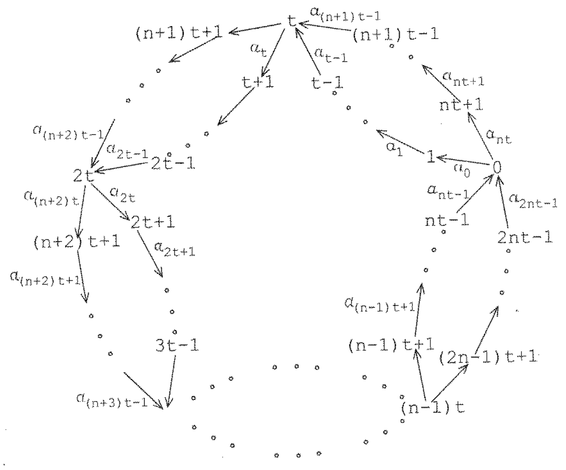
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 321, 2005 г.

**А. И. Генералов, М. А. Качалова**

# БИМОДУЛЬНАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА АЛГЕБРЫ МЁБИУСА

## Введение

Пусть $R$ – самоинъективная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем, имеющая конечный тип представления. Стабильный $AR$-колчан такой алгебры можно описать с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое должно совпадать с одной из схем Дынкина $A_n, D_n, E_6, E_7$ или $E_8$ (см. [1]). В [2] доказано, что если для алгебры $R$ это ассоциированное дерево имеет тип $A_n$, то $R$ стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса" вида $R = k\,[\mathcal{Q}]\,/I$, где $\mathcal{Q}$ – следующий колчан:




где $n, t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2$, а $I$ – идеал в алгебре путей $k\,[Q]$ колчана $Q$, порождённый

а) всеми путями длины $t+1$;

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00674.

б) путями вида

$$a_{rt}a_{(r+n)t-1} \quad \text{и} \quad a_{(r+n)t}a_{rt-1}$$

(здесь и далее коэффициенты рассматриваются по модулю $2nt$, кроме того, для краткости мы иногда опускаем индексы в обозначениях стрелок, – более подробные обозначения обычно легко восстанавливаются из контекста);

в) выражениями вида

$$a_{(n+r)t-1}a_{(n+r)t-2}\dots a_{(n+r-1)t} + a_{rt-1}a_{rt-2}\dots a_{(r-1)t}, \quad 1 \le r \le n.$$

В этом случае используем также обозначение $R = R_{n,t}$.

В [3] вычислено кольцо когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для полуцепных самоинъективных алгебр, где был использован тот факт, что для полуцепных алгебр вторая сизигия изоморфна исходной алгебре, подкрученной при помощи некоторого её автоморфизма конечного порядка. С использованием той же технологии скрученных бимодулей в [4] вычислено подкольцо $\mathrm{HH}^{*r}(R)$, порождённое однородными элементами, степень которых делится на $r$, где $r = 2t-1$.

Остаётся нерешённой задача о структуре всего кольца когомологий Хохшильда для алгебры Мёбиуса. Мы надеемся осуществить отличный от [3, 4], более прямой способ вычисления кольца когомологий.

В данной работе мы описываем минимальную проективную резольвенту $Q_\bullet = Q_\bullet({}_\Lambda R)$ для алгебры Мёбиуса $R$, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй $\Lambda$. Так как $\mathrm{HH}^*(R) = \mathrm{H}^*(\mathrm{Hom}(Q_\bullet, R))$, то структуру кольца когомологий Хохшильда можно будет найти при помощи этой резольвенты, что мы и предполагаем сделать в последующих публикациях. Ранее аналогичный подход был использован нами для вычисления алгебры Йонеды алгебры Мёбиуса (см. [5]).

## §1. Формулировка основного результата

Пусть $R = R_{n,t}$, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_k R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра алгебры $R$. Тогда $R$–$R$-бимодули можно рассматривать как левые $\Lambda$-модули. Для $\Lambda$-модуля $M$ через $Q_\bullet(M) \to M$ обозначим его минимальную проективную резольвенту, $\Omega^m(M)$ – его $m$-ую сизигию.

Через $e_i$, $i \in \mathbb{Z}_{2nt} = \{0, 1, \dots, 2nt-1\}$, обозначаем идемпотенты алгебры $k[\mathcal{Q}]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}$ (при этом $e_{rt} = e_{(r+n)t}$ $\forall\, 0 \le r < n$ – одна и та же вершина), $a_i$ – стрелка, идущая из $i$-ой вершины колчана в $(i+1)$-ю, то есть $a_i = e_{i+1}a_ie_i$. Образ пути $\omega \in k[\mathcal{Q}]$ в $R$ обозначаем также через $\omega$.

Модули $P_{i,j} = R(e_i \otimes e_j)R = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_{2nt}$, составляют полное множество (попарно неизоморфных) неразложимых проективных $\Lambda$-модулей. Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует гомоморфизм левых $\Lambda$-модулей $w^*\colon \Lambda \to \Lambda$; при этом, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_r \otimes e_s)$, то $w^*$ индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{i,j} \to P_{r,s}$.

**Замечание 1.** В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на $w$ также обозначаем через $w$.

Введём автоморфизм $\sigma : R \to R$ алгебры $R$, действующий следующим образом:

$$\sigma(e_j) = \begin{cases} e_{j+t^2}, & \text{если } j \text{ делится на } t, \\ e_{j+t(t+n)} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\sigma(a_j) = \begin{cases} -a_{j+t(t+n)}, & \text{если } j = st-1 \text{ или } j = st \\ & \text{для } s = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_{j+t(t+n)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В [4] доказано, что $\sigma$ – автоморфизм конечного порядка, при этом, если $n > 1$, то этот порядок равен $2n/\text{НОД}(n,t)$ за исключением случая, когда $\operatorname{char} k = 2$ и $(n+t)/\text{НОД}(n,t)$ чётно; в этом случае порядок равен $n/\text{НОД}(n,t)$.

Будем строить минимальную проективную резольвенту $\Lambda$-модуля $R$ в следующем виде:

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} Q_3 \longleftarrow \dots.$$

Введём $Q_i$ $(i \leqslant 2t-1)$.

$$\begin{aligned} Q_{2m} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+m)t,it}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t-m-1}\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m)t+j+m,it+j}\right) \oplus \\ \oplus \left(\bigoplus_{j=t-m}^{t-1}\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m-1+n)t+j+m+1,it+j}\right), \quad 0 \leqslant m \leqslant t-1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$Q_{2m+1} = \left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m)t+m+1,it}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t-m-2}\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m)t+j+m+1,it+j}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+1)t,it+t-m-1}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{j=t-m}^{t-1}\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+n)t+j+m+1,it+j}\right),\ 0 \leqslant m \leqslant t-2, \qquad (2)$$

$$Q_{2t-1} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+t)t,it}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t-1}\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+t+n)t+j,it+j}\right). \qquad (3)$$

Теперь опишем дифференциалы $d_l$ для $l \leqslant 2t-2$. Отметим, что для краткости иногда вместо идемпотентов мы пишем пути длины нуль (например, путь вида $a_{i-1}\dots a_i$ означает путь длины нуль из $i$-ой вершины в $i$-ую, то есть $e_i$). Так как $Q_i$ – прямые суммы, то их элементы можно рассматривать как векторы-столбцы, а тогда дифференциалы описываются некоторыми матрицами (которые умножаются справа на вектор-столбец). Опишем покомпонентно матрицы дифференциалов, при этом мы используем упрощенные обозначения, указанные в замечании 1.

**Замечание 2.** Нумерацию строк и столбцов в матрицах дифференциалов всюду начинаем с нуля.

**Обозначение.** Для $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ через $(a)_n$ обозначим наименьший неотрицательный вычет $a$ по модулю $n$ (в частности, $0 \leqslant (a)_n \leqslant n-1$).

