Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

Е. А. Сопкина

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУППОВЫХ ПОДСХЕМ $\mathrm{GL_n}$, СОДЕРЖАЩИХ РАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР

1. Введение

Основная цель данной работы – классификация групповых подсхем $\mathrm{GL_n}$, содержащих расщепимый максимальный тор, над произвольным полем.

Близкие вопросы изучались в большом цикле работ, иногда даже в более общих контекстах. А именно, пусть G – расщепимая редуктивная группа над полем k, B – борелевская подгруппа в ней, T – расщепимый максимальный тор.

В 1956 году М. Лазар описал все подгруппы в B над алгебраически замкнутым полем, нормализуемые T. В 1964 году А. Борель и Ж. Титс описали (см. [4]) все связные замкнутые подгруппы в G, нормализуемые T, по-прежнему в предположении, что поле k алгебраически замкнуто.

В дальнейшем ряд авторов рассматривали возможные обобщения этих результатов на случай произвольного поля или даже полулокальных колец. Так, в 1976 году З. И. Боревич в предположении, что $|k| \geqslant 7$, доказал, что все абстрактные промежуточные подгруппы в $\mathrm{GL_n}(k)$, содержащие группу диагональных матриц, являются алгебраическими. В работах З. И. Боревича и Н. А. Вавилова 1977–1981 годов (см. например, [1]) эти результаты были перенесены на почти произвольные полулокальные кольца. При этом, конечно, полиномиальные уравнения, определяющие промежуточные подгруппы, были заменены на сравнения по модулям систем согласованных идеалов.

Параллельно в 1979 году Г. Зейтц получил описание абстрактных подгрупп, содержащих расщепимый максимальный тор, в группах точек групп Шевалле над конечным полем. В дальнейшем в работах Н. А. Вавилова, Е. В. Дыбковой и О. Кин-

Настоящая работа выполнена в рамках проекта INTAS 03-51-3251.

га эти результаты были перенесены вначале на другие классические группы над произвольным полем и коммутативными полулокальными кольцами, а затем и на исключительные группы Шевалле над бесконечными полями. Подробный обзор и обширная библиография по этой тематике приведены в работах Н. А. Вавилова [2] и [6].

В последние годы интерес к этой тематике снова оживился в связи с тем, что во-первых, было предложено несколько новых концептуальных доказательств теоремы Боревича (А. В. Яковлев – А. А. Панин, Н. А. Вавилов – М. Ю. Митрофанов). А во-вторых, Е. В. Дыбковой удалось получить некоммутативные аналоги этой теоремы в контексте баковских унитарных групп.

В настоящей работе рассматривается обобщение теоремы Бореля–Титса в другом направлении. А именно, мы получаем полное описание промежуточных групповых подсхем GL_n.

Согласно теореме Картье (см. например, в книге [7] 11.4), над полем характеристики ноль все групповые схемы приведены. В этом случае классификация связных групповых надсхем тора в редуктивных группах следует из классификации замкнутых связных (в топологии Зариского) надгрупп тора над алгебраически замкнутым полем, которая проделана в классической работе А. Бореля и Ж. Титса [4]. В характеристике ноль связные подсхемы параметризуются квази-замкнутыми множествами.

Случай поля положительной характеристики сложнее, в этом случае схем значительно больше. Подсхемы редуктивных групп изучались в работах К. Венцеля [8, 9] и Ф. Кнопа [5]. Одной из основных мотиваций при создании настоящей работы было желание обобщить следующие их результаты. В статье [8] К. Венцель классифицировал все параболические групповые подсхемы редуктивных групп над алгебраически замкнутым полем с небольшими ограничениями на характеристику. В работе Ф. Кнопа классифицированы все групповые подсхемы SL_2.

Автор выражает глубокую благодарность Н. А. Вавилову за постановку задачи и интерес к работе, а также всем участникам семинара “Классические группы” под руководством Н. А. Вавилова за полезные обсуждения.

2. Формулировка основных результатов

Первый и важный шаг классификации всех промежуточных групповых подсхем заключается в классификации **связных** промежуточных групповых подсхем, которая состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть k – поле характеристики $p > 0$, $n = l+1$. Существует каноническая биекция между всеми связными групповыми подсхемами $\mathrm{GL_n}$, содержащими расщепимый максимальный тор T, и функциями $\varphi : A_l \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, удовлетворяющими неравенству*

$$\varphi(\alpha+\beta) \geqslant \min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)). \qquad (*)$$

Доказательство этой теоремы будет приведено в параграфе 4.

Основной результат настоящей работы – классификация всех промежуточных групповых подсхем. Он опирается на теорему 1 и заключается в следующем.

Теорема 2. *Пусть k – поле характеристики $p > 0$, $n = l + 1$. Существует каноническая биекция между всеми групповыми подсхемами $\mathrm{GL_n}$, содержащими расщепимый максимальный тор T, и парами (W, φ), где функция $\varphi : A_l \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(\alpha+\beta) \geqslant \min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)), \qquad (*)$$

и W – некоторая подгруппа группы Вейля $W(A_l)$, содержащая все отражения w_α относительно таких корней $\alpha \in A_l$, что $\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) = \infty$, и нормализующая функцию φ.

