороз, *О целых моделях аффинных торических многообразий.* — Тр. С.-Петербургского математического общества **7** (1999), 116–123.
22. Б. Э. Кунявский, Б. З. Мороз, *О целых моделях алгебраических торов и аффинных торических многообразий.* В печати.

Moroz B. Z. Scalar product of Dirichlet series and the distribution of integer points on toric varieties.

We study the scalar product of Hecke series “mit Größencharakteren”, introduced by Yu. V. Linnik, and its generalizations. The analytic properties of the functions under consideration are closely related to the distribution of integer points on toric varieties.

Max-Planck-Institut für Mathematik,
Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, GERMANY
E-mail: moroz@mpim-bonn.mpg.de

Поступило 5 марта 2005 г.