**Описание $d_{2m}$ $(0 \leqslant m \leqslant t-2)$.**

$$Q_{2m} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+m)t,it}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j_1=1}^{t-m-1}\bigoplus_{i_1=0}^{2n-1} P_{(i_1+m)t+j_1+m,i_1t+j_1}\right) \oplus$$

$$\oplus\left(\bigoplus_{j_1=t-m}^{t-1}\bigoplus_{i_1=0}^{2n-1}P_{(i_1+m-1+n)t+j_1+m+1,i_1t+j_1}\right)\xleftarrow{d_{2m}}$$

$$Q_{2m+1}=\left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1}P_{(i+m)t+m+1,it}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{j_2=1}^{t-m-2}\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1}P_{(i_2+m)t+j_2+m+1,i_2t+j_2}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1}P_{(i_2+m+1)t,i_2t+t-m-1}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{j_2=t-m}^{t-1}\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1}P_{(i_2+m+n)t+j_2+m+1,i_2t+j_2}\right).$$

Если $0\leqslant j\leqslant 2n-1$, то

$$(d_{2m})_{ij}=$$
$$=\begin{cases}-a_{(j+m)t+m}a_{(j+m)t+m-1}\dots a_{(j+m)t}\otimes e_{jt}, & \text{если } i=(j)_n;\\ e_{(j+m)t+m+1}\otimes a_{jt}, & \text{если } i=n+j;\\ a_{(j+m)t+m}a_{(j+m)t+m-1}\dots a_{(j+m-1)t+j_1+m+1}\otimes & \\ \qquad\otimes a_{(j+n)t+j_1-1}\dots a_{(j+n)t}, & \text{если}\\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+(j+n)_{2n}, t-m\leqslant j_1\leqslant t-1; & \\ 0 \quad \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

Если $2n\leqslant j\leqslant 2n(t-m-1)-1$ и

$$j=2nj_2+i_2,\quad \text{где}\quad i_2,j_2\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant i_2<2n, \tag{4}$$

то

$$(d_{2m})_{ij}=\begin{cases}-a_{(i_2+m)t+j_2+m}\otimes e_{i_2t+j_2}, & \text{если } i=j-n;\\ e_{(i_2+m)t+j_2+m+1}\otimes a_{i_2t+j_2}, & \text{если } i=j+n;\\ 0 \quad \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

Если $2n(t-m-1) \leqslant j \leqslant 2n(t-m)-1$ и $i_2$ из (4), то

$$(d_{2m})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} -e_{(i_2+m+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{(i_2+1)t-m-1}, & \text{если } i = (i_2+1)_n; \\ a_{(i_2+m+1)t-1} \otimes e_{i_2t+t-m-1}, & \text{если } i = j-n; \\ a_{(i_2+m+1+n)t-1} \dots a_{(i_2+m-1+n)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+j_1-1} \dots a_{i_2t+t-m-1}, & \text{если} \\ \qquad i = n+2n(j_1-1)+i_2,\ t-m \leqslant j_1 \leqslant t-1; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2n(t-m) \leqslant j \leqslant 2nt-1$ и $i_2, j_2$ из (4), то

$$(d_{2m})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} -a_{(i_2+m+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m+1+n)t} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если } i = (i_2+1)_n; \\ a_{(i_2+m+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m-1+n)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = n+2n(j_1-1)+i_2,\ j_2 \leqslant j_1 \leqslant t-1; \\ a_{(i_2+m+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m+n)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = n+2n(j_1-1)+(i_2+1)_{2n},\ t-m \leqslant j_1 \leqslant j_2; \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Описание** $d_{2m+1}$ $(0 \leqslant m \leqslant t-2)$.

$$Q_{2m+1} = \left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m)t+m+1,it}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{j_1=1}^{t-m-2} \bigoplus_{i_1=0}^{2n-1} P_{(i_1+m)t+j_1+m+1,i_1t+j_1}\right) \oplus$$

$$\oplus\left(\bigoplus_{i_1=0}^{2n-1} P_{(i_1+m+1)t,i_1t+t-m-1}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{j_1=t-m}^{t-1}\bigoplus_{i_1=0}^{2n-1} P_{(i_1+m+n)t+j_1+m+1,i_1t+j_1}\right)\xleftarrow{d_{2m+1}}$$
$$Q_{2m+2}=\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+m+1)t,it}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{j_2=1}^{t-m-2}\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1} P_{(i_2+m+1)t+j_2+m+1,i_2t+j_2}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\bigoplus_{j_2=t-m-1}^{t-1}\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1} P_{(i_2+m+n)t+j_2+m+2,i_2t+j_2}\right).$$

Если $0\leqslant j\leqslant n-1$, то

$$(d_{2m+1})_{ij}=$$
$$=\begin{cases} a_{(j+m+1)t-1}\dots a_{(j+m)t+m+1}\otimes e_{jt}, & \text{если } i=j;\\ a_{(j+m+1+n)t-1}\dots a_{(j+m+n)t+m+1}\otimes e_{jt}, & \text{если } i=j+n;\\ a_{(j+m+1)t-1}\dots a_{(j+m)t+j_1+m+1}\otimes a_{jt+j_1-1}\dots a_{jt}, & \text{если}\\ \qquad i=2nj_1+j,\ 1\leqslant j_1\leqslant t-m-2; & \\ a_{(j+m+1+n)t-1}\dots a_{(j+m+n)t+j_1+m+1}\otimes & \\ \qquad\otimes a_{(j+n)t+j_1-1}\dots a_{(j+n)t}, & \text{если}\\ \qquad i=2nj_1+j+n,\ 1\leqslant j\leqslant t-m-2; & \\ -e_{(j+m+1)t}\otimes a_{jt+t-m-2}\dots a_{jt}, & \text{если}\\ \qquad i=2n(t-m-1)+j; & \\ -e_{(j+m+1)t}\otimes a_{(j+n)t+t-m-2}\dots a_{(j+n)t}, & \text{если}\\ \qquad i=2n(t-m-1)+j+n; & \\ 0 \quad \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

Если $n\leqslant j\leqslant 2n(t-m-2)+n-1$ и

$$j+n=2nj_2+i_2,\quad \text{где}\quad i_2,j_2\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant i_2<2n, \tag{5}$$

то

$$(d_{2m+1})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} a_{(i_2+m+1)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m+1)t+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если } i = (i_2+1)_{2n}; \\ a_{(i_2+m+1)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_1 + i_2,\ j_2 \leqslant j_1 \leqslant t-m-2; \\ a_{(i_2+m+1)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m+1)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_1 + (i_2+1)_{2n},\ 1 \leqslant j_1 \leqslant j_2; \\ -a_{(i_2+m+1)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+m+1)t} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+t-m-2} \dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(t-m-1) + i_2; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2n(t-m-2)+n \leqslant j \leqslant n(2t-1)-1$ и $i_2, j_2$ из (5), то

$$(d_{2m+1})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} e_{(i_2+m+1+n)t+m+1} \otimes a_{i_2t+t-1}, & \text{если} \\ \qquad i = (i_2+n+1)_{2n},\ j_2 = t-1; \\ -a_{(i_2+m+1+n)t} \otimes e_{i_2t+t-m-1}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(t-m-1)+i_2, j_2 = t-m-1; \\ -a_{(i_2+m+n)t+j_2+m+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_2 + i_2\ , j_2 > t-m-1; \\ e_{(i_2+m+n)t+j_2+m+2} \otimes a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(j_2+1)+i_2,\ j_2 < t-1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Описание $d_{2t-2}$.**

$$Q_{2t-2} = \left( \bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+t-1)t,it} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j_1=1}^{t-1} \bigoplus_{i_1=0}^{2n-1} P_{(i_1+t-1+n)t+j_1, i_1t+j_1} \right) \xleftarrow{d_{2t-2}}$$

$$Q_{2t-1} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+t)t,it}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j_2=1}^{t-1}\bigoplus_{i_2=0}^{2n-1} P_{(i_2+t+n)t+j_2,i_2t+j_2}\right).$$

Если $0 \leqslant j \leqslant n-1$, то

$$(d_{2t-2})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} -a_{(j+t)t-1}\dots a_{(j+t-1)t} \otimes e_{jt}, & \text{если } i=j;\\ e_{(j+t)t} \otimes a_{(j+1)t-1}\dots a_{jt} & \text{если } i=(j+1)_n;\\ -a_{(j+n+t)t-1}\dots a_{(j+t-1+n)t+j_1} \otimes a_{jt+j_1-1}\dots a_{jt}, & \\ \qquad \text{если } i=n+2n(j_1-1)+j,\ 1\leqslant j_1\leqslant t-1; & \\ a_{(j+t)t-1}\dots a_{(j+t-1)t+j_1} \otimes a_{(j+n)t+j_1-1}\dots a_{(j+n)t}, & \\ \qquad \text{если } i=2nj_1+j,\ 1\leqslant j_1\leqslant t-1; & \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Если $n \leqslant j \leqslant n(2t-1)-1$ и $i_2, j_2$ из (5), то

$$(d_{2t-2})_{ij} =$$
$$= \begin{cases} -a_{(i_2+t+n)t+j_2-1}\dots a_{(i_2+t+n)t}\otimes & \\ \qquad \otimes\, a_{(i_2+1)t-1}\dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если } i=(i_2+1)_n;\\ a_{(i_2+t+n)t+j_2-1}\dots a_{(i_2+t-1+n)t+j_1}\otimes & \\ \qquad \otimes\, a_{i_2t+j_1-1}\dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если}\\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+i_2,\ j_2\leqslant j_1\leqslant t-1; & \\ a_{(i_2+t+n)t+j_2-1}\dots a_{(i_2+t+n)t+j_1}\otimes & \\ \qquad \otimes\, a_{(i_2+1)t+j_1-1}\dots a_{i_2t+j_2}, & \text{если}\\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+(i_2+1)_{2n},\ 1\leqslant j_1\leqslant j_2; & \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Замечание 3.** Если $n=1$, то условия $i=j$ и $i=(j+1)_n$ из (6) выполняются одновременно, и потому в этом случае соответствующая часть определения в (6) принимает вид:
при $i=j$

$$(d_{2t-2})_{ij} = -a_{(j+t)t-1}\dots a_{(j+t-1)t} \otimes e_{jt} + e_{(j+t)t} \otimes a_{(j+1)t-1}\dots a_{jt}.$$

Основной результат работы – следующая

**Теорема 1.** *Пусть $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса. Тогда минимальная проективная резольвента $\Lambda$-модуля $R$ имеет вид:*

