Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

А. И. Виноградов

ОБОБЩЕННЫЙ КВАДРАТ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Введение

В работе [1], а) было получено спектральное разложение для квадрата дзета-функции Римана $\zeta^2(s)$. Здесь мы перенесем его на случай произведения двух дзета-функций с разными аргументами:

$$\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2). \tag{0.1}$$

Для удобства читателя мы снова повторим начальные шаги работы [1], а). Наиболее важным шагом работы [1], а) является транзитивное равенство (1.1), [1], а), которое переводит $\zeta^2(s)$ в двойную сумму по вычетам $(\operatorname{mod} c)$ с выделением сарвнения $a \cdot d \equiv m (\operatorname{mod} c)$ и произведением двух сдвинутых дзета-функций. Такой переход обеспечивает классическая функиция числа делителей:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{n=d_1 \cdot d_2} 1. \tag{0.2}$$

Она входит в центральную часть транзитивного равенства (1.1), [1], а). В дальнейшем, после переворота сдвинутых дзета-функций по функциональному уравнению, двойная сумма по вычетам $(\operatorname{mod} c)$ порождает обобщенные суммы Клоостермана.

Для того, чтобы получить аналог равенства (1.1), [1], а) для произведения (0.1) этой работы надо воспользоваться обобщенной функцией числа делителей:

$$\tau_w(n) = n^{(w-\frac{1}{2})} \cdot \sum_{d|n} d^{(1-2w)} = \sum_{n=d_1 \cdot d_2} d_1^{(w-\frac{1}{2})} \cdot d_2^{(\frac{1}{2}-w)}. \tag{0.3}$$

Обобщенная функция числа делителей (0.3) имеет произвольный аналитический параметр w. В частности, при $w = \frac{1}{2}$ получается классический случай (0.2).

Произведение (0.1) на языке функции (0.3) принимает вид:

$$\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_{w_1}(n)}{n^{w_2}}, \tag{0.4}$$

где

$$w_1=\frac{1}{2}(s_2-s_1+1), \quad w_2=\frac{1}{2}(s_1+s_2).$$

Обратная к ней система имеет вид:

$$s_1=\Big(w_2-w_1+\frac{1}{2}\Big), \quad s_2=\Big(w_2+w_1-\frac{1}{2}\Big).$$

Исходная система параметров подбирается так, чтобы в этой системе и в новой – (w_1,w_2) все ряды были абсолютно сходящимися. На языке правой части (0.4) транзитивное равенство (1.1) [1], a) принимает вид:

$$\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_{w_1}(n)}{n^{w_2}}=\sum_{m=1}^{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{w_1}(m+c\cdot k)}{(m+c\cdot k)^{w_2}}=$$
$$=\frac{1}{c^{s_1+s_2}}\cdot\sum_{m=1}^{c}\sum_{\substack{a,d=1\\ a\cdot d\equiv m(\bmod c)}}^{c}\zeta\Big(s_1,\frac{a}{c}\Big)\cdot\zeta\Big(s_2,\frac{d}{c}\Big), \tag{0.5}$$

где $\zeta(s,\alpha)$ – сдвинутая дзета-функция:

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^s}, \quad \alpha>0, \quad \operatorname{Re}s>1. \tag{0.5^a}$$

Правая часть транзитивного равенства (0.5) станет такой же, как в (1.1) [1], a), если положить $s_1=s_2=s$, а m-малое в сравнении

$$a\cdot d\equiv m(\bmod c) \tag{0.6}$$

заменить на $\mathcal{M}$-большое. Ясно, что сравнение (0.6) является аналогом такого же сравнения в (1.1) из [1], a).

В работе [1], a) автор не привел доказательства того факта, что сравнение (0.6) действительно следует из наличия функции числа делителей $\tau(n)$ в транзитивном равенстве (1.1) из [1], a), полагая этот факт очевидным. Здесь мы приведем это доказательство для того, чтобы стало ясно, что при переходе к обобщенной функции числа дклителей (0.3) сравнение (0.6) сохраняется.

Для этого введем разрывной символ для сравнения по $(\operatorname{mod} c)$:

$$\delta_c(n-m) = \begin{cases} 1, & n \equiv m(\operatorname{mod} c) \\ 0, & n \not\equiv m(\operatorname{mod} c) \end{cases}. \tag{0.7}$$

Тогда для внутреннего ряда центральной части транзитивного равенства (0.5), при фиксированном $m \in [1, c]$ справедливо представление:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{w_1}(m + c \cdot k)}{(m + c \cdot k)^{w_2}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\tau_{w_1}(n)}{n^{w_2}} \delta_c(n-m). \tag{0.8}$$

Подставляя в (0.8) последнюю часть транзитивного равенства (0.3) с учетом зависимости между параметрами (w_1, w_2) и (s_1, s_2), получаем представление правой части (0.8) в новом виде:

$$\sum_{d_1=1}^{\infty} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\delta_c(d_1 \cdot d_2 - m)}{d_1^{s_1} \cdot d_2^{s_2}}. \tag{0.9}$$

Разбивая ряд по $d_1 \geqslant 1$ в (0.9) на прогрессии вида $d_1 = a + c \cdot k_1$, $k_1 \geqslant 0$, и соответственно по $d_2 \geqslant 1$ – на прогрессии вида $d_2 = d + c \cdot k_2$, $k_2 \geqslant 0$, где a и d – вычеты из интервала $[1, c]$, приведем (0.9) к виду:

$$\frac{1}{c^{s_1+s_2}} \cdot \sum_{a,d=1}^{c} \delta_c(a \cdot d - m) \cdot \zeta\left(s_1, \frac{a}{c}\right) \cdot \zeta\left(s_2, \frac{d}{c}\right), \tag{0.10}$$

Вспоминая явный вид символа $\delta_c(a \cdot d - m)$, получаем правую часть транзитивного равенства (0.5) при фиксированном $m \in [1, c]$. Суммируя ее по всем вычетам $m(\operatorname{mod} c)$, получаем всю правую часть равенства (0.5).

Сейчас хорошо известно [2], что сдвинутые дзета-функции правой части (0.5) аналитически продолжимы в левую полуплоскость как целые функции с единственным простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом 1. Поэтому равенство (0.5) справедливо и в двойной левой полуплоскости $\operatorname{Re} s_1 \leqslant 1$, $\operatorname{Re} s_2 \leqslant 1$ с функциональным уравнением для каждой сдвинутой дзета-функции правой части (0.5):

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \Bigg[&\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\alpha n}{n^{1-s}} \right) \sin \frac{\pi s}{2} + \\ &+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\alpha n}{n^{1-s}} \right) \cos \frac{\pi s}{2} \Bigg], \end{aligned} \tag{0.11}$$

где $s = s_1, s_2$, $\alpha = \alpha_1, \alpha_2 \to \frac{a}{c}, \frac{d}{c}$.

Подробности можно найти в [2, гл. II, §17].

Кроме того, функциональное уравнение (0.11) можно переписать в новом виде, заменив тригонометрические функции мнимыми экспонентами по формулам Эйлера. В результате равенство (0.11) примет вид:

$$\zeta(s,\alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\Big[\zeta^*(1-s,\alpha)\cdot e^{\frac{\pi}{2}is} - \zeta^*(1-s,-\alpha)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}is}\Big], \quad (0.12)$$

где

$$\zeta^*(w,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^w}\cdot e^{2\pi i\alpha n}, \qquad \operatorname{Re} w > 1. \quad (0.13)$$

Отметим, что для ряда Дирихле (0.13) можно получить укороченно функциональное уравнение на пути работы [3] и тем самым продолжить его на всю w-плоскость. Но чтобы не прерывать основную нить рассуждений, мы это сделаем в конце работы в техническом приложении. Пока же переведем правую часть равенства (0.5) на язык сумм Клоостермана.