Этот результат будет доказан в последнем параграфе.

3. Обозначения и предварительные замечания

На протяжении всей работы мы имеем дело только с аффинными схемами, поэтому слово “аффинная” в словосочетании “аффинная схема” обычно опускаем.

Мы будем по определению считать, что $x^\infty = 0$ для любого элемента x произвольной k-алгебры.

3.1. Функции φ и группа Вейля $W(A_l)$.

Нетрудно видеть, что свойство $(*)$ выполнено тогда и только тогда, когда “линии уровня” функции φ, множества $S_n = \{\alpha \in A_l : \varphi(\alpha) \geqslant n\}$ являются замкнутыми множествами корней для всех n от нуля до бесконечности включительно.

Известно, что все расщепимые максимальные торы в $\mathrm{GL_n}(k)$ сопряжены. Поэтому во всех дальнейших ракссуждениях мы будем считать, что тор T – это группа диагональных матриц.

Тогда мы можем писать (ij) вместо α, если позиция (ij) в матрице соответствует корню α (т.е. при $\alpha = e_i - e_j$). В данных обозначениях соотношение $(*)$ можно переписать в виде

$$\varphi(ij) \geqslant \min(\varphi(il), \varphi(lj)) \qquad (**)$$

для всех различных i, j и l от 1 до n. Кроме того, мы будем считать $\varphi(ii) = \infty$. При таком доопределении неравенство $(**)$ выполняется для любой тройки чисел i, j и l от 1 до n.

Мы будем отождествлять группу Вейля $W(A_l)$ системы корней A_l, группу всех перестановок чисел от 1 до n и подгруппу матриц, содержащих ровно одну единицу в каждой строке и в каждом столбце и нули на всех остальных местах, в группе $\mathrm{GL_n}(R)$ для любой k-алгебры R.

При этом перестановке w, переводящей элементы $1, 2, \ldots\ n$ в соответственно $w(1), w(2), \ldots\ w(n)$, будут отвечать элемент группы Вейля, переводящий корень (ij) корень $(w(i), w(j))$, а также матрица, в которой на местах $(w(i), i)$ стоят единицы, а на остальных местах стоят нули.

Группа $W(A_l)$ действует на множестве функций $\varphi : A_l \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, удовлетворяющих $(*)$, посредством $\varphi^w(\alpha) = \varphi(w(\alpha))$, или, в других обозначениях, $\varphi^w(ij) = \varphi(w(i), w(j))$.

3.2. Подгруппы U_Σ, V_Σ и L_Σ.

Обозначим, в соответствии с работой [8], через x_β гомоморфизм, отображающий аддитивную группу G_a в подгруппу элементарных трансвекций в $\mathrm{GL_n}$, отвечающих корню β.

Пусть Σ – параболическое множество корней. Мы будем использовать следующие обозначения для подгрупп $\mathrm{GL_n}(k)$ и соответствующих им подсхем. Группа L_Σ определяется уравнениями $\{x_{ij} = 0$ при $(ij) \notin \Sigma^r\}$, группа U_Σ определяется уравнениями $\{x_{ll} = 1; x_{ij} = 0$ при $(ij) \notin \Sigma^u\}$, а группа V_Σ определяется уравнениями $\{x_{ll} = 1; x_{ij} = 0$ при $(ij) \in \Sigma\}$.

Отметим, что $L_\Sigma = G(\Sigma^r)$ – группа блочно-диагональных матриц, где блоки соответствуют разложению Σ^r в сумму неприводимых подсистем. Группы U_Σ и V_Σ порождены трансвекциями, отвечающими корням из Σ^u и $A_l \backslash \Sigma$ соответственно.

4. Доказательство теоремы 1

Настоящий параграф целиком посвящен доказательству теоремы 1.

4.1. Определение групповой схемы G_φ.

Определим схему G_φ, соответствующую функции φ. Это схема, представленная $k[G_\varphi] = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}, t]/(t\det(x_{ij}) = 1, x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}} = 0)$. Убедимся, что определенная таким образом схема G_φ удовлетворяет условию теоремы 1.

Лемма 1. *Схема G_φ является связной групповой подсхемой* $\mathrm{GL_n}$, *содержащей тор T.*

Доказательство. Для того, чтобы убедиться, что алгебра $k[G_\varphi]$ является факторалгеброй Хопфа (т.е. что она представляет групповую подсхему $\mathrm{GL_n}$), достаточно проверить, что $I_\varphi = (x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}})$ – хопфов идеал в $k[\mathrm{GL_n}] = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}, t]/(t\det(x_{ij}) = 1)$. Это действительно хопфов идеал, так как

$$\Delta(x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}}) = \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{p^{\varphi(ij)}} \otimes x_{lj}^{p^{\varphi(ij)}},$$

$$\sigma(x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}}) = t\sum_{\tau}(-1)^{sign(\tau)} x_{1\tau(1)}^{p^{\varphi(ij)}} \ldots \widehat{x_{j\tau(j)}^{p^{\varphi(ij)}}} \ldots x_{n\tau(n)}^{p^{\varphi(ij)}},$$

где сумма берется по всем таким перестановкам τ, что $\tau(j) = i$,

$$\varepsilon(x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}}) = 0,$$

и из соотношения $(**)$ следует, что

$$\Delta(I_\varphi) \subset I_\varphi \otimes k[\mathrm{GL_n}] + k[\mathrm{GL_n}] \otimes I_\varphi,$$

$\sigma(I_\varphi) \subset I_\varphi$ и $\varepsilon(I_\varphi) = 0$.