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} Q_3 \longleftarrow \dots, \tag{7}$$

*где $\varepsilon$ – отображение умножения ($\varepsilon(a \otimes b) = ab$); $Q_r$ ($r \leqslant 2t-1$) и $d_r$ ($r \leqslant 2t-2$) описаны выше; далее $Q_{(2t-1)l+r}$, где $l \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant r \leqslant 2t-2$, получается из $Q_r$ заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^l(i),j}$ соответственно (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а дифференциал $d_{(2t-1)l+r}$ получается из $d_r$ применением $\sigma^l$ ко всем левым компонентам тензоров из соответствующей матрицы.*

## §2. Модули из проективной резольвенты

Пусть $B$ – базисная $k$-алгебра, тогда $B$–$B$-бимодули – это то же, что и (левые) $B^{\mathrm{e}} = B \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-модули. Пусть $P_1, \dots, P_l$ – все (попарно неизоморфные) неразложимые проективные $B$-модули, $S_1, \dots, S_l$ – соответствующие простые модули. Неразложимые проективные $B^{\mathrm{e}}$-модули имеют вид $P_{i,j} = \Lambda(e_i \otimes e_j)$ ($1 \leqslant i, j \leqslant l$), а $S_{i,j} = P_{i,j}/\operatorname{Rad} P_{i,j}$ – это соответствующие простые $B^{\mathrm{e}}$-модули.

**Лемма 2** (см. [6]). *Пусть*

$$\dots \to R_m \to R_{m-1} \to \dots \to R_1 \to R_0 \to B \to 0$$

*– минимальная проективная резольвента $B$ над $B^{\mathrm{e}}$. Тогда*

$$R_m \cong \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{\dim \operatorname{Ext}_B^m(S_j, S_i)}.$$

**Замечание 4.** В формулировке и доказательстве этой леммы мы исправляем неточность, содержащуюся в [6, стр. 110].

**Доказательство.** Заметим, что $S_{i,j} \simeq \operatorname{Hom}_k(S_j, S_i)$. Действительно, для любых $\varphi \in \operatorname{Hom}_k(S_j, S_i)$ и $x \in S_j$ имеем:

$$((e_i \otimes e_j)\varphi)(x) = e_i\varphi(e_j x) = \varphi(x).$$

Далее доказательство завершается так же, как в [6]. □

Таким образом, лемма 2 позволяет найти модули $Q_m$ из (7), если мы знаем размерности групп расширений $\operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i)$ для простых $R$-модулей.

Для удобства читателя приведем следующий результат, полученный в [5] (ср. также [4, леммы 2.2 и 2.3]).

**Предложение 3.** *Пусть* $R = R_{n,t}$.

а) *Если* $i \not\equiv 0, t-1 \pmod t$, *то начало минимальной проективной резольвенты* $Q_\bullet(S_i)$ *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{i+t+1} \xrightarrow{a^t} P_{i+1} \xrightarrow{a} P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0.$$

*При этом* $\Omega^2(S_i) \simeq S_{i+t+1}$.

б) *Начало минимальной проективной резольвенты* $Q_\bullet(S_{rt-1})$ *модуля* $S_{rt-1}$, $1 \leqslant r \leqslant 2n$, *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{(r+n+1)t+1} \xrightarrow{a^t} P_{(r+n)t+1} \xrightarrow{a} P_{rt} \xrightarrow{a} P_{rt-1} \longrightarrow S_{rt-1} \longrightarrow 0.$$

*При этом* $\Omega^3(S_{rt-1}) \simeq S_{(r+n+1)t+1}$.

в) *Начало минимальной проективной резольвенты* $Q_\bullet(S_{rt})$, $1 \leqslant r \leqslant n$, *имеет вид:*

$$\cdots \longrightarrow P_{(r+t)t} \xrightarrow{a^t} P_{(r+t-1)t} \xrightarrow{\binom{a}{-a}} P_{(r+t-1)t-1} \oplus P_{(r+n+t-1)t-1} \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{(a^{t-1}\ a^{t-1})} P_{(r+t-2)t} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{(r+2)t} \xrightarrow{\binom{a^{t-2}}{-a^{t-2}}} P_{(r+1)t+2} \oplus P_{(r+n+1)t+2}$$
$$\xrightarrow{(a^2\ a^2)} P_{(r+1)t} \xrightarrow{\binom{a^{t-1}}{-a^{t-1}}} P_{rt+1} \oplus P_{(n+r)t+1} \xrightarrow{(a\ a)} P_{rt} \longrightarrow S_{rt} \longrightarrow 0.$$

*При этом* $\Omega^{2t-1}(S_{rt}) \simeq S_{(r+t)t}$.

**Следствие 4.** *Пусть* $R = R_{n,t}$, $\nu = 2n/\text{НОД}(t+n, 2n)$.

а) *Предположим, что* $i = rt + p$, *где* $r, p \in \mathbb{Z}$, $0 < p < t$. *Тогда группы* $\operatorname{Ext}^l_R(S_i, S_j)$ *ненулевые, если и только если тройка* $(i,\ j,\ l)$ *имеет вид*

*либо* $\big(i,\ i+mt+m+qt(t+n),\ 2m+q(2t-1)+s\nu(2t-1)\big)$, $1 \leqslant m < t-p$;

*либо* $\big(i,\ i+mt+m+1+qt(t+n),$
$2m+1+q(2t-1)+s\nu(2t-1)\big)$, $\quad 0 \leqslant m < t-p$;

*либо* $\big(i,\ t(r+t-p+n+m)+m+1+qt(t+n),$
$2(t-p+m)+q(2t-1)+s\nu(2t-1)\big)$, $\quad 0 \leqslant m \leqslant p-1$;

*либо* $\big(i,\ t(r+t-p+n+m+1)+m+1+qt(t+n),$
$2(t-p+m)+1+q(2t-1)+s\nu(2t-1)\big)$, $\quad 0 \leqslant m \leqslant p-1$,

*где* $0 \leqslant q < k$, $\quad s \in \mathbb{N}_0$.

б) *Предположим, что* $i = rt$, *где* $r \in \mathbb{Z}$. *Тогда группы* $\operatorname{Ext}^l_R(S_{rt}, S_j)$ *ненулевые, если и только если пара* $(j,\ l)$ *имеет вид*

*либо* $((r+m-1)t+m+qt^2,\ 2m-1+q(2t-1)+s\nu(2t-1))$;

*либо* $((r+m-1+n)t+m+qt^2,\ 2m-1+q(2t-1)+s\nu(2t-1))$*;*

*либо* $((r+m)t+qt^2,\ 2m+q(2t-1)+s\nu(2t-1))$*;*

*либо* $(qt^2+rt,\ q(2t-1)+s\nu(2t-1))$*,*

*где* $1 \leqslant m \leqslant t-1, \quad 0 \leqslant q < k, \quad s \in \mathbb{N}_0$*.*

*При этом все размерности над полем* $k$ *указанных ненулевых групп равны* 1*.*

**Предложение 5.** *Минимальная проективная бимодульная резольвента* $R$ *имеет вид* (7)*, где модули* $Q_r$ *для* $0 \leqslant r \leqslant 2t-2$ *вычисляются по формулам* (1)–(3)*, а далее модуль* $Q_{r+(2t-1)l}$*, где* $l \in \mathbb{N}$*,* $0 \leqslant r \leqslant 2t-2$*, получается из* $Q_r$ *с помощью замены каждого из слагаемых* $P_{i,j}$ *модуля* $Q_r$ *на* $P_{\sigma^l(i),j}$ *соответственно.*

**Доказательство.** Используя предложение 3, рассмотрим следующее отображение на множестве простых $R$-модулей:

$$\Phi(S_i) = \begin{cases} \Omega^2(S_i) = S_{i+t+1}, & \text{если } i \not\equiv 0, t-1 \ (\operatorname{mod} t), \\ \Omega^3(S_i) = S_{i+(n+1)t+2}, & \text{если } i \equiv t-1 \ (\operatorname{mod} t), \\ \Omega^{2t-1}(S_i) = S_{i+t^2}, & \text{если } i \equiv 0 \ (\operatorname{mod} t). \end{cases}$$

Если $j \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod} t)$, то $(t-1)$-кратная итерация этого отображения дает

$$\Phi^{t-1}(S_j) = \Omega^N(S_j) = S_i,$$

где $N = 2(t-2)+3 = 2t-1$, $i = j+(t-2)(t+1)+(n+1)t+2 = j+t(t+n)$. Кроме того, ввиду предложения 3, в) для $j \equiv 0 \ (\operatorname{mod} t)$ имеем $\Omega^{2t-1}(S_j) = S_{j+t^2}$. Поэтому для любых $i, j \in \mathbb{Z}_{2nt}$ и любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_R^{m+2t-1}(S_j, S_{\sigma(i)}) &\simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^{m+2t-1}(S_j), S_{\sigma(i)}) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_j), \Omega^{-(2t-1)}(S_{\sigma(i)})) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_j), S_i) \simeq \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i). \end{aligned}$$

Следовательно, если $Q_m = \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{d_{i,j}}$, то ввиду леммы 2 имеем $Q_{m+2t-1} = \bigoplus_{i,j} P_{\sigma(i),j}^{d_{i,j}}$, откуда вытекает требуемое утверждение. $\square$

## §3. Доказательство точности начального отрезка комплекса

Далее всюду мы предполагаем, что $n > 1$. Для случая, когда $n = 1$, в наших последующих рассуждениях требуются минимальные изменения, и мы предоставляем это сделать читателю.