§1. Суммы Клоостермана

Подставляя (0.12) в (0.5) получаем новое представление ядра двойной суммы правой части

$$\zeta(s_1,\alpha_1)\cdot\zeta(s_2,\alpha_2) = \Gamma(s_1,s_2)\cdot\Big[\zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,\alpha_2)\cdot e^{\frac{\pi}{2}i(s_1+s_2)} +$$

$$\zeta^*(1-s_1,-\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,-\alpha_2)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i(s_1+s_2)} - \zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\cdot\zeta^*(1-s_2,-\alpha_2)\cdot$$

$$\cdot e^{\frac{\pi}{2}i(s_1-s_2)} - \zeta^*(1-s_1,-\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,+\alpha_2)\cdot ce^{-\frac{\pi}{2}i(s_1-s_2)}\Big], \quad (1.1)$$

где

$$\Gamma(s_1,s_2) = \frac{\Gamma(1-s_1)\cdot\Gamma(1-s_2)}{(2i)^2\cdot(2\pi)^{2-s_1-s_2}},$$

параметры α_1 и α_2 определены в (0.5):

$$\alpha_1 = \frac{a}{c}, \quad \alpha_2 = \frac{d}{c}; \quad a\cdot d \equiv m(\operatorname{mod} c); \quad a,d,m \in [1,c]. \quad (1.2)$$

Из определения параметров α_1 и α_2 в (1.2) легко видеть, что среднее по ним для произведения ζ^*-функций вида

$$\zeta^*(1-s_1,\alpha_1(\cdot\zeta^*)(1-s_2,\alpha_2) \quad (1.3)$$

сводится к суммированию сумм Клоостермана модуля c по ее параметрам:

$$\sum_{m=1}^{c} \sum_{a\cdot d\equiv m(\mathrm{mod}\, c)} \zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,\alpha_2) = \sum_{m=1}^{c} \zeta_m(c), \quad (1.4)$$

где

$$\zeta_m(c) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{S_c(n_1,n_2;m)}{n_1^{1-s_1}\cdot n_2^{1-s_2}}; \quad (1.5)$$

$S_c(n_1,n_2;m)$ – сумма Клоостерамна обобщенного вида из работы [4]:

$$S_c(n_1,n_2;m) = \sum_{a\cdot d\equiv m(\mathrm{mod}\, c)} \exp\left(2\pi i\frac{a\cdot n_1 + d\cdot n_2}{c}\right). \quad (1.5)^a$$

Из равенства $(1.5)^a$ видно, что одновременная смена знака у параметров a и d не меняет суммы Клоостермана $(1.5)^a$. Поэтому справедливо равенство:

$$S_c(-n_1,-n_2;m) = S_c(n_1,n_2;m). \quad (1.6)$$

Следовательно, среднее для произведения

$$\zeta^*(1-s_1,-\alpha_1)(\cdot\zeta^*(1-s_2,-\alpha_2) \quad (1.7)$$

совпадает с этим средним для (1.3). Отсюда следует, что среднее (1.4) для двух первых слагаемых в скобке правой части (1.1) равно величине:

$$2\cos\frac{\pi}{2}(s_1+s_2)\sum_{m=1}^{c}\zeta_m(c), \quad (1.8)$$

где $\zeta_m(c)$ – двойной ряд (1.5).

Совершенно аналогично получаем среднее (1.4) для произведения (1.3) с разными знаками из параметров α_1 и α_2:

$$\sum_{m=1}^{c} \sum_{a\cdot d\equiv m(\mathrm{mod}\, c)} \zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,-\alpha_2) = \sum_{m=1}^{c} \zeta_{-m}(c), \quad (1.9)$$

где

$$\zeta_{-m}(c) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{S_c(n_1,-n_2;m)}{n_1^{1-s_1}\cdot n_2^{1-s_2}}. \quad (1.10)$$

Заменяя вычеты a и d на $(c-a)$ и $c-d)$, мы, с одной стороны, не меняем сумму Клоостермана $S_c(n_1,-n_2;m)$, а, с другой – получаем сумму $S_c(-n_1,n_2;m)$. Поэтому справедливо равенство:

$$S_c(-n_1,n_2;m)=S_c(n_1,-n_2;m). \tag{1.11}$$

Оно позволяет доказать идентичность среднего (1.9) с аналогичным средним для произведения ζ^*-функций с противоположной комбинацией знаков у параметров α_1 и α_2: $\to(-\alpha_1,\alpha_2$. Поэтому третье и четвертое слагаемые в скобке правой части (1.1) можно объединить в одно слагаемое вида:

$$-2\cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2)\sum_{m=1}^{c}\zeta_{-m}(c). \tag{1.12}$$

Нам осталось только заметить, что равенство (1.11) продолжается до транзитивного равенства:

$$S_c(-n_1,n_2;m)=S_c(n_1,-n_2;m)=S_c(n_1,n_2;-m). \tag{1.13}$$

Это равенство оправдывает формальный отрицательный знак у индекса m в символе двойного ряда $\zeta_{-m}(c)$ из (1.10) и у аналогичного двойного ряда с противоположной парой знаков у параметров n_1 и n_2 в сумме Клоостермана. Все это вместе приводит к результату (1.12) с единой суммой Клоостермана (1.13) $S_c(n_1,n_2;-m)$ для обоих случаев. Тем самым мы преобразовали среднее для равенства (1.1) к новому виду:

$$\sum_{m=1}^{c}\sum_{a\cdot d\equiv m(\mathrm{mod}\, c)}\zeta(s_1,\alpha_1)\cdot\zeta(s_2,\alpha_2)= \tag{1.14}$$

$$=\Gamma(s_1,s_2)\Big[\cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2)\Big(\sum_{m=1}^{c}\zeta_{-m}(c)\Big)-\cos\frac{\pi}{2}(s_1+s_2)\Big(\sum_{m=1}^{c}\zeta_m(c)\Big)\Big].$$

Напомним, что множитель $\Gamma(s_1,s_2)$ определен в равенстве (1.1).

Для завершения этих преобразований нам осталось вспомнить, что левая часть (1.14) равна правой части (0.5) с нормировочным множителем $c^{-s_1-s_2}$. Поэтому равенство (1.14) в окончательном виде таково:

$$\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2)=\Big(\frac{2\pi}{c}\Big)^{s_1+s_2}\frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)}{2(2\pi)^2}[\cdots], \tag{1.15}$$

где квадратная скобка в правой части (1.15) та же самая, что и в правой части (1.14).

§2. Первое усреднение

Для того, чтобы перевести представление (1.15) на спектральный язык, нам необходимо усреднить его по параметру $c \geqslant 1$. Кроме того, со спектральной точки зрения нам мешает зависимость предела суммирования по $m \leqslant c$ от параметра c, по которому мы должны усреднять. Поэтому сначала мы избавимся от ограничения $m \leqslant c$ в правой части (1.14) и (1.15). Для этого рассмотрим новую сумму:

$$V(N,c) = \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \zeta_{\mathcal{M}}(c) \exp\Big(\frac{-\mathcal{M}}{N}\Big), \tag{2.1}$$

где $\zeta_{\mathcal{M}}(c)$ – это двойной ряд (1.5), в котором символ m-малое заменен на $\mathcal{M}$-большое. Из определения суммы Клоостермана $S_c(n_1,n_2;m)$ видно, что для нее справедливо равенство:

$$S_c(n_1,n_2;\mathcal{M}) = S_c(n_1,n_2;m), \tag{2.2}$$

$$\text{если}\ \ \mathcal{M} \equiv m (\operatorname{mod} c). \tag{2.3}$$

Следовательно, справедливо также равенство

$$\zeta_{\mathcal{M}}(c) = \zeta_m(c) \tag{2.4}$$

при условии (2.3). Поэтому сумму (2.1) можно преобразовать, разбив параметр суммирования $\mathcal{M}$ на прогрессии:

$$\mathcal{M} = m + ck, \quad m \in [1,c], \quad k \geqslant 0.$$

В результате сумма (2.1) приведется к виду:

$$V(N,c) = \sum_{m=1}^{c} \zeta_m(c) \sum_{k=0}^{\infty} \exp\Big(-\frac{m+c\cdot k}{N}\Big). \tag{2.5}$$

Затем воспользуемся интегральным оператором вида:

$$\exp(-x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s>1} x^{-s}\Gamma(s)ds \tag{2.6}$$