Проверим, что схема G_φ связна. Согласно утверждениям 6.8 и 6.5 книги [7], достаточно показать, что приведенная схема $((G_\varphi)_{\mathrm{red}})_{\overline{k}}$ над алгебраическим замыканием поля k связна. Но последняя схема получена из связной алгебраической группы $G(S_\infty)$, и потому связна.

То, что G_φ содержит тор T, очевидно.

4.2. Редукция к случаю алгебраически замкнутого поля.

Теперь, чтобы доказать теорему 1, нам достаточно проверить, что каждая связная групповая подсхема G в $\mathrm{GL_n}$, содержащая T, совпадает со схемой G_φ для некоторой функции φ, удовлетворяющей неравенству $(*)$.

Известно (см. [7] 15.3), что все групповые подсхемы данной групповой схемы являются замкнутыми подсхемами. Пусть $A = k[G]$ – алгебра Хопфа, представляющая G. Сформулируем утверждение, которое нам осталось доказать, на языке алгебр Хопфа.

Переформулировка. Пусть алгебра A представляет связную групповую схему над полем k и

$$k[\mathrm{GL_n}] \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow k[T],\ (\star)$$

где алгебра $k[\mathrm{GL_n}] = k[x_{11},\ldots,x_{nn},t]/(t\det(x_{ij}) = 1)$ представляет $\mathrm{GL_n}$, а алгебра $k[T] = k[x_{11},\ldots,x_{nn},t]/(t\det(x_{ij}) = 1, x_{ij} = 0$ при $i \neq j)$ предцтавляет ее групповую подсхему T диагональных матриц. Тогда алгебра A совпадает с алгеброй $k[x_{11},\ldots,x_{nn},t]/(t\det(x_{ij}) = 1, x_{ij}^{p^{\varphi(ij)}} = 0)$ для некоторой функции φ, удовлетворяющими неравенству $(*)$.

При расширении основного поля k до алгебраического замыкания $\overline{k}$ свойство $(\star)$, очевидно, сохраняется. Более того, если A представляет связную групповую схему, то $A \otimes \overline{k}$ тоже (см. [7] 6.5).

Предположим теперь, что теорема 1 доказана в случае алгебраически замкнутого поля. Доказательство в общем случае вытекает тогда из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть G и G' – замкнутые подсхемы некоторой алгебраической афинной схемы H над полем k. Если схемы $G_{\overline{k}}$ и $G'_{\overline{k}}$ совпадают как подсхемы $H_{\overline{k}}$ над алгебраическим замыканием $\overline{k}$, то и схемы G и G' совпадают.*

Доказательство. Пусть схема H представлена алгеброй $k[H]$, а подсхемы G и G' представлены алгебрами $k[H]/I$ и $k[H]/I'$ для некоторых идеалов I и I' соответственно. Тогда схема $G_{\overline{k}}$ представлена алгеброй $\overline{k} \otimes (k[H]/I) = \overline{k}[H]/\overline{k}[H]I$, и аналогично схема $G'_{\overline{k}}$ представлена алгеброй $\overline{k}[H]/\overline{k}[H]I'$. Поскольку подсхемы $G_{\overline{k}}$ и $G'_{\overline{k}}$ совпадают, мы получаем $\overline{k}[H]I = \overline{k}[H]I'$. Отсюда

$$I = k[H] \cap \overline{k}[H]I = k[H] \cap \overline{k}[H]I' = I',$$

поскольку вложение $k[H] \hookrightarrow \overline{k}[H]$ строго плоское.

Эта лемма будет использована также в параграфе 5 для сведения теоремы 2 к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто.

Начиная с этого места и до конца параграфа мы предполагаем поле k алгебраически замкнутым.

4.3. Приведенная подсхема.

Пусть G – схема, удовлетворяющая предположениям теоремы 1. Рассмотрим приведенную подсхему G_{red}. Известно, что приведенная подсхема групповой схемы над совершенным (в том числе над алгебраически замкнутым) полем является групповой (см. [7] Еш. 6.3), и что приведенная подсхема связной групповой схемы связна (см. [7] 6.8). Таким образом, G_{red} – приведенная связная групповая подсхема $\mathrm{GL_n}$, содержащая тор T, над алгебраически замкнутым полем.

Все такие схемы, согласно [7] 4.5, соответствуют замкнутым связным (в топологии Зариского) подгруппам $\mathrm{GL_n}(k)$, содержащим группу диагональных матриц. Согласно результатам работы [4], найдется замкнутое множество корней S в A_l такое, что $G_{\mathrm{red}} = G(S)$. То есть, мы имеем $k[G_{\mathrm{red}}] = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}, t]/(t\det(x_{ij}) = 1, x_{ij} = 0$ при $(ij) \notin S)$.