В этом параграфе мы сначала убедимся, что в последовательности (7) имеем $d_m d_{m+1} = 0$ для $m < 2t-2$. Затем доказывается точность этой последовательности в членах $Q_m$ для $m \leqslant 2t-2$.

Шаг 1. Докажем, что $d_{2m}d_{2m+1} = 0$ для $0 \leqslant m \leqslant t-2$. Надо перемножить две матрицы дифференциалов (относительно фиксированных прямых разложений модулей $Q_m$ из (1), (2), (3)). Обозначим через $A$ матрицу дифференциала $d_{2m}$, через $B$ матрицу $d_{2m+1}$. Разобъём $A$ и $B$ на блоки следующим образом:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|l}
\hline
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & n \\
\hline
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 2n(t-m-2) \\
\hline
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 2n \\
\hline
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 2mn \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{2n} & \multicolumn{1}{c}{2n(t-m-2)} & \multicolumn{1}{c}{2n} & \multicolumn{1}{c}{2mn} &
\end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|l}
\hline
B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 2n \\
\hline
B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 2n(t-m-2) \\
\hline
B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 2n \\
\hline
B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & 2n \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{2n(t-m-2)} & \multicolumn{1}{c}{2n} & \multicolumn{1}{c}{2mn} &
\end{array}$$

(справа и снизу подписаны размеры блоков).

Из описания матриц дифференциалов получаем, что $A_{12} = A_{23} = A_{24} = A_{34} = A_{42} = B_{23} = B_{24} = B_{34} = B_{41} = B_{42} = 0$. Далее, перемножая матрицы, получим

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\
\hline
C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\
\hline
C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\
\hline
C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \\
\hline
\end{array}$$

где

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{13}B_{31}; && C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{13}B_{32};\\
&C_{13} = A_{11}B_{13} + A_{13}B_{33} + A_{14}B_{43}; && C_{14} = A_{11}B_{14} + A_{14}B_{44};\\
&C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}; && C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22};\\
&C_{23} = A_{21}B_{13}; && C_{24} = A_{21}B_{14};\\
&C_{31} = A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31}; && C_{32} = A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32};\\
&C_{33} = A_{31}B_{13} + A_{33}B_{33}; && C_{34} = A_{31}B_{14};\\
&C_{41} = A_{41}B_{11} + A_{43}B_{31}; && C_{42} = A_{41}B_{12} + A_{43}B_{32};\\
&C_{43} = A_{41}B_{13} + A_{43}B_{33} + A_{44}B_{43}; && C_{44} = A_{41}B_{14} + A_{44}B_{44}.
\end{aligned}
$$

Проверим, что $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{13}B_{31} = 0$. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно.

(а) Вычислим $A_{11}B_{11}$.

$i$-ая строка подматрицы $A_{11}$ содержит следующие ненулевые компоненты:

$i$-ую $-a_{(i+m)t+m}a_{(i+m)t+m-1}\dots a_{(i+m)t} \otimes e_{it}$,

$(i+n)$-ую $-a_{(i+m+n)t+m}a_{(i+m+n)t+m-1}\dots a_{(i+m+n)t} \otimes e_{it}$;

$j$-ый столбец в $B_{11}$ содержит следующие ненулевые компоненты:

$j$-ую $a_{(j+m+1)t-1}\dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes e_{jt}$,

$(j+n)$-ую $a_{(j+m+1+n)t-1}\dots a_{(j+m+n)t+m+1} \otimes e_{jt}$.

Получаем, что, если $i \neq j$, то $i$-ая строка $A_{11}$, домноженная на $j$-ый столбец $B_{11}$, даёт нуль, так как ненулевые слагаемые у них на разных позициях; если $i = j$, то $i$-ая строка $A_{11}$, домноженная на $i$-ый столбец $B_{11}$, даёт $-a_{(i+m+1)t-1}\dots a_{(i+m)t} \otimes e_{it} - a_{(i+m+1+n)t-1}\dots a_{(i+m+n)t} \otimes e_{it} = 0$, так как сумма параллельных путей – нуль.

Таким образом, $A_{11}B_{11} = 0$.

(б) Вычислим $A_{13}B_{31}$.

$i$-ая строка подматрицы $A_{13}$ содержит следующие ненулевые компоненты:

$k$-ую $-e_{(k+m+1)t} \otimes a_{(k+1)t-1}\dots a_{(k+1)t-m-1}$,

$(k+n)$-ую $-e_{(k+m+1)t} \otimes a_{(k+1+n)t-1}\dots a_{(k+1+n)t-m-1}$ (где $k = (i-1)_n$);

$j$-ый столбец в $B_{31}$ содержит следующие ненулевые компоненты:

$j$-ую $-e_{(j+m+1)t} \otimes a_{jt+t-m-2}\dots a_{jt}$,

$(j+n)$-ую $-e_{(j+m+1)t} \otimes a_{(j+n)t+t-m-2} \ldots a_{(j+n)t}$.

Получаем, что, если $k \neq j$, то $i$-ая строка $A_{13}$, домноженная на $j$-ый столбец $B_{31}$, даёт нуль, так как ненулевые слагаемые у них на разных позициях; если $k = j$, то $i$-ая строка $A_{13}$, домноженная на $j$-ый столбец $B_{31}$, даёт $-e_{(k+m+1)t} \otimes a_{(k+1)t-1} \ldots a_{kt} - e_{(k+m+1)t} \otimes a_{(k+1+n)t-1} \ldots a_{(k+n)t} = 0$, так как сумма параллельных путей – нуль.

Таким образом, $A_{13}B_{31} = 0$.

Из (а) и (б) следует, что $C_{11} = 0$.

Аналогично доказывается что все остальные $C_{ij}$ равны нулю (соответствующие вычисления можно найти в [7]).

Шаг 2: $d_{2m+1}d_{2m+2} = 0$ для всех $m$ таких, что $0 \leqslant m \leqslant t-3$.

Обозначим через $A$ матрицу дифференциала $d_{2m+1}$, через $B$ матрицу $d_{2m+2}$. Разобъём $A$ и $B$ на блоки следующим образом:

$$A = \begin{array}{ccc|l}
\hline
A_{11} & A_{12} & A_{13} & 2n \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & 2n(t-m-3) \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & 2n \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & 2n \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & 2mn \\
\hline
n & 2n(t-m-2) & 2n(m+1) &
\end{array}$$

$$B = \begin{array}{ccccc|l}
\hline
B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & n \\
B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & 2n(t-m-2) \\
B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & 2n(m+1) \\
\hline
2n & 2n(t-m-3) & 2n & 2n & 2mn &
\end{array}$$

(справа и снизу подписаны размеры блоков).

Из описания матриц дифференциалов получаем, что $A_{23} = A_{33} = A_{51} = A_{52} = B_{12} = B_{24} = B_{25} = B_{32} = 0$. Далее, перемножая матрицы, получим

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\
\hline
C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\
\hline
C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\
\hline
C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\
\hline
C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \\
\hline
\end{array}$$

где

$$
\begin{array}{ll}
C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}; & C_{12} = A_{12}B_{22}; \\
C_{13} = A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33}; & C_{14} = A_{11}B_{14} + A_{13}B_{34}; \\
C_{15} = A_{11}B_{15} + A_{13}B_{35}; & C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}; \\
C_{22} = A_{22}B_{22}; & C_{23} = A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23}; \\
C_{24} = A_{21}B_{14}; & C_{25} = A_{21}B_{15}; \\
C_{31} = A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21}; & C_{32} = A_{32}B_{22}; \\
C_{33} = A_{31}B_{13}; & C_{34} = A_{31}B_{14}; \\
C_{35} = A_{31}B_{15}; & C_{41} = A_{41}B_{11} + A_{42}B_{21} + A_{43}B_{31}; \\
C_{42} = A_{42}B_{22}; & C_{43} = A_{41}B_{13} + A_{42}B_{23} + A_{43}B_{33}; \\
C_{44} = A_{41}B_{14} + A_{43}B_{34}; & C_{45} = A_{41}B_{15} + A_{43}B_{35}; \\
C_{51} = A_{53}B_{31}; & C_{52} = 0; \\
C_{53} = A_{53}B_{33}; & C_{54} = A_{53}B_{34}; \\
C_{55} = A_{53}B_{35}. &
\end{array}
$$

Теперь аналогично рассуждениям шага 1 доказывается, что $C_{ij} = 0$ для всех $i, j$ (см. [7]).

Шаг 3: $d_{2t-3}d_{2t-2} = 0$.