и подставим (2.6) во внутреннюю сумму (2.5) при $x = \frac{m+c\cdot k}{N}$. В результате мы приведем эту сумму к интегральному виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\Big(-\frac{m+c\cdot k}{N}\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s>1} \Big(\frac{N}{c}\Big)^s \Gamma(s)\cdot\zeta(s,\alpha)ds, \tag{2.7}$$

где $\alpha = \frac{m}{c}$, $\zeta(s,\alpha)$ – сдвинутая дзета-функция. Затем перенесем контур (2.7) влево на мнимую ось, с обходом точки $s = 0$ по правой дужке радиуса $r_0 = 1/\log N$. В результате правая часть (2.7) примет вид:

$$\frac{N}{c} + r(c,m), \tag{2.8}$$

где $r(c,m)$ – остаток в виде интеграла (2.7) по мнимой оси с обходом точки $s = 0$ по правой дужке:

$$r(x,m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s=0} \left(\frac{N}{c}\right)^s \Gamma(s)\cdot\zeta(s,\alpha)ds, \qquad (2.8)^a$$

Подставляя (2.8) в (2.5) на место внутренней суммы, приведем (2.5) к новому виду:

$$V(N,c) = \frac{N}{c}\sum_{m=1}^{c}\Big[\zeta_m(c) + \frac{c}{N}\cdot r(c,m)\cdot\zeta_m(c)\Big], \tag{2.9}$$

где $r(c,m)$ из $(2.8)^a$.

Теперь умножим обе части равенства (2.9) на c/N и перегруппируем его члены, приведя равенство (2.9) к виду:

$$\sum_{m=1}^{c}\zeta_m(c) = \frac{c}{N}\big[V(N,c) - R(c)\big], \tag{2.10}$$

где

$$R(c) = \sum_{m=1}^{c} r(c,m)\cdot\zeta_m(c). \tag{2.11}$$

Напомним, что из (1.4) следует равенство:

$$\zeta_m(c) = \sum_{a\cdot d\equiv m(\operatorname{mod} c)} \zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,\alpha_2). \tag{2.12}$$

Поэтому определяющее равенство для остатка (2.11) можно записать в терминах ζ^*-функций и сдвинутых дзета-функций $\zeta(s,\alpha)$, $\alpha = \frac{m}{c}$ из ядра интеграла $(2.8)^a$:

$$R(c) = \sum_{m=1}^{c} r(c,m) \sum_{a\cdot d\equiv m(\operatorname{mod} c)} \zeta^*(1-s_1,\alpha_1)\cdot\zeta^*(1-s_2,\alpha_2). \tag{2.13}$$

Явный вид остатка (2.13) позволяет оценить его в любой точке двумерной плоскости $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ с помощью укороченных уравнений как для ζ^*-функций, так и для сдвинутых ζ-функций, которые входят в ядро интеграла $(2.8)^a$.

Для того чтобы получить аналог равенства (2.9) для $\zeta_{-m}(c)$ из (1.12) надо заменить сумму (2.1) на сумму:

$$\widetilde{V}(N,c) = \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \zeta_{-\mathcal{M}}(c) \exp\Big(-\frac{\mathcal{M}}{N}\Big). \tag{2.14}$$

В этом случае, по аналогии с (2.4), справедливо равенство:

$$\zeta_{-\mathcal{M}}(c) = \zeta_{-m}(c), \quad \mathcal{M} \equiv m (\operatorname{mod} c),$$

а вместо равенства (2.10) возникает его аналог:

$$\sum_{m=1}^{c} \zeta_{-m}(c) = \frac{c}{N}\big[\widetilde{V}(N,c) - \widetilde{R}(c)\big], \tag{2.15}$$

где

$$\widetilde{R}(c) = \sum_{m=1}^{c} r(c,m) \cdot \zeta_{-m}(c). \tag{2.16}$$

Особо отметим, что в равенстве (2.16) – аналоге равенства (2.11), меняется знак параметра m только у $\zeta_m(c)$, но не в $r(c,m)$. Поэтому для получения аналога равенства (2.13) следует использовать аналог равенства (2.12):

$$\zeta_{-m}(c) = \sum_{a \cdot d \equiv -m (\operatorname{mod} c)} \zeta^*(1-s_1,\alpha_1) \cdot \zeta^*(1-s_2,\alpha_2). \tag*{$(2.16)^a$}$$

Теперь нам осталось подставить равенства (2.10) и (2.15) в правую часть (1.14) и привести квадратную скобку в (1.15) к новому виду:

$$[\cdots] = \frac{c}{N}\Big[(\widetilde{V},V)(c) - (\widetilde{R},R)(c)\Big] \tag{2.17}$$

где

$$(\widetilde{V},V)(c) = \Big[\widetilde{V}(N,c) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2) - V(N,c) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1+s_2)\Big], \tag*{$(2.17)^a$}$$

$$(\widetilde{R},R)(c) = \Big[\widetilde{R}(c) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1-s_2) - R(c) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1+s_2)\Big]. \tag*{$(2.17)^b$}$$

Подставляя (2.17) в (1.15), приведем это равенство к виду

$$\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2) = \\ = \Big(\frac{2\pi}{c}\Big)^{s_1+s_2-2}\frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)}{2\cdot N\cdot c}[(\widetilde{V},V)(c)-(\widetilde{R},R)(c)]. \quad (2.18)$$

Для того чтобы получить спектральное разложение первого слагаемого в скобке (2.18), т.е. разности $(2.17)^a$, нам осталось усреднить равенство (2.18) по всем $c \geqslant 1$ с гладким весом. Это мы сделаем в следующем параграфе.

§3. Второе усреднение

Для усреднения равенства (2.18) по параметру $c \geqslant 1$ умножим обе его части на функцию:

$$f(c) = \exp\Big[-\Big(\frac{c}{2\pi Y}\Big)^2\Big], \quad (3.1)$$

где $Y > 1$ – произвольный фиксированный параметр из интервала:

$$1 < Y < N. \quad (3.2)$$

Его оптимальное значение подбирается при решении конкретной задачи.

После умножения равенства (2.18) на $f(c)$, усредним обе его части по всем целым $c \geqslant 1$. В результате равенство (2.18) преобразуется к новому виду:

$$\widehat{Y}\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2) = \frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_2)}{2\cdot N}[\widehat{V}(Y)-\widehat{R}(Y)], \quad (3.3)$$

где

$$\widehat{Y} = \sum_{c=1}^{\infty} f(c), \quad (3.4)$$

$$\widehat{V}(Y) = \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c)(\widetilde{V},V)(c), \quad (3.5)$$

$$\widehat{R}(Y) = \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c)(\widetilde{R},R)(c), \quad (3.6)$$

$$f^*(c) = \frac{f(c)}{c}\Big(\frac{2\pi}{c}\Big)^{s_1+s_2-2}. \quad (3.7)$$

Используя интегральное представление (2.6), где вместо x стоит x^2, $x = \frac{c}{2\pi Y}$, легко вычислить явный вид $\widehat{Y}$ равенства (3.4):

$$\begin{aligned} \widehat{Y} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s>1} (2\pi Y)^{2s}\Gamma(s)\zeta(2s)ds = \\ &= \pi Y - \frac{1}{2} + \theta \exp(-Y^2), \quad \theta \ll 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из равенства $(2.17)^a$ следует, что сумма (3.5) распадается на две части:

$$\widehat{V}(Y) = -\widehat{V}_1(Y) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1 + s_2) + \widehat{V}_{-1}(Y) \cdot \cos\frac{\pi}{2}(s_1 - s_2), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{V}_1(Y) &= \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c) \cdot V(N, c), \\ \widehat{V}_{-1}(Y) &= \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c) \cdot \widetilde{V}(N, c). \end{aligned} \tag{3.10}$$

В системе (3.10) обе суммы вычисляются в принципе одинаково, поэтому мы остановимся подробно только на вычислении первой суммы $\widehat{V}_1$, а для второй потом кратко поясним отличия при ее вычислении. Напомним, что $V(N, c)$ является суммой (2.1). Подставив ее в правую часть первой суммы (3.10) приведем ее к виду:

$$\widehat{V}_1(Y) = \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{\mathcal{M}}{N}\Big) \sum_{c=1}^{\infty} \zeta_{\mathcal{M}}(c) f^*(c). \tag{3.11}$$