Кроме того, в системе корней A_l можно выбрать такое параболическое замкнутое множество Σ, что $S \subset \Sigma$ и $S^r = \Sigma^r$. Не умаляя общности, можно считать, что $\Sigma \supset A_l^+$, т.е. что Σ содержит все корни, соответствующие позициям выше диагонали в матрице.

4.4. Разложение типа Гаусса.

Лемма 3. *В предположениях предыдущего пункта G – замкнутая подсхема в $U_\Sigma L_\Sigma V_\Sigma$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, произведение $U_\Sigma L_\Sigma V_\Sigma$ в действительности является прямым произведением U_Σ, L_Σ и V_Σ как аффинных схем, и $k[U_\Sigma L_\Sigma V_\Sigma] = k[\mathrm{GL_n}]_f$, где многочлен f – произведение главных миноров, прилегающих к правому нижнему углу и содержащих только целые блоки, соответствующие разложению Σ^r в сумму неприводимых подсистем.

Таким образом, нам достаточно построить соответствующее отображение $k[\mathrm{GL_n}]_f \twoheadrightarrow k[G]$.

Мы имеем отображение $k[\mathrm{GL_n}] \twoheadrightarrow k[G]$, отвечающее вложению схемы G в $\mathrm{GL_n}$, и отображение $k[G] \twoheadrightarrow k[G_{\mathrm{red}}]$, отвечающее вложению схемы G в $\mathrm{GL_n}$. Очевидно, $G_{\mathrm{red}} = G(S)$ – подсхема в схеме

$G(\Sigma) = U_\Sigma L_\Sigma$, которая, в свою очередь, является подсхемой в $U_\Sigma L_\Sigma V_\Sigma$. Этому вложению схемы G_{red} в схему $U_\Sigma L_\Sigma V_\Sigma$ отвечает отображение $k[\mathrm{GL_n}]_f \twoheadrightarrow k[G]/\operatorname{Nil}(k[G])$. Таким образом, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
k[\mathrm{GL_n}] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k[G] \arrow[d, two heads] \\
k[\mathrm{GL_n}]_f \arrow[r, two heads] & k[G]/\operatorname{Nil}(k[G]).
\end{tikzcd}$$

Для построения требуемого отображения нам достаточно проверить, что образ многочлена f при отображении $k[\mathrm{GL_n}] \twoheadrightarrow k[G]$ обратим. Но из коммутативности последней диаграммы следует, что образ f при сквозном отображении $k[\mathrm{GL_n}] \twoheadrightarrow k[G] \twoheadrightarrow k[G]/\operatorname{Nil}(k[G]) = k[G_{\mathrm{red}}]$ обратим, а значит, он обратим еще в $k[G]$, т.к. факторизация по нильрадикалу не влияет на обратимость.

4.5. Кульминация.

Лемма 4. *В предположениях пункта* 4.3 *выполнено равенство*

$$G = (U_\Sigma \cap G)L_\Sigma(V_\Sigma \cap G).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой коммутативной k-алгебры R с единицей справедливо равенство

$$G(R) = (U_\Sigma \cap G)(R) \cdot L_\Sigma(R) \cdot (V_\Sigma \cap G)(R).$$

Правая часть этого равенства, очевидно, содержится в левой, т.к. содержится каждый из сомножителей. Поэтому достаточно доказать лишь обратное включение.

По лемме 3 каждый элемент x группы $G(R)$ представляется в виде произведения udv, где $u \in U_\Sigma(R)$, $d \in L_\Sigma(R)$, а $v \in V_\Sigma(R)$. Более того, мы можем утверждать, что $v \in V_\Sigma(\operatorname{Nil}(R))$, поскольку $G_{\mathrm{red}} = G(S) \subset G(\Sigma) = U_\Sigma L_\Sigma$.

Мы знаем, что L_Σ – подсхема в G, поэтому $d \in G(R)$. Следовательно, элемент $y = d^{-1}x$ лежит в группе $G(R)$ и представляется в виде $u'v$, где $u' = d^{-1}ud \in U_\Sigma(R) \subset U(R)$ и $v \in V_\Sigma(\operatorname{Nil}(R)) \subset V(\operatorname{Nil}(R))$.

Применим к этой ситуации следующую теорему 1 из статьи [3]. (В обозначениях работы [3] $B(J)$ – подгруппа $\mathrm{GL_n}$, состоящая из матриц, под диагональю которых стоят элементы из радикала Джекобсона J; D – группа диагональных матриц.)