Обозначим через $A$ матрицу дифференциала $d_{2t-3}$, через $B$ матрицу $d_{2t-2}$. Разобъём $A$ и $B$ на блоки следующим образом:

$$
A = \begin{array}{|c|c|l}
\hline
A_{11} & A_{12} & n \\
\hline
A_{21} & A_{22} & n \\
\hline
A_{31} & A_{32} & 2n \\
\hline
A_{41} & A_{42} & 2n(t-2) \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{2n(t-1)} &
\end{array}
$$

$$
B = \begin{array}{|c|c|l}
\hline
B_{11} & B_{12} & n \\
\hline
B_{21} & B_{22} & 2n(t-1) \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{2n(t-1)} &
\end{array}
$$

(справа и снизу подписаны размеры блоков).

Из описания матриц дифференциалов получаем, что $A_{41} = 0$. Далее, перемножая матрицы, получим

$$AB = \begin{array}{|c|c|} \hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline C_{31} & C_{32} \\ \hline C_{41} & C_{42} \\ \hline C_{51} & C_{52} \\ \hline \end{array}$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}; & C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}; \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}; & C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}; \\ C_{31} &= A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21}; & C_{32} &= A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22}; \\ C_{41} &= A_{42}B_{21}; & C_{42} &= A_{42}B_{22}. \end{aligned}$$

Теперь аналогично рассуждениям шага 1 доказываем, что все блоки $C_{ij}$ нулевые.

Шаг 4. Докажем точность комплекса

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_{2t-3}} Q_{2t-2} \xleftarrow{d_{2t-2}} Q_{2t-1}.$$

Введем обозначения: $r = \dim_k R$, $r_0 = \dim_k Q_{2m}$ $(0 \leqslant m \leqslant t-1)$, $r_1 = \dim_k Q_{2m+1}$ $(0 \leqslant m \leqslant t-2)$. Из описания $R$ и $Q_l$ легко получить, что $r = 2n(t^2+t-1)$, $r_0 = 2n(t^3+3t^2-t-1)$, $r_1 = 2n(t+1)(t^2+3t-2)$.

Мы докажем индукцией по $l$, что

$$\operatorname{Im} d_l = \operatorname{Ker} d_{l-1}. \tag{8}$$

Если (8) уже доказано для всех $l \leqslant l_0$ для некоторого $l_0$ такого, что $0 \leqslant l_0 \leqslant 2t-2$, то легко видеть, что для $2s-2 \leqslant l_0$, $s \in \mathbb{N}$, имеем $\dim_k \operatorname{Im} d_{2s-2} = sr_0 - (s-1)r_1 - r$, а для $2s-1 \leqslant l_0$, $s \in \mathbb{N}$ имеем $\dim_k \operatorname{Im} d_{2s-1} = s(r_1 - r_0) + r$. Таким образом, достаточно доказать, что если $l_0$ чётно: $l_0 = 2m-2$, то

$$\dim_k \operatorname{Im} d_{2m-2} \geqslant mr_0 - (m-1)r_1 - r, \tag{9}$$

а если $l_0$ нечётно: $l_0 = 2m-1$, то

$$\dim_k \operatorname{Im} d_{2m-1} \geqslant m(r_1 - r_0) + r. \tag{10}$$

Действительно, если (9) уже доказано, то

$$\begin{aligned}\dim_k \operatorname{Ker} d_{2m-3} &= \dim_k Q_{2m} - \dim_k \operatorname{Im} d_{2m-3}\\ &= r_0 - ((m-1)(r_1 - r_0) + r)\\ &= mr_0 - (m-1)r_1 - r \leqslant \dim_k \operatorname{Im} d_{2m-2}.\end{aligned}$$

Аналогично рассуждаем, если $l_0 = 2m-1$ и выполняется (10).

Шаг 4.1. Докажем, что при $0 \leqslant m \leqslant t-2$

$$\dim_k \operatorname{Im} d_{2m} \geqslant (m+1)r_0 - mr_1 - r = 2n(t^3 + 2t^2 - 2t - mt^2 - 2mt + m).$$

Из описания $d_{2m}$ видим, что $\operatorname{Im} d_{2m}$ порождается как $\Lambda$-модуль элементами:

$$\begin{aligned}A_j^{(ev)} &= -a_{(j+m)t+m}a_{(j+m)t+m-1}\ldots a_{(j+m)t} \otimes e_{jt} + e_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt}\\ &+ \sum_{j_1=t-m}^{t-1} a_{(j+m)t+m}a_{(j+m)t+m-1}\ldots a_{(j+m-1)t+j_1+m+1}\\ &\otimes a_{(j+n)t+j_1-1}\ldots a_{(j+n)t} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2n-1);\end{aligned} \tag{11}$$

$$B_{i_2,j_2}^{(ev)} = -a_{(i_2+m)t+j_2+m} \otimes e_{i_2t+j_2} + e_{(i_2+m)t+j_2+m+1} \otimes a_{i_2t+j_2} \tag{12}$$

$(0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1,\ 1 \leqslant j_2 \leqslant t-m-2)$;

$$\begin{aligned}C_{i_2}^{(ev)} &= -e_{(i_2+m+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1}\ldots a_{(i_2+1)t-m-1}\\ &+ a_{(i_2+m+1)t-1} \otimes e_{i_2t+t-m-1}\\ &+ \sum_{j_1=t-m}^{t-1} a_{(i_2+m+1+n)t-1}\ldots a_{(i_2+m-1+n)t+j_1+m+1}\\ &\otimes a_{i_2t+j_1-1}\ldots a_{i_2t+t+m-1} \quad (0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1);\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}D_{i_2,j_2} &= -a_{(i_2+m+n)t+j_2+m}\ldots a_{(i_2+m+1+n)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1}\ldots a_{i_2t+j_2}\\ &+ \sum_{j_1=t-m}^{j_2} a_{(i_2+m+n)t+j_2+m}\ldots a_{(i_2+m+n)t+j_1+m+1} \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1}\ldots a_{i_2t+j_2}\\ &+ \sum_{j_1=j_2}^{t-1} a_{(i_2+m+n)t+j_2+m}\ldots a_{(i_2+m-1+n)t+j_1+m+1} \otimes a_{i_2t+j_1-1}\ldots a_{i_2t+j_2}\end{aligned} \tag{14}$$

$(0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1,\ t-m \leqslant j_2 \leqslant t-1)$.

Построим отображение $\tau : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}_{2nt} \otimes \mathbb{Z}_{2nt}$ следующим образом: тензору $a \otimes b \in \Lambda$ сопоставим пару $(i, j)$, где $i$ – номер вершины, в которой начинается путь $a$, а $j$ – вершина, в которой заканчивается $b$. Заметим, что если $\tau(a \otimes b) \neq \tau(c \otimes b)$, то $a \otimes b$ и $c \otimes d$ линейно независимы. Также ясно, что $\tau(a \otimes b) = \tau((c \otimes d)(a \otimes b))$, если $(c \otimes d)(a \otimes b) \neq 0$.

(a) Найдём линейно независимые элементы подмодуля модуля $Q_{2m}$, порождённого элементами вида (12).

Каждый элемент вида (12) даёт ненулевой элемент после умножения на тензор, левая компонента которого – путь, начинающийся в вершине $(i_2+m)t + j_2 + m + 1$, а правая – путь, заканчивающийся в вершине $i_2 t + j_2$, причём сумма длин правого и левого путей меньше, чем $2t$. Обозначим такой тензор $\{r, l\}_{i_2, j_2}$ ($l$ – длина левого пути, $r$ – правого). Всего тензоров такого вида $(t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t$. Значит, из всех путей вида (12) домножением на соответствующие тензоры, получаем $2n(m+1)(t^2+2t)$ ненулевых элементов. Теперь надо выделить среди них линейно независимые. Для этого надо найти все минимальные линейные комбинации вида $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i t_i w_i$ ($\alpha_i \in k, t_i$ – тензор, $w_i$ – элемент вида (12)), которые равны нулю.

Для $s = 2$ линейные комбинации имеют вид

$$\{t, t-1\}_{i_2, j_2} B^{(ev)}_{i_2, j_2} + \{t-1, t\}_{i_2, j_2+1} B^{(ev)}_{i_2, j_2+1};$$

– всего таких комбинаций $2n(t-m-3)$.

Для $s = 3$ линейные комбинации имеют вид

$$\{t, t-2\}_{i_2, j_2} B^{(ev)}_{i_2, j_2} + \{t-1, t-1\}_{i_2, j_2+1} B^{(ev)}_{i_2, j_2+1} + \{t-2, t\}_{i_2, j_2+2} B^{(ev)}_{i_2, j_2+2};$$

– всего таких комбинаций $2n(t-m-4)$, и т. д.

Таким образом, получаем

$$2n(t-m-2)(t^2+2t) - n(t-m-3)(t-m-2) \tag{15}$$

линейно независимых элементов.

Так как $B^{(ev)}_{i_2, j_2}$ – линейная комбинация двух тензоров, для которых значения $\tau$ равны $((i_2+m)t + j_2 + m, i_2 t + j_2)$ или $((i_2+m)t + j_2 + m + 1, i_2 t + j_2 + 1))$, то все полученные линейно независимые элементы состоят из тензоров, для которых $\tau$ равно

$((i_2+m)t+j_2+m, i_2t+j_2)$ или $((i_2+m)t+j_2+m+1, i_2t+j_2+1))$ $(0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1, 1 \leqslant j_2 \leqslant t-m-2, 0 \leqslant m \leqslant t-2)$.