Снова напомним, что $\zeta_{\mathcal{M}}(c)$ является двойным рядом (1.5), где символ m-малое заменен на $\mathcal{M}$-большое. Подставляя ее явный вид в (3.11) и делая суммирование по $c \geqslant 1$ внутренним, приведем (3.11) к виду:

$$\widehat{V}_1(Y) = \sum_{n_1,n_2,\mathcal{M}=1}^{\infty}{}^3 \exp\Big(-\frac{\mathcal{M}}{N}\Big) \frac{F_1(n_1, n_2, \mathcal{M})}{n_1^{1-s_1} \cdot n_2^{1-s_2}}, \tag{3.12}$$

где

$$F_1(n_1, n_2, \mathcal{M}) = \sum_{c=1}^{\infty} S_c(n_1, n_2; \mathcal{M}) \cdot f^*(c). \tag{3.13}$$

Степерь 3 для суммы (3.12) означает, что она тройная, по каждому из трех индексов суммирования. Сумма (3.13) является спектральной. Нам осталось придать ей каноническую форму работы [4]. Для этого введем спектральный параметр x из работы [4] (теорема 2), который определяется равенством:

$$x = \frac{4\pi\sqrt{\mathcal{M}\cdot n_1\cdot n_2}}{c}. \tag{3.14}$$

На языке этого параметра равенство (3.1) можно переписать в новой форме:

$$f(c) = \exp\left[-\left(\frac{2\sqrt{\mathcal{M}\cdot n_1\cdot n_2}}{x\cdot Y}\right)^2\right]. \tag{3.15}$$

А равенство (3.7) – в форме:

$$f^*(c) = \frac{f(c)}{c}\cdot\left(\frac{2\sqrt{\mathcal{M}\cdot n_1\cdot n_2}}{x}\right)^{2-s_1-s_2}. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.13) получаем каноническую спектральную форму суммы (3.13) на языке параметра x из (3.14)

$$F_1(n_1, n_2, \mathcal{M}) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{S_c(n_1, n_2; \mathcal{M})}{c}\cdot\varphi(x), \tag{3.17}$$

где φ – спектральная функция теоремы 2 из [4]:

$$\varphi(x) = f(c)\cdot\left(\frac{2\sqrt{\mathcal{M}\cdot n_1\cdot n_2}}{x}\right)^{2-s_1-s_2}. \tag{3.18}$$

При этом для функции $f(c)$ в (3.18) надо использовать определяющее равенство (3.15) на языке спектрального параметра x.

Вторая сумма из системы (2.10) сводится к аналогу суммы (3.12) при подстановке в нее равенства (2.14). В результате получается аналог равенства (3.12), в котором параметр $\mathcal{M}$ меняет знак в сумме (3.13):

$$\widehat{V}_{-1}(Y) = \sum_{n_1,n_2,\mathcal{M}=1}^{\infty}{}^{3}\exp\Big(-\frac{\mathcal{M}}{N}\Big)\frac{F_1(n_1, n_2, -\mathcal{M})}{n_1^{1-s_1}\cdot n_2^{1-s_2}}. \tag{3.19}$$

Соответственно спектральная каноническая форма (3.17) для суммы (3.13) также будет с противоположным знаком у параметра $\mathcal{M}$:

$$F_1(n_1, n_2, -\mathcal{M}) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(n_1, n_2; -\mathcal{M})}{c} \cdot \varphi(x), \tag{3.20}$$

где $\varphi(x)$ определена в (3.18). При этом из равенств (3.18) и (3.15) видно, что в левой двумерной полуплоскости

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \quad \operatorname{Re} s_2 < 0 \tag{3.21}$$

функция $\varphi(x)$ удовлетворяет необходимым требованиям теоремы 2 [4] как в точке $x = 0$, так и в точке $x = \infty$. Дальше остается применить теорему 2а) из [4] к сумме (3.12), а ее вариант в) – к сумме (3.20).

§4. Явный вид спектрального разложения

В этом параграфе мы приведем явный вид теоремы 2 из [4] в нашем конкретном случае. Для суммы (3.17) теорема 2 а) из [4] будет выглядеть так:

$$F_1(n_1, n_2, \mathcal{M}) = \left(F_1^{\text{cusp}} + F_1^{\text{disc}} + F_1^{\text{con}}\right)(\varphi). \tag{4.1}$$

В правой части (4.1) стоят три спектральные компоненты в том же порядке, что и в теореме 2 а) из [4]. При этом явный вид непрерывной компоненты F_1^{con} становится существенно проще, т.к. мы работаем с инвариантной группой $\mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{Z})$, поэтому пропадает сложная зависимость от арифметики конгруэнц-модуля q группы $\Gamma_0(q)$, т.к. у нас $q = 1$:

$$F_1^{\text{con}}(+) = \int\limits_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} h^{(+)}(s) \frac{\tau_s(\mathcal{M})\tau_s(n_1)\tau_s(n_2)}{\zeta(2s)\zeta(2-2s)} ds. \tag{4.2}$$

Здесь же заметим, что в равенстве (4.2) мы заменили лишний нормировочный множитель $\sin \pi s$ в знаменателе ядра на $|\zeta(2s)|^2 = \zeta(2s)\zeta(2-2s)$. Эта опечатка произошла по недосмотру авторов при корректуре. (По поводу множителя в знаменателе ядра $|\zeta(2s)|^2$ см. [6, теорема 2].)

Явный вид спектральной функции $h^{(+)}(s)$ в ядре (4.2) такой:

$$h^{(+)}(s) = \pi \int_0^\infty k^{(+)}(x,s)\varphi(x)\frac{dx}{x}, \tag{4.3}$$

где

$$k^{(+)}(x,s) = \frac{1}{\cos \pi s}\bigl[J_{2s-1}(x) - J_{1-2s}(x)\bigr], \tag{4.4}$$

$$\tau_s(n) = n^{(s-1/2)} \sum_{d|n} d^{1-2s}. \tag{4.5}$$

В правой части (4.4) символ J – классическая функция Бесселя [5].

Дискретная компонента F_1^{disc} в равенстве (4.1) имеет вид:

$$F_1^{\mathrm{disc}}(\varphi) = \sum_{j=1}^\infty h^{(+)}\Bigl(\frac{1}{2} + i\varkappa_j\Bigr)\eta_j(\mathcal{M})\rho_j(n_1)\cdot\overline{\rho_j(n_2)}. \tag{4.6}$$

В правой части (4.6) также убран лишний нормировочный синус в знаменателе. Отметим, что в наших формулах мы придерживаемся символики работы [4]. В частности, $\rho_j(n)$ – это коэффициент Фурье j-ой собственной функции $f_j(z)$ дискретного спектра оператора Лапласа. Символ $\eta_j(n)$ – собственное число n-го оператора Гекке той же функции $f_j(z)$. Эти два символа связаны между собой линейной зависимостью:

$$\rho_j(n) = \rho_j(1)\eta_j(n). \tag{4.7}$$

Коэффициент $\rho_j(1)$ определяется нормировочным равенством:

$$\iint_F |f_j(z)|^2 d\mu(z) = 1, \tag{4.8}$$

$$d\mu(z) = \frac{dx\cdot dy}{y^2}, \quad x + iy = z \in H. \tag{4.9}$$

Символ F в (4.8) – классическая фундаментальная область группы $\Gamma_0(1) = \mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$

$$F = \Bigl\{z = x+iy,\, y>0,\, |x| \leqslant \frac{1}{2},\, x^2+y^2 \geqslant 1\Bigr\},$$

H в (4.9) – верхняя полуплоскость $y > 0$, cusp-компонента F_1^{cusp} в (4.1) – та же самая, что и в теореме 2 а) из [4] для группы $\Gamma_0(1) = \text{PSL}\,(2, \mathbb{Z})$. Поэтому ее явный вид читатель найдет в работе [4].