Теорема. *Предположим, R – коммутативное кольцо, порожденное группой своих обратимых элементов R^*, и существуют две единицы $\varepsilon, \eta \in R^*$ такие что $\varepsilon - 1, \eta - 1, \varepsilon - \eta, \varepsilon\eta - 1$ также обратимы. Если матрица $x \in B(J)$ представлена в виде $x = udv$, где $u \in U, d \in D, v \in V(J)$, то u и v содержатся в группе $\langle D, xDx^{-1}\rangle$, порожденной D и xDx^{-1}.*

В рассматриваемой нами ситуации условие существования элементов ε и η выполнено, так как кольцо R содержит в качестве подкольца бесконечное поле k. Условие же о том, что кольцо R должно порождаться как группа своими обратимыми элементами, общее для теорем 1, 2 и 3 работы [3], не используется при доказательстве теоремы 1 работы [3], и является в данной ситуации лишним. Таким образом, утверждение теоремы 1 [3], выполнено, так что матрицы v, u', а следовательно, и u лежат в $G(R)$, что и требовалось.

4.6. Построение функции φ.

Известно, что $U_\Sigma = \prod\limits_{\beta\in\Sigma^u} x_\beta(G_a)$ и $V_\Sigma = \prod\limits_{\beta\in A_l\setminus\Sigma} x_\beta(G_a)$, где порядок сомножителей согласован с высотой корней, причем произведения в действительности суть прямые произведения аффинных схем. Используя утверждения 7 и 8 работы [8], получаем

$$U_\Sigma \cap G = \prod_{\beta\in\Sigma^u}(x_\beta(G_a)\cap G), V_\Sigma \cap G = \prod_{\beta\in A_l\setminus\Sigma}(x_\beta(G_a)\cap G).$$

Таким образом, мы имеем

$$G = \prod_{\beta\in\Sigma^u}(x_\beta(G_a)\cap G)\cdot L_\Sigma \cdot \prod_{\beta\in A_l\setminus\Sigma}(x_\beta(G_a)\cap G) =$$

$$= \prod_{\beta\in\Sigma^u} x_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}})\cdot L_\Sigma \cdot \prod_{\beta\in A_l\setminus\Sigma} x_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}})$$

для некоторых значений $\varphi(\beta)$, поскольку α_{p^n} – все возможные связные групповые подсхемы G_a. Последнее равенство определяет значения функции φ на корнях из Σ^u и $A_l\setminus\Sigma$. На оставшихся корнях, образующих множество Σ^r, определим значения φ равными бесконечности.

4.7. Последние проверки.

Лемма 5. *Построенная в предыдущем пункте функция* φ *удовлетворяет свойству* $(*)$ *и* $G = G_{\varphi}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные корни α и β из A_l, сумма которых также является корнем, и покажем, что для них выполнено неравенство $(*)$. Возьмем в качестве k-алгебры R алгебру $k[a,b]/(a^{p^{\varphi(\alpha)}}, b^{p^{\varphi(\beta)}})$. Очевидно, $x_\alpha(a)$ и $x_\beta(b)$ лежат в $G(R)$. Так как $G(R)$ — группа, коммутатор $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = x_{\alpha+\beta}(\pm ab)$ лежит в $G(R)$. Отсюда $(ab)^{p^{\varphi(\alpha+\beta)}} = 0$, и неравенство $(*)$ выполнено.

Осталось проверить, что $G = G_\varphi$. Из пункта 4.6 нам известно, что
$$G = \prod_{\beta \in A_l^+ \setminus \Sigma^r} x_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}}) \cdot L_\Sigma \cdot \prod_{\beta \in A_l^- \setminus \Sigma^r} x_\beta(\alpha_{p^{\varphi(\beta)}}).$$

Заметим, что к схеме G_φ применимы лемма 4, а также утверждения 7 и 8 работы [8] (потому что G_φ связна, $(G_\varphi)\mathrm{red}$ также является подсхемой G_Σ и L_Σ лежит в G_φ). То есть,
$$G_\varphi = \prod_{\beta \in A_l^+ \setminus \Sigma^r} x_\beta(\alpha_{p^{\psi(\beta)}}) \cdot L_\Sigma \cdot \prod_{\beta \in A_l^- \setminus \Sigma^r} x_\beta(\alpha_{p^{\psi(\beta)}})$$

для некоторой функции ψ. Достаточно показать, что $\varphi = \psi$. Из последнего разложения видно, что $\psi(\beta) \geqslant n$ в том и только в том случае, когда $x_\beta(\alpha_{p^n})$ – замкнутая подсхема G_φ. А из определения G_φ, точнее, из определения представляющей ее алгебры Хопфа в пункте 4.1, видно, что $x_\beta(\alpha_{p^n})$ – замкнутая подсхема G_φ в том и только в том случае, когда $\varphi(\beta) \geqslant n$. Отсюда мы получаем $\varphi = \psi$.

Эта лемма завершает доказательство теоремы 1.

5. Вычисление нормализатора

Настоящий параграф целиком посвящен доказательству теоремы 2.

5.1. Редукция к случаю алгебраически замкнутого поля.

Покажем, что нам достаточно классифицировать схемы над алгебраически замкнутым полем. Действительно, если G – групповая подсхема $\mathrm{GL_n}$, содержащая T, то $G_{\overline{k}}$ – такая же групповая схема. Согласно лемме 2, по схеме $G_{\overline{k}}$ схема G определяется однозначно. Таким образом, завершив классификацию схем над алгебраически замкнутым полем, нам достаточно будет убедиться, что все построенные нами в качестве ответа групповые схемы определены над исходным меньшим полем k. Поэтому всюду в этом параграфе, кроме пунктов 5.5, 5.6 и 5.7, в которых производится построение схем $G_{W\varphi}$, мы считаем поле k алгебраически замкнутым.