(б) Найдём линейно независимые элементы подмодуля модуля $Q_{2m}$, порождённого элементами вида (11) и (12). Среди элементов вида (11) выделим следующие элементы (как обычно, пустой путь отождествляется с подходящим идемпотентом):

$$\big(a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}\big) A_j^{(ev)} \qquad (16)$$

$$(0 \leqslant l \leqslant t-m-2,\ 0 \leqslant r \leqslant t);$$

$$\big(a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{(j+n)t-1} \dots a_{(j+n)t-r}\big) A_j^{(ev)} \qquad (17)$$

$$(0 \leqslant l \leqslant t-m-2,\ 1 \leqslant r \leqslant t-1);$$

$$F^1_{j,r} = \big(a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}\big) A_j^{(ev)}, \qquad (18)$$

$$F^2_{j,r} = \big(a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{(j+n)t-1} \dots a_{(j+n)t-r}\big) A_j^{(ev)}, \qquad (19)$$

где $0 \leqslant r \leqslant t$ (здесь, как обычно, индекс $j$ определен по модулю $2n$);

$$\big(a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}\big) A_j^{(ev)}, \qquad (20)$$

где $t-m \leqslant l \leqslant t,\ r \leqslant m+1$;

$$\big(a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{(j+n)t-1} \dots a_{(j+n)t-r}\big) A_j^{(ev)}, \qquad (21)$$

где $t-m \leqslant l \leqslant t,\ l+r<t$.

Элементы вида (16) и (17) линейно независимы по модулю линейной оболочки $\mathcal{L}_1$ элементов, указанных в п. (а), так как каждый из них содержит слагаемое (полученное из первого тензора) $a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}$, для которого $\tau$ равно $((j+m)t, jt)$, а среди элементов из п. (а) слагаемых с таким значением $\tau$ не встречается. Таким образом, из (16), (17) получаем дополнительно $4nt(t-m-1)$ элементов вида.

Далее, если $r \geqslant m+2$, то элементы $F^1_{j,r}$ и $F^2_{j+n,r}$ линейно зависимы по модулю $\mathcal{L}_1$:

$$F^1_{j,r} + F^2_{j+n,r} = -\sum_{k=0}^{t-r} \{t-m-2-k, r+k\}_{j,k} B^{(ev)}_{j,k}.$$

С другой стороны, $F^1_{j,r} \notin \mathcal{L}_1$, поскольку этот элемент содержит слагаемое $a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}$. По этим же причинам $F^2_{j,r} \notin \mathcal{L}_1$ . Но у $F^1_{j,r}$ и $F^2_{j+n,r}$ первые слагаемые совпадают. Осталось показать, что

$$F^1_{j,r} + F^2_{j+n,r} \notin \mathcal{L}_1 \tag{22}$$

при $r < m-2$. Элемент $F^1_{j,r}$ содержит слагаемое $a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt} \dots a_{jt-r}$, и для доказательства (22) достаточно показать, что $a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt} \dots a_{jt-r} \notin \mathcal{L}_1$. Если $m+3 \leqslant t$, то этот тензор встречается в качестве слагаемого в $\{t-m-2, r+1\}_{j,1} B^{(ev)}_{j,1}$, но тогда здесь есть и слагаемое $a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+2} \otimes a_{jt+1} \dots a_{jt-r}$ (поскольку $r < t$). Если $m+4 \leqslant t$, то последнее слагаемое встречается в $\{t-m-3, r+2\}_{j,2} B^{(ev)}_{j,2}$, но там есть ещё одно слагаемое. Рассуждая так далее, получим, что если $t-m-2+r+1 < t+1$, то действительно $a_{(j+m+1)t-1} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt} \dots a_{jt-r} \notin \mathcal{L}_1$. Таким образом, получаем дополнительно $2n(2m+3)+n(2t-2m-3)$ линейно независимых элементов вида (18) и (19).

Элемент вида (20) содержит тензор $a_{(j+m)t+m+l} \dots a_{(j+m)t+m+1} \otimes a_{jt} \dots a_{jt-r}$, который, как это следует из предыдущего рассуждения, не принадлежит $\mathcal{L}_1$, если $t-m-2+r+1 < t+1$. Следовательно, получаем ещё $2n(m+1)(m+2)$ линейно независимых элементов.

Наконец, элементы вида (21) содержат слагаемые, для которых значения функции $\tau$ равны $((j+m-1)t+j_1+m+1, (j+n)t+j_1)$, и на рассмотренных выше элементах такие значения $\tau$ не принимаются. Следовательно, получаем дополнительно еще $nm(m+1)$ элементов.

Таким образом, среди элементов вида (16)–(21) мы указали дополнительно

$$4nt(t-m-1)+2n(2m+3)+n(2t-2m-3)+2n(m+1)(m+2)+nm(m+1)$$
$$= n(4t^2-4mt-2t+3m^2+9m+7) \tag{23}$$

линейно независимых элементов.

(в) Найдём линейно независимые элементы подмодуля в $Q_{2m}$, порождённого элементами вида (11), (12) и (13).

Среди элементов вида (13) выделим следующие элементы:

$$\begin{aligned}&\bigl(a_{(i_2+m+1)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1)t}\\&\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{(i_2+1)t-m-1-r}\bigr)C_{i_2}^{(ev)}\\&(0\leqslant l\leqslant m,\ 0\leqslant r\leqslant t-m-2);\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\bigl(a_{(i_2+m+1+n)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1+n)t}\\&\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{(i_2+1)t-m-1-r}\bigr)C_{i_2}^{(ev)}\\&(1\leqslant l\leqslant m,\ 0\leqslant r\leqslant t-m-2);\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}G^1_{i_2,l}&=\bigl(a_{(i_2+m+1)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1)t}\\&\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{i_2t}\bigr)C_{i_2}^{(ev)},\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}G^2_{i_2,l}&=\bigl(a_{(i_2+m+1+n)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1+n)t}\\&\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{i_2t}\bigr)C_{i_2}^{(ev)},\end{aligned}\tag{27}$$

где $0\leqslant l\leqslant m$;

$$\begin{aligned}&\bigl(a_{(i_2+m+1)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1)t}\\&\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{(i_2+1)t-m-1-r}\bigr)C_{i_2}^{(ev)},\end{aligned}\tag{28}$$

где $l\geqslant m+1$, $r\leqslant t-m-2$, $l+r<t$.

Элементы вида (24) и (25) линейно независимы по модулю линейной оболочки всех элементов, полученных в пп. (а) и (б), так как на первых слагаемых элементов из (24), (25) функция $\tau$ принимает значения вида $((i_2+m+1)t,(i_2+1)t)$, при этом длина левой компоненты меньше $m+1$, а длина правой компоненты меньше $t$. Таким образом, дополнительно получаем $2n(2m+1)(t-m-1)$ элементов.

Далее, элементы $G^1_{i_2,l}$ и $G^2_{i_2+n,l}$ линейно зависимы по модулю элементов из пп. (а) и (б):

$$G^1_{i_2,l}+G^2_{i_2+n,l}=\bigl(a_{(i_2+m+1)t+l-1}\dots a_{(i_2+m)t+m+1}\otimes e_{i_2t}\bigr)A_{i_2}^{(ev)}+\sum_{k=1}^{t-m-2}\{t+l-m-1-k,k\}_{i_2,k}B^{(ev)}_{i_2,k}.$$

Тогда из множества элементов вида (26), (27) можно выделить $n(2m+1)$ элементов так, что они будут линейно независимы по модулю всех полученных до этого элементов, поскольку значения $\tau$ на первых слагаемых элементов из (26), (27) равны $((i_2+m+1)t, (i_2+1)t)$, при этом длина левой компоненты меньше $m+1$, а длина правой компоненты равна $t$ (отметим, что у $G^1_{i_2,l}$ и $G^2_{i_2+n,l}$ именно эти первые слагаемые совпадают).

Элементы вида (28) содержат слагаемые

$$a_{(i_2+m+1)t+l-1}\dots a_{(i_2+m+1)t-1}\otimes a_{(i_2+1)t-m-2}\dots a_{(i_2+1)t-m-1-r},$$

на которых значения $\tau$ равны $((i_2+m+1)t-1, (i_2+1)t-m-1)$. Такие значения $\tau$ встречаются только на слагаемых из $\{l+1, r-1\}_{i_2,t-m-2}B_{i_2,t-m-2}$. Таким образом, при $l+1+r<t+1$ элементы вида (28) линейно независимы по модулю всех ранее полученных элементов.

Таким образом, среди элементов вида (24)–(28) мы указали дополнительно

$$\begin{aligned}2n(2m+1)(t-m-1)+n(2m+1)+n(t-m)(t-m-1)\\ =n(t^2+2mt+t-3m^2-3m-1)\end{aligned}\tag{29}$$

линейно независимых элементов.