Аналог равенства (4.1) для суммы (3.20), т.е. теорема 2 в) из [4] будет выглядеть так:

$$F_1(n_1, n_2, -\mathcal{M}) = \Big(F_{-1}^{\text{disc}} + F_{-1}^{|con}\Big)(\varphi). \tag{4.10}$$

Отсутствие cusp-компоненты в правой части (4.10) говорит о том, что суммы Клоостермана в (3.20) с разными знаками у своих параметров менее арифметичны, чем эти же суммы из правой части (3.17).

О двух спектральных компонентах правой части (4.10) и модификации их вида, по сравнению с теоремой 2 в) из [4], можно сказать то же самое, что и в случае (4.1). Поэтому мы также приведем их явный вид:

$$F_1^{\text{con}}(\varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\text{Re}\, s = \frac{1}{2}} h^{(-)}(s) \frac{\tau_s(\mathcal{M})\tau_s(n_1)\tau_s(n_2)}{\zeta(2s)\zeta(2-2s)} ds. \tag{4.11}$$

где

$$h^{(-)}(s) = \pi \int\limits_0^\infty k^{(-)}(x, s)\varphi(x)\frac{dx}{x}, \tag{4.12}$$

и

$$k^{(-)}(x, s) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin \pi s \cdot K_{2s-1}(x), \tag{4.13}$$

Отметим, что K-функция в правой части (4.13) является известной функцией Макдональда из теории функции Бесселя [5]. Исправленный вид дискретной компоненты правой части (4.10) выглядит так:

$$F_1^{\text{disc}}(\varphi) = \sum_{j=1}^\infty h^{(-)}\Big(\frac{1}{2} + i\varkappa_j\Big) \cdot \eta_j(\mathcal{M})\rho_j(n_1) \cdot \rho_j(n_2). \tag{4.14}$$

Напомним, что $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}$, где λ_j – собственное значение функции $f_j(z)$.

§5. Явный вид функций $h^{(+)}$ и $h^{(-)}$

Подробности вычислений спектральной функции $h^{(+)}(s)$ приведены в работе [1], в), III. Там она обозначена символом $\widehat{\varphi}(r)$, где $r = \operatorname{Im} s$. Поэтому здесь мы ограничимся вычислением только функции $h^{(-)}(s)$, а для функции $h^{(+)}(s)$ сразу приведем ее явный вид, взятый из работы [1], в), III

$$h^{(+)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > |\operatorname{Re}(s-1/2)|} \cos \pi w \cdot \Gamma\Big(w + s - \frac{1}{2}\Big) \times \\ \times \Gamma\Big(w - s + \frac{1}{2}\Big) \cdot J_w(\varphi) dw, \quad (5.1)$$

где

$$J_w(\varphi) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2w} \varphi(x) \frac{dx}{x}. \quad (5.2)$$

Если теперь подставить в (5.2) явный вид функции φ из (3.18) и провести гиперболическую замену переменной интегрирования в ядре интеграла (5.2), то получится равенство:

$$2 \cdot J_w(\varphi) = \Gamma\Big(w + 1 - \frac{s_1 + s_2}{2}\Big) \cdot \frac{Y^{2(w+1) - s_1 - s_2}}{(\mathcal{M} \cdot n_1 \cdot n_2)^w}. \quad (5.2)^a$$

Если теперь вспомнить, что s является переменной интегрирования в (4.2) с условием $s = \frac{1}{2} + ir$, $r \in (-\infty, \infty)$, то становится ясно, что наша спектральная функция (5.1) действительно совпадает с функцией $\widehat{\varphi}(r)$ из работы [1], в), III (равенство (9.8)), только там другая переменная интегрирования.

Теперь обратимся к спектральной функции $h^{(-)}$ из (4.12) и ее ядру $k^{(-)}$ из (4.13). Это ядро проще ядра $k^{(+)}$ из (4.4) и не требует тех сложных преобразований, которые были проведены для $k^{(+)}$ в работе [1], в), III. В ядре (4.13) мы воспользуемся известным представлением для K-функции Макдональда [5]

$$K_{2s-1}(x) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > |\operatorname{Re}(s-1/2)|} \Gamma\Big(w + s - \frac{1}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(w - s + \frac{1}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2w} dw. \quad (5.3)$$

Затем подставим (4.13) в (4.12) и приведем это равенство к новому виду:

$$h^{(-)}(s) = \frac{\sin \pi s}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w > |\operatorname{Re}(s-1/2)|} \Gamma\Big(w + s - \frac{1}{2}\Big) \times$$
$$\times \Gamma\Big(w - s + \frac{1}{2}\Big) \cdot J_w(\varphi) dw. \quad (5.4)$$

В ядре (5.4) появился тот же интеграл (5.2), что и в ядре (5.1), с явным видом $(5.2)^a$.

Поэтому можно считать, что равенство (5.4) дает явный вид функции $h^{(-)}$ – аналог равенства (5.1) для $h^{(+)}$.

Найдя явный вид спектральных функций $h^{(\pm)}$ мы, тем самым, нашли явный вид спектральных компонент правых частей (4.1) и (4.10). Подставив эти равенства в (3.12) и (3.19) соответственно, мы получим явный вид спектрального разложения для левых частей этих равенств.

Случай а) теоремы 2 из [4] для (3.12):

$$\widehat{V}_1(Y) = \Big(\widehat{V}_1^{\text{cusp}} + \widehat{V}_1^{\text{disc}} + \widehat{V}_1^{\text{con}}\Big)(Y). \quad (5.5)$$

Случай в) теоремы 2 из [4] для (3.19):

$$\widehat{V}_{-1}(Y) = \Big(\widehat{V}_{-1}^{\text{disc}} + \widehat{V}_{-1}^{\text{con}}\Big)(Y). \quad (5.6)$$

Спектральные компоненты правых частей (5.5) и (5.6) являются тройными суммами компонент правых частей (4.1) и (4.10) по параметрами $(\mathcal{M}, n_1, n_2)$ со своими весами. Эти ряды являются абсолютно сходящимися, т.к. $\operatorname{Re} s_1 < 0$, $\operatorname{Re} s_2 < 0$ и $\operatorname{Re} w > 0$. Поэтому перевод рядов на язык дзета-функций и рядов Гекке является элементарным, хотя и громоздким. В качестве конкретного примера приведем явный вид непрерывных компонент $F_1^{\text{con}}(Y)$ и $F_{-1}^{\text{con}}(Y)$ из правых частей (5.5) и (5.6). Для этого мы перейдем от параметра s-переменной интегрирования в непрерывных компонентах (4.2) и (4.11) к параметру r, которые связаны линейной зависимостью:

$$s = \frac{1}{2} + ir, \quad r \in (-\infty, \infty). \quad (5.7)$$

Такая замена упрощает формулы спектральных компонент, т.к. переменная s всюду входит в виде разности $(s - 1/2) = ir$. По этой же причине такая замена была сделана и в работе [1], в), III.

В результате для con-компоненты из (5.5) получаем явный вид:

$$\widehat{V}_1^{\mathrm{con}}(Y) = \frac{Y^{2-s_1-s_2}}{2\cdot(2\pi i)^2} \iint\limits_{\substack{\mathrm{Re}\, s=\frac12\\ \mathrm{Re}\, w>0}} Y^{2w} \cos\pi w \Gamma(w,r)\zeta_N(w,r)\, ds\, dw. \tag{5.8}$$

В ядре двойного интеграла (5.8) символы $\Gamma(w,r)$ и $\zeta(w,r)$ означают блоки Γ-функций и ζ-функций; мы также сохранили для s-интеграла его пределы интегрирования вида $\mathrm{Re}\, s = \frac12$ для простоты символики.

$$\Gamma(w,r) = \Gamma(w-ir)\cdot\Gamma(w+ir)\cdot\Gamma\Big(w+1-\frac{s_1+s_2}{2}\Big), \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\zeta_N(w,r) = \zeta_N(w)\cdot\zeta(1-s_1+w-ir)\cdot\zeta(1-s_1+w+ir)\times\\ \times\zeta(1-s_2+w-ir)\cdot\zeta(1-s_2+w+ir),\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\zeta_N(w) = \sum_{\mathcal{M}=1}^{\infty} \frac{\tau_s(\mathcal{M})}{\mathcal{M}^w} \exp\Big(-\frac{\mathcal{M}}{N}\Big). \tag{5.11}$$

Остальные дзета-функции в (5.10) являются классическими ζ-функциями Римана.