5.2. Построение функции φ и группы W.

Рассмотрим произвольную (не обязательно связную) групповую подсхему G в $\mathrm{GL_n}$, содержащую T. Как известно (см. [7] 6.7), компонента связности единицы G^0 является связной групповой подсхемой G. Кроме того, G^0 – нормальный делитель G (по [7] 6.7), и G^0 содержит T (т.к. тор T связен). Поэтому по теореме 1 мы имеем $G^0 = G_\varphi$ для некоторой функции φ. Определим группу W как пересечение групп $G(k)$ и $W(A_l)$.

Лемма 6. *Для определенной таким образом пары (W, φ) выполнено $G(k) = WG_\varphi(k)$.*

Доказательство. Рассмотрим точки схемы G над основным полем k. Пусть $g \in G(k)$. Тогда $g^{-1}T(k)g$ – расщепимый максимальный тор, причем так как $G^0(k)$ нормальна в $G(k)$, тор $g^{-1}T(k)g$ содержится в $G_\varphi(k)$. Все максимальные расщепимые торы сопряжены в алгебраической группе $G_\varphi(k)$ над алгебраически замкнутым полем k (см. [7] 10.5), поэтому найдется элемент h в $G_\varphi(k)$ такой, что $h^{-1}g^{-1}T(k)gh = T(k)$, откуда gh содержится в нормализаторе тора $N_T(k) = W(A_l)T(k)$. То есть $gh = wt$, где $w \in W(A_l)$ и $t \in T(k)$. Таким образом, любой элемент g из $G(k)$ представляется в виде произведения wu, где $w \in W(A_l)$ и $u = th^{-1} \in G_\varphi(k)$. То есть $G(k) \subset W(A_l)G_\varphi(k)$ и $G(k) = WG_\varphi(k)$, где $W = G(k) \cap W(A_l)$, что и требовалось.

5.3. Свойства построенной пары (W, φ).

Лемма 7. *Построенная в предыдущем пункте пара (W, φ) удовлетворяет условиям теоремы 2, а именно, функция $\varphi : A_l \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(\alpha + \beta) \geqslant \min(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)), \ (*)$$

а W содержит все отражения w_α относительно таких корней $\alpha \in A_l$, что $\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) = \infty$, и нормализует функцию φ.

Доказательство. Очевидно, построенная в предыдущем пункте функция φ удовлетворяет свойству $(*)$, а группа W содержит все перестановки $W \cap G_\varphi(k) = W(S^r_\infty)$.

Проверим теперь, что W нормализует φ. Заметим сперва, что W – замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL_n}$, а потому мы можем рассмотреть соответствующее ей кольцо регулярных функций $k[W]$, являющееся алгеброй Хопфа, и аффинную групповую схему, которую обозначим $[W]$. Мы знаем, что W – замкнутая подгруппа $G(k) = G_{\mathrm{red}}(k)$, и поскольку над алгебраически замкнутым полем приведенная схема определяется своим значением на основном поле (см. [7] 4.4 и 4.5), мы имеем сюръективный гомоморфизм алгебр Хопфа $k[G] \twoheadrightarrow k[G_{\mathrm{red}}] \twoheadrightarrow k[W]$, т.е. $[W]$ – замкнутая подсхема G.

Рассмотрим значения схем $[W]$ и G на произвольной k-алгебре R. Очевидно, все матрицы перестановок, лежавшие в группе W, лежат и в $[W](R)$. Следовательно, они лежат и в группе $G(R)$ и нормализуют подгруппу $G_\varphi(R)$. Но заметим, что для любой матрицы перестановки $w \in W$ справедливо $G_\varphi(R) = w^{-1}G_\varphi(R)w = G_{\varphi^w}(R)$. Поскольку это верно для любой k-алгебры R, мы заключаем, что $G_\varphi = G_{\varphi^w}$, и $\varphi = \varphi^w$, т.е. w нормализует φ, что и требовалось.

5.4. Единственность.

Лемма 8. *Построенная в пункте* 5.2 *пара* (φ, W) *однозначно определяет исходную групповую схему* G.

Доказательство. Предположим, что найдется еще одна групповая схема G' с такой же компонентой связности G_φ и подгруппой перестановок $W = G'(k) \cap W(A_l)$. Не умаляя общности, можно считать, что одна из этих групповых схем (скажем, G') содержится в другой. Действительно, пересечение этих двух подсхем будет по-прежнему иметь компоненту связности G_φ и подгруппу перестановок $W = (G'(k) \cap G(k)) \cap W(A_l)$.

По лемме 6 мы имеем $G(k) = WG_\varphi(k) = G'(k)$. Отсюда, поскольку поле k алгебраически замкнуто, $G_{\mathrm{red}} = G'_{\mathrm{red}}$ и $\pi_0 G = \pi_0 G_{\mathrm{red}} = \pi_0 G'_{\mathrm{red}} = \pi_0 G'$.