(г) Найдём линейно независимые элементы всего модуля $\operatorname{Im} d_{2m}$. Среди элементов вида (14) выделим следующие элементы:

$$\big(e_{(i_2+m+n)t+j_2+m+1}\otimes a_{i_2t+j_2-1}\dots a_{i_2t+j_2-r}\big)D_{i_2,j_2},\tag{30}$$

где $0\leqslant r\leqslant j_2-t+m$. Получаем $nm(m+1)$ элементов, которые линейно независимы вместе со всеми ранее выделенными элементами. Действительно, значения функции $\tau$ на первых слагаемых элементов из (30) равны $((i_2+m+1)t, (i_2+1)t)$, при этом длина правой компоненты меньше $m+1$.

Итак, мы нашли в $\operatorname{Im} d_{2m}$

$$2n(t^3+2t^2-2t-mt^2-2mt+m)$$

линейно независимых элементов (см. (15), (23), (29)), и, следовательно, $\dim_k \operatorname{Im} d_{2m}\geqslant 2n(t^3+2t^2-2t-mt^2-2mt+m)$.

Шаг 4.2. Докажем, что при $0\leqslant m\leqslant t-2$

$$\dim_k \operatorname{Im} d_{2m+1}\geqslant (m+1)(r_1-r_0)+r=2n(m(t^2+2t-1)+2t^2+3t-2).$$

Из описания $d_{2m+1}$ видим, что $\operatorname{Im} d_{2m+1}$ порождается как $\Lambda$-модуль элементами:

$$\begin{aligned}
A_j^{(od)} &= a_{(j+m+1)t-1}\dots a_{(j+m)t+m+1}\otimes e_{jt}\\
&+ a_{(j+m+1+n)t-1}\dots a_{(j+m+n)t+m+1}\otimes e_{jt}\\
&+\sum_{j_1=1}^{t-m-2}\bigl(a_{(j+m+1)t-1}\dots a_{(j+m)t+j_1+m+1}\otimes a_{jt+j_1-1}\dots a_{jt}\\
&+ a_{(j+m+1+n)t-1}\dots a_{(j+m+n)t+j_1+m+1}\otimes a_{(j+n)t+j_1-1}\dots a_{(j+n)t}\bigr)\\
&- e_{(j+m+1)t}\otimes a_{jt+t-m-2}\dots a_{jt}\\
&- e_{(j+m+1)t}\otimes a_{(j+n)t+t-m-2}\dots a_{(j+n)t}
\end{aligned}\tag{31}$$

$(0\leqslant j\leqslant n-1)$;

$$\begin{aligned}
B_{i_2,j_2}^{(od)} &= a_{(i_2+m+1)t+j_2+m}\dots a_{(i_2+m+1)t+m+1}\otimes a_{(i_2+1)t-1}\dots a_{i_2t+j_2}\\
&+\sum_{j_1=j_2}^{t-m-2} a_{(i_2+m+1)t+j_2+m}\dots a_{(i_2+m)t+j_1+m+1}\otimes a_{i_2t+j_1-1}\dots a_{i_2t+j_2}\\
&+\sum_{j_1=1}^{j_2} a_{(i_2+m+1)t+j_2+m}\dots a_{(i_2+m+1)t+j_1+m+1}\\
&\otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1}\dots a_{i_2t+j_2} - a_{(i_2+m+1)t+j_2+m}\dots a_{(i_2+m+1)t}\\
&\otimes a_{i_2t+t-m-2}\dots a_{i_2t+j_2}
\end{aligned}\tag{32}$$

$(0\leqslant i_2\leqslant 2n-1,\ 1\leqslant j_2\leqslant t-m-2)$;

$$C_{i_2,j_2}^{(od)} = e_{(i_2+m+n)t+j_2+m+2}\otimes a_{i_2t+j_2} - a_{(i_2+m+n)t+j_2+m+1}\otimes e_{i_2t+j_2}\tag{33}$$

$(0\leqslant i_2\leqslant 2n-1,\ t-m-1\leqslant j_2\leqslant t-1)$.

Как и на шаге 4.1 доказательства, мы выделим среди элементов вида (31)–(33) подходящее множество элементов, но ради краткости опустим некоторые детали доказательства линейной независимости этого множества, поскольку соответствующие рассуждения аналогичны проведенным на шаге 4.1.

(a) Найдём линейно независимые элементы подмодуля модуля $Q_{2m+1}$, порождённого элементами вида (33).

Каждый элемент вида (33) даёт ненулевой элемент после умножения на тензор, левая компонента которого – путь, начинающийся в вершине $(i_2+m+n)t+j_2+m+2$, а правая – путь, заканчивающийся в вершине $i_2t + j_2$, причём сумма длин правого и левого путей меньше, чем $2t$. Всего тензоров такого типа $(t + 1)^2 - 1 = t^2 + 2t$. Значит, из всех путей вида (33) умножением на соответствующие тензоры, получаем $2n(m + 1)(t^2 + 2t)$ ненулевых элементов. Теперь надо выделить среди них линейно независимые. Для этого надо найти все минимальные линейные комбинации вида $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i t_i w_i$ ($\alpha_i \in k$, $t_i$ – тензор, $w_i$ – элемент вида (33)), которые равны нулю.

Для $s = 2$ линейные комбинации имеют вид

$$\{t, t-1\}_{i_2,j_2} C^{(od)}_{i_2,j_2} + \{t-1, t\}_{i_2,j_2+1} C^{(od)}_{i_2,j_2+1}$$

– всего таких комбинаций $2nm$.

Для $s = 3$ линейные комбинации имеют вид

$$\{t, t-2\}_{i_2,j_2} C^{(od)}_{i_2,j_2} + \{t-1, t-1\}_{i_2,j_2+1} C^{(od)}_{i_2,j_2+1} + \{t-2, t\}_{i_2,j_2+2} C^{(od)}_{i_2,j_2+2}$$

– всего таких комбинаций $2n(m-1)$, и т. д. Таким образом, получаем $2n(m+1)(t^2+2t) - mn(m+1)$ линейно независимых элементов.

(б) Найдём линейно независимые элементы подмодуля модуля $Q_{2m+1}$, порождённого как $\Lambda$-модуль элементами вида (31) и (33).

Среди элементов вида (31) выделим следующие элементы:

$$\big(a_{(j+m+1)t+l-1} \dots a_{(j+m+1)t} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}\big) A^{(od)}_j, \tag{34}$$

$$\big(a_{(j+m+1+n)t+l-1} \dots a_{(j+m+1+n)t} \otimes a_{(j+n)t-1} \dots a_{(j+n)t-r}\big) A^{(od)}_j, \tag{35}$$

где $0 \leqslant r, l \leqslant t - 1$ и $r + l \leqslant t + m + 1$;

$$\big(a_{(j+m+1)t+l-1} \dots a_{(j+m+1)t} \otimes a_{(j+n)t-1} \dots a_{(j+n)t-r}\big) A^{(od)}_j, \tag{36}$$

$$\big(a_{(j+m+1+n)t+l-1} \dots a_{(j+m+1+n)t} \otimes a_{jt-1} \dots a_{jt-r}\big) A^{(od)}_j, \tag{37}$$

$1 \leqslant r, l \leqslant t - 1$, $r + l \leqslant m + 1$; а также

$$\big(a_{(j+m+2)t-1} \dots a_{(j+m+1)t} \otimes e_{jt}\big) A^{(od)}_j. \tag{38}$$

Множество элементов вида (34) и (35) линейно независимо по модулю элементов, выделенных в п. (а). Действительно, если $m \neq t-2$, то каждый элемент из (34) или (35) имеет хотя бы одно слагаемое, на котором функция $\tau$ равна $((j+m)t+j_1+m+1, jt+j_1)$ или $((j + m + n)t + j_1 + m + 1, (j + n)t + j_1)$, где $0 \leqslant m < t -$

2, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant j_1 \leqslant t-m-2$. Но элементы, полученные в п. (а), не имеют в составе тензоров с такими значениями $\tau$. Если же $m = t-2$, то в элементах вида (34), (35) можно найти слагаемые, для которых значения $\tau$ таковы же, как для некоторых слагаемых в подходящих элементах $C_{i_2,j_2}$. Но, как легко видеть, сами соответствующие слагаемые не совпадают. Таким образом, из элементов (34), (35) выделено дополнительно $n(t^2+t(2m+5)-(m+2)(m+3)-1)$ линейно независимых элементов.

Теперь докажем линейную независимость элементов вида (36) по модулю всех полученных до этого элементов (такое же утверждение для элементов вида (37) доказывается аналогично). Линейная независимость с элементами из (34), (35) ясна. Далее, слагаемое

$$a_{(j+m+1)t+l-1}\cdots a_{(j+m)t+m+1}\otimes a_{(j+n)t-1}\cdots a_{(j+n)t-r} \tag{39}$$

из элемента (36) встречается также в $C^{(od)}_{j+n-1,t-1}$, умноженном на тензор типа $\{t+l-m-1,r-1\}_{j+n-1,t-1}$. Для элемента (39) сумма длин правого и левого путей меньше $t+1$, и поэтому этот элемент не лежит в линейной оболочке $\mathcal{L}_2$ элементов, полученных в п. (а). С другой стороны, $\{t+l-m-1,r-1\}_{j+n-1,t-1}C^{(od)}_{j+n-1,t-1}$ даёт линейную зависимость с тензором, у которого длина левого пути на единицу меньше, а правого на единицу больше. Следовательно, элемент (39) можно по модулю элементов, указанных в п. (а), заменить на элемент, у которого длина левого пути меньше, а у второго слагаемого длина левого пути больше, чем у первого, и т. д. Отсюда вытекает линейная независимость элементов из (36) по модулю $\mathcal{L}_2$. Таким образом, получаем дополнительно $nm(m+1)$ линейно независимых элементов.