Эта же компонента в правой части (5.6) выглядит так:

$$\widehat{V}_{-1}^{\mathrm{con}}(Y) = \frac{Y^{2-s_1-s_2}}{2\cdot(2\pi i)^2} \iint\limits_{\substack{\mathrm{Re}\, s=\frac12\\ \mathrm{Re}\, w>0}} Y^{2w} \sin\pi s \Gamma(w,r)\zeta_N(w,r)\, dw\, ds \tag{5.12}$$

с теми же блоками (5.9) и (5.10) в ядре. В других спектральных компонентах (5.5) и (5.6) появляются блоки рядов Гекке вместо блока дзета-функций (5.10), а двойные интегралы становятся однократными с w-контурами. Второй интеграл по s-контуру заменяется суммой по $\varkappa_j$ в дискретной компоненте и двойной суммой в cusp-компоненте (по весам и номеру собственной функции). При этом вторая сумма конечна, т.к. речь идет о классических конечномерных пространствах. Подробности можно найти в работе [1], в), II.

§6. Укороченные уравнения. (Техническое приложение)

Для того, чтобы получить укороченное уравнение для дзета-функции, определенной равенством (0.13), введем две новые функции:

$$\begin{aligned} \zeta_+^*(w,\alpha) &= \zeta^*(w,\alpha)+\zeta^*(w,-\alpha), \\ \zeta_-^*(w,\alpha) &= \zeta^*(w,\alpha)-\zeta^*(w,-\alpha) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Первую функцию системы (6.1) можно записать как ряд Дирихле по всем $n\neq 0$:

$$\zeta_{+1}^*(w,\alpha)=\sum_{n\neq 0}\frac{e^{2\pi i\alpha n}}{|n|^w}. \tag{6.2}$$

Вторую функцию из (6.1) можно записать так:

$$\zeta_{-1}^*(w,\alpha)=\sum_{n\neq 0}\frac{n}{|n|^{w+1}}e^{2\pi i\alpha n}. \tag{6.3}$$

Подставляя в (6.2) интегральное представление вида:

$$\frac{1}{|n|^w}=\frac{(\sqrt{\pi})^w}{\Gamma(\frac{w}{2})}\int\limits_0^\infty(\sqrt{x})^{w-2}e^{-\pi x n^2}\,dx \tag{6.4}$$

и поворачивая затем контур (6.4) на угол

$$\varphi=\pm\Big(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Big),\quad \text{где}\quad \varepsilon=\frac{1}{|w|+2},\quad (\text{см. [3]}),$$

приведем ряд Дирихле (6.2) к интегральному виду:

$$\zeta_{+1}^*(w,\alpha)=\frac{(\sqrt{\pi})^w}{\Gamma(\frac{w}{2})}\int\limits_{x=0}^\infty(\sqrt{z})^{w-2}\big[\theta(z,\alpha)-1\big]\,dz, \tag{6.5}$$

где $z=x\,e^{i\varphi}$, знак φ зависит от знака $\operatorname{Im} w$ (см. [3]):

$$\theta(z,\alpha)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi z n^2+2\pi i\alpha n}. \tag{6.6}$$

После чего разделим интеграл (6.5) на две части:

$$\int\limits_0^\infty(\cdots)=\int\limits_{1/c}^\infty(\cdots)+\int\limits_0^{1/c}(\cdots) \tag{6.7}$$

и во втором интеграле правой части (6.7) воспользуемся формулой переворота Якоби:

$$\theta(z,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\Big[-\frac{\pi}{z}(n-\alpha)^2\Big]. \tag{6.8}$$

Далее заметим, что $\alpha = \frac{a}{c}$ дискретно, т.к. параметр a пробегает полную систему вычетов $\operatorname{mod} c$ вида $(1 \leqslant a \leqslant c)$, поэтому $\alpha = \frac{a}{c}$ лежит в интервале $(\frac{1}{c} \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Если $\alpha = 1$, тогда исходный ряд Дирихле (6.2) равен $2\zeta(w)$, а тэта-функция (6.6) становится классичксой функцией Якоби. Поэтому укороченное уравнение в этом случае совпадает с уравнением Р. Кауфман [3].

Если α лежит в интервале

$$\frac{1}{c} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{c}, \tag{6.9}$$

тогда мы получаем обобщение уравнения Кауфман [3] на случай (6.9). При этом полюс в точке $w = 1$ будет отсутствовать, т.к. в этом случае все члены ряда (6.8), включая случаи $n = 0, 1$, будут экспоненциалоно убывать, когда $|z| = x \to +0$:

$$\begin{gathered}\zeta^*_{+1}(w,\alpha) = \sum_{n\neq 0} a_n\Big(\frac{w}{2}\Big)|n|^{-w} e^{2\pi i\alpha n} + \\ + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\Big(\frac{1-w}{2}\Big)|n-\alpha|^{w-1} - a_0\Big(\frac{w}{2}\Big).\end{gathered} \tag{6.10}$$

Коэффициенты a_n при $n \neq 0$ и b_n при всех $n \in \mathbb{Z}$ определяются равенствами:

$$a_n\Big(\frac{w}{2}\Big) = \frac{(\sqrt{\pi})^w}{\Gamma(\frac{w}{2})}\Gamma\Big(\frac{w}{2}, \pi\frac{n^2}{c}\Big), \tag*{$(6.11)^a$}$$

$$b_n\Big(\frac{1-w}{2}\Big) = \frac{(\sqrt{\pi})^w}{\Gamma(\frac{w}{2})}\Gamma\Big(\frac{1-w}{2}, \pi\cdot c(n-\alpha)^2\Big), \tag*{$(6.11)^b$}$$

где

$$\Gamma(s,r) = \int\limits_{x=r}^{\infty} z^{s-1}\cdot e^{-z}\cdot dz, \quad z = x\cdot e^{i\varphi},$$

$$a_0\Big(\frac{w}{2}\Big) = \frac{2(\sqrt{\pi})^w\cdot(\sqrt{c})^{-w}}{w\cdot\Gamma(\frac{w}{2})}\exp\Big(i\varphi\cdot\frac{w}{2}\Big).$$

Для неполной Γ-функции в правой части $(6.11)^b$ параметр $z = x \cdot e^{i\varphi}$ должен быть заменен на комплексно-сопряженный: $\overline{z} = x \cdot e^{-i\varphi}$, т.к. $\mathrm{Im}(-w) = -(\mathrm{Im}\, w)$. Кроме того, нижняя граница неполной Γ-функции в $(6.11)^b$ имеет тот же вид, что и в случае $(6.11)^a$, если эту границу перевести на язык отношения целых чисел. Напомним, что $\alpha = \frac{a}{c}$, $a \in [1, c-1]$, поэтому домножив и разделив эту границу на c, мы получаем равенство:

$$c(n-\alpha) = \frac{(c \cdot n - a)^2}{c}. \qquad (6.11)^c$$

В числителе $(6.11)^c$ стоят квадраты целых чисел из прогрессии $-a (\bmod c)$ вместо всех целых чисел, как у коэффициента a_n из $(6.11)^a$.

Осталось отметить, что последнее слагаемое $a_0(\frac{w}{2})$ в (6.10) порождается элементом (-1) в ядре $[\theta(z,\alpha) - 1]$ второго интеграла (6.7).