Кроме того, известно, что над алгебраически замкнутым полем отображение $G \longrightarrow \pi_G$ сюръективно на точках. Поэтому для любой k-алгебры R мы имеем

$$G_\varphi(R) \hookrightarrow G'(R) \hookrightarrow G(R) \twoheadrightarrow \pi_0 G(R),$$

то есть подгруппа $G'(R)$ в группе $G(R)$ при отображении $G(R) \twoheadrightarrow \pi_0 G(R)$ сюръективно отобрается на образ $\pi_0 G(R)$ и содержит ядро $G_\varphi(R)$ этого отображения. Отсюда группы $G(R)$ и $G'(R)$ совпадают, а в силу произвольности k-алгебры R, совпадают и схемы G и G'.

5.5. Схема $[W]$ нормализует G_φ.

С этого пункта мы начинаем построение групповой схемы $G_{W\varphi}$, соответствующей данной паре (W, φ), и проверку того, что это и есть требуемая схема.

В этом и следующем пунктах, необходимых для определения групповой схемы $G_{W\varphi}$, мы не предполагаем поле k алгебраически замкнутым. Нетрудно проследить, что предлагаемая ниже конструкция инвариантна относительно расширения основного поля.

Для постоения нам потребуется следующий факт, который мы будем проверять на протяжении настоящего пункта.

Лемма 9. *Если подгруппа W группы Вейля $W(A_l)$ нормализует функцию φ, то соответствующая группе W подсхема $[W]$ в $\mathrm{GL_n}$ нормализует схему G_φ.*

Доказательство. Рассмотрим значения этих схем на произвольной k-алгебре R и покажем, что $[W](R)$ нормализует $G_\varphi(R)$.

Заметим сперва, что все элементы $[W](R)$ удовлетворяют тем же алгебраическим уравнениям, что и элементы подгруппы W в $\mathrm{GL_n}(k)$. А именно, уравнениям $x_{ij}^2 = x_{ij}$ для всех пар (i, j), уравнениям $x_{ij}x_{lj} = 0$ и $x_{ij}x_{il} = 0$ для всех троек (i, j, l) с $i \neq j$ и уравнениям $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ji} = 1$ для всех i (таким уравнениям удовлетворяют все элементы группы Вейля $W(A_l)$), а также некоторым другим уравнениям, выделяющим подгруппу W в группе $W(A_l)$.

Из этого, в частности, следует, что каждая строка или столбец произвольной матрицы w из $[W](R)$ цостоит из попарно ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу. Обратной к такой матрице $w = (w_{ij})_{i,j}$ будет, очевидно, ее транспонированная матрица $(w_{ji})_{i,j}$.

Рассмотрим произвольную матрицу $a = (a_{ij})_{i,j}$ из $G_\varphi(R)$, сопряжем ее матрицей w, и покажем, что полученная матрица будет также лежать в $G_\varphi(R)$, т.е. удовлетворять уравнениям

$(**)$. При сопряжении мы получим матрицу $(\sum\limits_{l,m} w_{il}a_{lm}w_{jm})_{i,j}$, поэтому соотношения, которые необходимо проверить, имеют вид $(\sum\limits_{l,m} w_{il}a_{lm}w_{jm})^{p^{\varphi(i,j)}} = 0$. Поскольку характеристика основного поля равна p, мы можем раскрыть в них скобки:

$$\sum_{l,m} w_{il}a_{lm}^{p^{\varphi(i,j)}}w_{jm} = 0.$$

Заметим, что произведение $w_{il}w_{jm}$ равно нулю всегда, за исключением, быть может, того случая, когда в группе W найдется такая матрица w', что на ее позициях (il) и (jm) одновременно стоят единицы. Соответствующая этой матрице перестановка, которую мы так же будем обозначать через w', такова, что $w'(i) = l$ и $w'(j) = m$. Так как все элементы W нормализуют функцию φ, мы имеем в этом случае $\varphi(ij) = \varphi(lm)$. Из этого мы заключаем, что если $w_{il}w_{jm} \neq 0$, то $\varphi(ij) = \varphi(lm)$, и поскольку матрица a лежит в группе $G_\varphi(R)$, то ее элемент a_{lm} должен удовлетворять соотношению $a_{lm}^{p^{\varphi(ij)}} = a_{lm}^{p^{\varphi(lm)}} = 0$. Таким образом, все слагаемые в соотношениях, которые нам необходимо было проверить, нулевые.

5.6. Определение групповой схемы $G_{W\varphi}$.

Пусть W и G_0 – групповые подсхемы некоторой алгебраической групповой схемы G, причем схема G_0 связна, а схема W этальна и нормализует схему G_0. Определим произведение этих схем – подсхему WG_0 – как образ при сквозном отображении $W \times G_0 \hookrightarrow G \times G \xrightarrow{\text{mult}} G$. Для представляющих эти схемы алгебр Хопфа мы будем иметь следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & k[G] \otimes k[G] \arrow[d] \\ k[WG_0] \arrow[r, hook] & k[W] \otimes k[G_\varphi]. \end{tikzcd}$$

Лемма 10. *Определенная таким образом схема WG_0 является групповой, причем ее компонента связности единицы WG^0 равна G_0.*

Автор будет признателен тому, кто укажет работу, в которой приведено доказательство этого стандартного факта.