Для того чтобы получить укороченное уравнение для второй функции в системе (6.1) надо подставить в ее определение аналог интегрального представления (6.4):

$$\frac{n}{|n|^{w+1}} = \frac{(\sqrt{\pi})^{w+1} \cdot n}{\Gamma(\frac{w+1}{2})} \int\limits_0^\infty (\sqrt{x})^{w-1} \cdot e^{-\pi x n^2}\, dx. \qquad (6.12)$$

Затем снова повернуть контур (6.12) вокруг точки $x = 0$ на угол φ как и в равенстве (6.4). В результате получим интегральное представление:

$$\zeta^*_{-1}(w,\alpha) = \frac{(\sqrt{\pi})^w}{\Gamma(\frac{w+1}{2})} \int\limits_{x=0}^{\infty} (\sqrt{z})^{w-1}\, \theta_1(z,\alpha)\, dz, \qquad (6.13)$$

где

$$\theta_1(z,\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot e^{-\pi z n^2 + 2\pi i \alpha n}. \qquad (6.14)$$

Дальнейшие вычисления по переводу равенства (6.13) в укороченное уравнение те же самые, что и при переходе от (6.5) к равенству (6.10) с небольшими техническими поправками, связанными с отличием тэта-функций Якоби (6.6) и (6.14). В результате из (6.13) получается укороченное уравнение для $\zeta^*_{-1}(w,\alpha)$:

$$\zeta^*_{-1}(w,\alpha)=\sum_{n\neq 0}\frac{n}{|n|^{w+1}}a_n\Big(\frac{1+w}{2}\Big)\cdot e^{2\pi i\alpha n}+ \\ +\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{n-\alpha}{|n-\alpha|^{2-w}}b^*_n\Big(-\frac{w}{2}\Big). \tag{6.15}$$

Коэффициенты a_n в (6.15) определяются равенством $(6.11)^a$, в котором символ w надо заменить на $(w+1)$; коэффициенты b^*_n отличаются от b_n в $(6.11)^b$ более существенно, поэтому мы выпишем их явный вид:

$$b^*_n\Big(1-\frac{w}{2}\Big)=\frac{(\sqrt{\pi})^{w+1}}{\Gamma(\frac{w+1}{2})}\Gamma\Big(1-\frac{w}{2};\pi\cdot c(n-\alpha)^2\Big).$$

Для того, чтобы получить укороченное уравнение для сдвинутой дзета-функции $\zeta(s,\alpha)$ из уравнения $(0.5)^a$, введем парную ей функцию $\zeta(s,a-\alpha)$. Уравнение $(0.5)^a$ для нее преобразуется к виду:

$$\zeta(s,1-\alpha)=\frac{\Gamma(1-s)}{i(2\pi)^{1-s}}\Big[e^{\frac{\pi}{2}is}\zeta^*(1-s,-\alpha)-e^{-\frac{\pi}{2}is}\zeta^*(1-s,\alpha)\Big]. \tag{6.16}$$

Это равенство является следствием равенства

$$\zeta^*(w,1-\alpha)=\zeta^*(w,-\alpha), \tag{6.17}$$

которое, в свою очередь, следует из определяющего равенства (0.13).

Из почленного сложения равенств (0.12) и (6.16) следует новое равенство:

$$\zeta(s,\alpha)+\zeta(s,1-\alpha)=\frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\sin\frac{\pi}{2}s\zeta^*_{+1}(1-s,\alpha), \tag{6.18}$$

где функция ζ^*_{+1} – из первого равенства (6.1). Почленное вычитание равенств (0.12) и (6.16) приводит к другому равенству:

$$\zeta(s,\alpha)-\zeta(s,1-\alpha)=\frac{2\Gamma(1-s)}{i(2\pi)^{1-s}}\cos\frac{\pi}{2}s\zeta^*_{-1}(1-s,\alpha), \tag{6.19}$$

где ζ^*_{-1} – из второго равенства системы (6.1). Из системы равенств (6.18) и (6.19) получаем уравнения для $\zeta(s,\alpha)$ и $\zeta(s,1-\alpha)$:

$$\zeta(s,\alpha)=\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\times \\ \times\Big[\zeta^*_{+1}(1-s,\alpha)\cdot\sin\frac{\pi}{2}s-i\cdot\zeta^*_{-1}(1-s,\alpha)\cdot\cos\frac{\pi}{2}s\Big], \tag*{$(6.20)^a$}$$

$$\begin{aligned} \zeta(s,1-\alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\times \\ \times\Big[\zeta^*_{+1}(1-s,\alpha)\cdot\sin\frac{\pi}{2}s + i\cdot\zeta^*_{-1}(1-s,\alpha)\cdot\cos\frac{\pi}{2}s\Big], \end{aligned} \qquad (6.20)^b$$

Подставляя укороченные уравнения (6.10) и (6.15) в правые части системы (6.20), получаем укороченные уравнения для $\zeta(s,\alpha)$ и $\zeta(s,1-\alpha)$.

Из обращения системы (6.1) получаем обратную систему:

$$\zeta^*(w,\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\zeta^*_{+1}(w,\alpha) + \zeta^*_{=1}(w,\alpha)\Big], \qquad (6.21)^a$$

$$\zeta^*(w,-\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\zeta^*_{+1}(w,\alpha) - \zeta^*_{=1}(w,\alpha)\Big], \qquad (6.21)^b$$

Снова, подставляя равенства (6.10) и (6.15) в правые части системы (6.21), получаем укороченные уравнения для $\zeta^*(w,\alpha)$ и $\zeta^*(w,-\alpha)$ во всей комплексной w-плоскости.

Отметим, что в правых частях системы (6.20) полюс в точке $s=1$ дает $\Gamma(1-s)$, поэтому укороченные уравнения для левых частей этой системы также справедливы во всей s-плоскости, включая точку $s=1$.

Следует заметить, что оба равенства (6.20) являются преобразованной формой уравнения (0.12); первое – для сдвига α, второе – для $(1-\alpha)$. Из этих уравнений сравнительно просто следует равенство:

$$\zeta(0,\alpha) = \Big(\{\alpha\} - \frac{1}{2}\Big), \qquad (6.22)$$

которое обобщает известное классическое равенство (см. [2]):

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad (6.23)$$

которое сразу следует из равенства (6.22) при $\alpha=1$, т.к. в этом случае $\{\alpha\}=0$, поэтому справедливо равенство:

$$\zeta(0,1) = \zeta(0) = -\frac{1}{2}. \qquad (6.24)$$

Функциональные уравнения (0.12) и (6.20) для сдвинутых дзета-функций не имеют простой и красивой формы, как в классическом случае: $\xi(s)=\xi(1-s)$ для самой дзета-функции Римана, где

$\xi(s) = (\sqrt{\pi})^{-s}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. И как следствие этого, не имеют нулей в целых точках левой полуплоскости. В то же время у суммы (6.18) и разности (6.19) такие нули есть. В первом случае – в точках $(-2n)$, $n \geqslant 1$, во втором – в нечетных точках $(1-2n)$, $n \geqslant 1$. Это приводит к системе равенств:

$$\zeta(-2n,\alpha) = -\zeta(-2n,1-\alpha), \quad n \geqslant 1,$$
$$\zeta(1-2n,\alpha) = -\zeta(1-2n,1-\alpha), \quad n \geqslant 1.$$

Наконец отметим, что мы получили систему укороченных функциональных уравнений для сдвинутых дзета-функций (6.20) на основе рядов Дирихле (6.21) и укороченных уравнений для них: (6.10) и (6.15). Они являются следствием функциональных уравнений (0.11) и (0.12). Это позволяет оценить остатки в спектральных асимптотиках с единой точки зрения как в первом случае, так и во втором. Но в то же время укороченные уравнения для сдвинутых дзета-функций $\zeta(s,\alpha)$ можно получить и независимо от функциональных уравнений (0.11) и (0.12), отправляясь только от классического определения их в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6.25}$$

В этом случае, по аналогии с системой (6.1), следует задать систему вида:

$$\begin{aligned} \zeta_{+1}(s,\alpha) &= \zeta(s,\alpha) + \zeta(s,1-\alpha), \\ \zeta_{-1}(s,\alpha) &= \zeta(s,\alpha) - \zeta(s,1-\alpha) \end{aligned} \tag{6.26}$$

Легко видеть, что первую функцию системы (6.26) можно записать как единий ряд Дирихле по всем $n \in \mathbb{Z}$:

$$\zeta_{+1}(s,\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n+\alpha|^s} \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{6.27}$$

Для второй функции системы (6.26) справедлив аналог равенства (6.3)

$$\zeta_{-1}(s,\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(n+\alpha)}{|n+\alpha|^{s+1}}. \tag{6.28}$$

Дальше начинает действовать та же техника интегральных представлений (6.4) и (6.12), только вместо n надо брать $(n+\alpha)$.

Дальнейшие вычисления идут по той же схеме работы [3]. Повторять их снова мы не будем, отметим только, что укороченное уравнение для $\zeta_{+1}(s,\alpha)$ из (6.26) будет аналогично (6.10), только отрезки справа в уравнении (6.10) поменяются местами. Аналогичное замечание справедливо для $\zeta_{-1}(s,\alpha)$ и укороченного уравнения (6.15) для ряда Дирихле $\zeta^*_{-1}(w,\alpha)$ из (6.3) и (6.13).

Переход к укороченным уравнениям самих сдвинутых дзета-функций $\zeta(s,\alpha)$ и $\zeta(s,1-\alpha)$ получается в результате обращения системы (6.26):

$$\begin{aligned}\zeta(s,\alpha) &= \frac{1}{2}\Big[\zeta_{+1}(s,\alpha)+\zeta_{-1}(s,1-\alpha)\Big],\\ \zeta(s,1-\alpha) &= \frac{1}{2}\Big[\zeta_{+1}(s,\alpha)-\zeta_{-1}(s,\alpha),\end{aligned} \tag{6.29}$$

т.е. полная аналогия с системами (6.1) и (6.21).

§7. Заключение

Спектральное разложение произведения (0.1) можно использовать для решения проблемы круга и точек под гиперболой [1], положив $s_1 = s_2 = s$. Но для проблемы круга произведение (0.1) является модельным вариантом, в котором надо заменить одну дзета-функцию на ряд Дирихле $L(s,\chi)$ с примитивным квадратичным характером χ по модулю $q \geqslant 4$

$$\zeta(s_1)\cdot L(s_2,\chi). \tag{7.1}$$

В этом случае разбиение на прогрессии (0.5) для ряда Дирихле $L(s,\chi)$ надо проводить по параметрам $c \equiv 0(\operatorname{mod} q)$ для системы вычетов $a \in [1,c]$, приведенной по модулю q, т.е. $(a,q)=1$:

$$L(s,\chi) = \frac{1}{c^s}\sum_{(a,q)=1}\chi(a)\zeta\Big(s,\frac{a}{c}\Big). \tag{7.2}$$

Для аналогичного разбиения $\zeta(s)$ удобно выделить в ее эйлеровском произведении простые множители, делящие q:

$$\zeta(s) = \zeta_q(s)\prod_{p|q}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}, \tag{7.3}$$

где

$$\zeta_q(s) = \prod_{p\nmid q}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = \sum_{(n,q)=1}\frac{1}{n^s} \tag{7.4}$$

Для функции (7.4) справедлив аналог разбиения на прогрессии (7.2)

$$\zeta_q(s) = \frac{1}{c^s} \sum_{(d,q)=1} \zeta\Big(s, \frac{d}{c}\Big). \tag{7.5}$$

Равенства (7.3) и (7.4) сводят задачу спектрального разложения (7.1) к произведению

$$\zeta_q(s_1)L(s_2, \chi). \tag{7.6}$$

А разбиения на прогрессии (7.2) и (7.5) сводят (7.6) к спектральной схеме, которая была изложена в этой работе, но уже для конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ. Работа [4] написана для группы $\Gamma_0(q)$ без мультипликатора, но она переносится и на случай группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ. В этом случае обобщенные суммы Клоостермана $(1.5)^a$ и (2.2) с условием $(m, q) = (\mathcal{M}, q) = 1$ заменяются аналогичными суммами Салье. Положив в этой схеме $q = 4$ получим решение классической проблемы круга.

Далее заметим, что остаток $\widehat{R}(Y)$ в правой части (3.3) можно оценить, пользуясь только укороченными функциональными уравнениями. Но в этом случае оценка остатка не будет оптимальной по параметру Y из интервала (3.2). Этот интервал придется уменьшить до размера $(1 < Y < \sqrt{N})$, что существенно усложнит счет при решении проблемы. Чтобы получить Y в интервале $(\sqrt{N} < Y < N)$ надо воспользоваться спектральным разложением и для оценки остатка $\widehat{R}(Y)$ в (3.3). Для этого следует заметить, что остаток в (3.3) является суммой остатков, усредненных по c из равенств (2.11) и (2.16), которые, в свою очередь, сводятся к остатку $(2.8)^a$ при фиксированном c. Этот остаток можно разложить по вычетам в полюсах функции $\Gamma(s)$ в левой полуплоскости, сдвинув контур $(2.8)^a$ влево на бесконечность:

$$r(c, m) = \zeta(0, \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Big(\frac{c}{N}\Big)^n \zeta(-n, \alpha), \tag{7.7}$$

где $\alpha = \frac{m}{c}$.

В этом случае остатки (2.11) и (2.16) также разлагаются в ряды вида:

$$R(c) = R_0(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Big(\frac{c}{N}\Big)^n \cdot R_n(c), \tag{7.8}$$

где

$$R_n(c) = \sum_{m=1}^{c} \zeta\Big(-n, \frac{m}{c}\Big)\zeta_{\pm}(c). \tag{7.9}$$

Используя явный вид (6.22) для $\zeta(0,\alpha)$ можно получить явный вид всех остальных $\zeta(-n,\alpha)$ при $n \geqslant 1$. Они будут полиномами степени $(n+1)$ от $\zeta(0,\alpha)$. Их явный вид позволяет разложить остаток среднего (7.9) по спектру и получить для параметра Y оптимальное значение, которое определяется равенством:

$$Y = N^{2/3}. \tag{7.10}$$

Такое значение параметра Y существенно упрощает всю техническую часть решения проблемы круга и точек под гиперболой.

Отметим, что при реальном счете достаточно использовать спектральное разложение только для первых двух слагаемых ряда (7.8), т.е. при $n = 0, 1$. Для всех остальных слагаемых ($n \geqslant 2$) ряда (7.8) хватает оценок, которые следуют из укороченных функциональных уравнений. Другими словами, контур $(2.8)^a$ достаточно сдвинуть влево на прямую $\operatorname{Re} s = -2$.

Наконец отметим еще одну деталь, дополняющую равенство (7.10). Речь идет об основном параметре X в проблеме круга и точек под гиперболой. В первом случае $X = r^2$, где r – радиус круга, в котором мы работаем:

$$a^2 + b^2 \leqslant r^2. \tag{7.11}$$

Во втором случае X – параметр гиперболы, под которой мы работем:

$$a \cdot b \leqslant X. \tag{7.12}$$

В одном и другом случаях между параметром N из равенства (7.10) и параметром X существует оптимальная зависимость:

$$N = X^{3/4}. \tag{7.13}$$

Равенства (7.10) и (7.13) дают нам транзитивное оптимальное равенство между тремя основными параметрами в каждой из этих проблем:

$$Y = N^{2/3} = \sqrt{X}. \tag{7.14}$$

Литература

1. А. И. Виноградов, а) *Точки под гиперболой и проблема круга. Спектральный подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 63–76.
   в) *Бинарные задачи. Спектральный подход.* II, III — Зап. научн. семин. ПОМИ **251** (1998), 178–194, 195–215.
2. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* — Oxford (1951). Русский перевод: И. Л., Москва (1953)
3. Р. М. Кауфман, *Об укороченном уравнении А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **76** (1978), 124–159.
4. V. Bykovsky, N. Kuznetsov, A. Vinogradov, *Generalized summation formula for ingomogenious convolution.* — in: International Conference Automorphic Functions and Their Applications, Khabarovsk, 27 June–4 Jule 1988, pp. 18–64.
5. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Trancendental Functions.* Vol. 2 (1953).
6. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* I. *Сумма сумм Клоостермана.* — Мат. сб. **3**, No. 3 (1980), 334–383.

Vinogradov A. I. A generalized square of the zeta function. The spectral decomposition.

The spectral decomposition for the square of the classical Riemann zeta function $\zeta^2(s)$ is generalized to the case of the product of two such functions $\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2)$ of different arguments.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 2004 г.