Применим описанную выше конструкцию и лемму к нашей ситуации, т.е. к подсхемам $[W]$ и G_φ в $\mathrm{GL_n}$, и обозначим произведение этих схем через $G_{W\varphi}$. Как алгебра $k[W]$ изоморфна прямой сумме нескольких экземпляров поля k. Поэтому мы имеем изоморфизм k-алгебр

$$k[W] \otimes k[G_\varphi] \simeq \bigoplus_{w \in W} k[\mathrm{GL_n}]/I_{w\varphi},$$

где $I_{w\varphi} = (x_{w(i)j}^{p^{\varphi(ij)}})$, при этом гомоморфизм

$$k[\mathrm{GL_n}] \longrightarrow \bigoplus_{w \in W} k[\mathrm{GL_n}]/I_{w\varphi}$$

состоит из проекцией на каждое слагаемое. Таким образом, в нашей ситуации коммутативная диаграмма имеет вид

$$\begin{tikzcd}
k[\mathrm{GL_n}] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, two heads] & k[GLn] \otimes k[\mathrm{GL_n}] \arrow[d, two heads] \\
k[G_{W\varphi}] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"'] & k[W] \otimes k[G_\varphi] \arrow[d, "\simeq"'] \\
k[\mathrm{GL_n}]/ \bigcap\limits_{w \in W} I_{w\varphi} \arrow[r, hook] & \bigoplus\limits_{w \in W} k[\mathrm{GL_n}]/I_{w\varphi}.
\end{tikzcd}$$

Итак, подсхема $G_{W\varphi}$ в $\mathrm{GL_n}$, которую мы сопоставили паре (φ, W), действительно является групповой, содержит тор T, и ее компонента связности единицы совпадает с G_φ. Для окончания доказательства теоремы 2 нам достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 11. *Для схемы $G_{W\varphi}$ справедливо $W = G_{W\varphi}(k) \cap W(A_l)$.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$W(A_l) \geqslant W \geqslant W(S_\infty^r) = W(A_l) \cap G_\varphi(k),$$

откуда $W(A_l) \cap G_\varphi(k) = W \cap G_\varphi(k)$. Известно, что $G_{W\varphi}(k) = (G_{W\varphi})_{\mathrm{red}}(k)$, поэтому изучим приведенную подсхему $(G_{W\varphi})_{\mathrm{red}}$. Она задается внутри $\mathrm{GL_n}$ идеалом $\sqrt{\bigcap\limits_{w \in W} I_{w\varphi}} = \bigcap\limits_{w \in W} \sqrt{I_{w\varphi}}$. То есть подмногообразие $(G_{W\varphi})_{\mathrm{red}}(k)$ в $\mathrm{GL_n}(k)$ является объединением подмногообразий, определяемых идеалами $\sqrt{I_{w\varphi}}$ для всех $w \in W$. Нетрудно понять, что эти подмногообразия – просто трансляции подмногообразия $(G_\varphi)\mathrm{red}(k) = G_\varphi(k)$ на соответствующие элементы $w \in W$. Иными словами, мы имеем $G_{W\varphi}(k) = W \cdot G_\varphi(k)$.

Отсюда, учитывая соотношение $W(A_l) \cap G_\varphi(k) = W \cap G_\varphi(k)$, видно, что $G_{W\varphi}(k) \cap W(A_l) = W$.

Литература

1. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Труды МИАН СССР **148** (1978) 43–57.
2. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Лен. Мат. Общ. **1** (1990), 64–109, 245–246.
3. Н. А. Вавилов, *Разложение Брюа подгрупп, содержащих группу диагональных матриц.* II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **114** (1982), 50–61.
4. A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **27** (1965), 55–151.
5. F. Knop, *Homogeneous varieties for semisimple groups of rank one.* — Compos. Math. **98** (1995), 77–89.
6. N. Vavilov, *Intermediate Subgroups in Chevalley Groups.* — London Math. Soc. Lect. Note Ser., **207** (1993), 233–281.
7. W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes.* New York [u.a.]: Springer, (1979).
8. C. Wenzel, *Classification of all parabolic subgroup-schemes of a reductive linear algebraic group over an algebraiclly closed field.* — Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), 211–218.
9. C. Wenzel, *Rationality of G/P for a nonreduced parabolic subgroup-scheme P.* — Proc. Amer. Math. Soc., **117** (1993), 899–904.

Sopkina E. A. Classitification of group subschemes in $\mathrm{GL_n}$, that contain a split maximal torus.

We describe group subschemes of $\mathrm{GL_n}$ over an arbitrary field, that contain a split maximal torus. This is a joint generalization of the papers by Z. I. Borewicz, G. M. Seitz, N. A. Vavilov and others on description of overgroups of maximal torus and the works by Ch. Wenzel on parabolic subschemes.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: sopkina@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступило 10 октября 2004 г.