Наконец, элемент вида (38) равен

$$\begin{gathered}-a_{(j+m+2)t-1}\cdots a_{(j+m+1)t}\otimes a_{jt+t-m-2}\cdots a_{jt}\\ -a_{(j+m+2)t-1}\cdots a_{(j+m+1)t}\otimes a_{(j+n)t+t-m-2}\cdots a_{(j+n)t},\end{gathered} \tag{40}$$

и ясно, что оба таких слагаемых линейно независимы по модулю $\mathcal{L}_2$. Отсюда легко получаем, что элементы из (38) линейно независимы по модулю всех ранее указанных элементов. Таким образом, среди элементов вида (34)–(38) мы указали дополнительно $n(t^2+2mt+5t-4m-6)$ линейно независимых элементов.

(в) Найдём линейно независимые элементы всего модуля $\operatorname{Im} d_{2m+1}$. Среди элементов вида (32) выделим следующие элементы

$$\left(e_{(i_2+m+1)t+j_2+m+1} \otimes a_{i_2t+j_2-1} \dots a_{i_2t+j_2-r}\right) B^{(od)}_{i_2,j_2}, \tag{41}$$

где $0 \leqslant r \leqslant j_2 - 1$.

Заметим, что значение функции $\tau$ на первом слагаемом из $B^{(od)}_{i_2,j_2}$ равно $((i_2+m+1)t+m+1,\ (i_2+1)t)$. Все слагаемые в $A^{(od)}_j$ с таким же значением $\tau$ имеют левый путь длины $t-m-1$, а для элементов из (41) длина левого пути меньше $t-m-1$. Значит, первое слагаемое в элементе вида (41) не может встретиться среди слагаемых элементов подмодуля, порождённого элементами $A^{(od)}_j$. В элементах $C^{(od)}_{i_2,j_2}$ также нет слагаемых со значением $\tau$, равным $((i_2+m+1)t+m+1,\ (i_2+1)t)$, что завершает доказательство линейной независимости множества всех введенных выше элементов из $\operatorname{Im} d_{2m+1}$. Отсюда следует, что $\dim_k \operatorname{Im} d_{2m+1} \geqslant 2n(m(t^2+2t-1)+2t^2+3t-2)$.

Шаг 4.3. Докажем, что

$$\dim_k \operatorname{Im} d_{2t-2} \geqslant \dim_k R = 2n(t^2+t-1).$$

Из описания $d_{2t-2}$ видим, что $\operatorname{Im} d_{2t-2}$ порождается как $\Lambda$-модуль элементами:

$$\begin{aligned} A_j &= -a_{(j+t)t-1} \dots a_{(j+t-1)t} \otimes e_{jt} + e_{(j+t)t} \otimes a_{(j+1)t-1} \dots a_{jt} \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^{t-1} \big(a_{(j+t)t-1} \dots a_{(j+t-1)t+j_1} \otimes a_{(j+n)t+j_1-1} \dots a_{(j+n)t} \\ &\quad - a_{(j+n+t)t-1} \dots a_{(j+t-1+n)t+j_1} \otimes a_{jt+j_1-1} \dots a_{jt}\big) \end{aligned} \tag{42}$$

$(0 \leqslant j \leqslant n-1)$;

$$\begin{aligned} B_{i_2,j_2} &= -a_{(i_2+t+n)t+j_2-1} \dots a_{(i_2+t+n)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2t+j_2} \\ &+ \sum_{j_1=1}^{j_2} a_{(i_2+t+n)t+j_2-1} \dots a_{(i_2+t+n)t+j_1} \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2} \\ &+ \sum_{j_1=j_2}^{t-1} a_{(i_2+t+n)t+j_2-1} \dots a_{(i_2+t-1+n)t+j_1} \otimes a_{i_2t+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2} \end{aligned} \tag{43}$$

$(0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1,\ 1 \leqslant j_2 \leqslant t-1)$.

(а) Найдём линейно независимые элементы подмодуля в $Q_{2t-2}$, порождённого элементами вида (42).

Среди элементов такого вида выделим следующие элементы:

$$\big(a_{(j+t)t+l-1}\dots a_{(j+t)t}\otimes a_{(j+n)t-1}\dots a_{(j+n)t-r}\big)A_j, \tag{44}$$

$$\big(a_{(j+m)t+m+l}\dots a_{(j+m)t+m+1}\otimes a_{(j+n)t-1}\dots a_{(j+n)t-r}\big)A_j, \tag{45}$$

где $0 \leqslant l, r \leqslant t-1$, $l+r \leqslant t$; а также

$$\big(a_{(j+t+1)t-1}\dots a_{(j+t)t}\otimes e_{jt}\big)A_j. \tag{46}$$

Аналогично предыдущим шагам доказательства проверяется линейная независимость элементов из (44)–(46), и, таким образом, получаем

$$n(t^2+3t-3)+n = n(t^2+3t-2)$$

линейно независимых элементов.

(б) Наконец, укажем линейно независимые элементы всего модуля $\operatorname{Im} d_{2t-2}$. Среди элементов вида (43) выделим следующие элементы:

$$\big(e_{(i_2+t+n)t+j_2}\otimes a_{i_2t+j_2-1}\dots a_{i_2t+j_2-r}\big)B_{i_2,j_2}, \tag{47}$$

где $0 \leqslant r \leqslant j_2-1$.

Аналогично предыдущему доказывается, что элементы из (47) линейно независимы по модулю элементов, указанных в п. (а).

Итак, в $\operatorname{Im} d_{2t-2}$ найдено

$$n(t^2+3t-2)+nt(t-1) = 2n(t^2+t-1)$$

линейно независимых элементов, и, следовательно, $\dim_k \operatorname{Im} d_{2t-2} \geqslant 2n(t^2+t-1)$.

## §4. Скрученные бимодули

В этом параграфе мы приводим независимое от [4] доказательство того, что сизигия $\Omega^{2t-1}({}_\Lambda R) = \operatorname{Im} d_{2t-2}$ изоморфна скрученному бимодулю ${}_1R_\sigma$ (ср. [4, теорема 3.5]), и это позволит завершить доказательство теоремы 1.

Пусть $\lambda, \mu$ – некоторые автоморфизмы алгебры $R$. Для $R$-бимодуля $M$ скрученным бимодулем назовем линейное пространство $M$, на котором левое и правое действия алгебры $R$ (обозначаемые звездочкой) заданы следующим образом:

$$r * m * s = \lambda(r) \cdot m \cdot \mu(s) \quad \text{для} \quad r, s \in R \quad \text{и} \quad m \in M.$$

Такой скрученный бимодуль обозначаем через ${}_{\lambda}M_{\mu}$.

Для автоморфизма $\lambda$ алгебры $R$ считаем, что он действует и на вершинах колчана алгебры $R$ так, что $\lambda(i) = \lambda(e_i)$. Введем обозначение $\widetilde{\lambda} = \lambda \otimes 1$ для автоморфизма алгебры $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes R^{\mathrm{op}}$, индуцированного действием $\lambda$ на первом сомножителе. Если $\varphi\colon P_{i,j} \to P_{r,s}$ – гомоморфизм умножения (справа) на элемент $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_r \otimes e_s)$, то умножение на $\widetilde{\lambda}(w)$ задает гомоморфизм $\varphi^{(\lambda)}\colon P_{\lambda(i),j} \to P_{\lambda(r),s}$.

Пусть $d\colon U \to V$ – гомоморфизм между проективными $\Lambda$-модулями, где

$$U = \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{l_{i,j}}, \quad V = \bigoplus_{r,s} P_{r,s}^{m_{l,s}}. \tag{48}$$

Можно считать, что компоненты матрицы гомоморфизма $d$ относительно прямых разложений из (48) – это элементы алгебры $\Lambda$ (точнее, это гомоморфизмы умножения на соответствующие элементы). Построим гомоморфизм

$$d^{(\lambda)}\colon \bigoplus_{i,j} P_{\lambda(i),j}^{l_{i,j}} \to \bigoplus_{r,s} P_{\lambda(r),s}^{m_{l,s}},$$

матрица которого (относительно указанных выше прямых разложений) получена из матрицы гомоморфизма $d$ применением автоморфизма $\widetilde{\lambda}$ к каждой её компоненте.

**Лемма 6.** *Сохраняя предыдущие обозначения, имеем*

$$\operatorname{Coker} d^{(\lambda)} \simeq {}_{\lambda^{-1}}(\operatorname{Coker} d)_1.$$

**Доказательство.** Легко видеть, что отображение $\rho\colon P_{\lambda(i),j} \to {}_{\lambda^{-1}}(P_{i,j})_1$, такое, что $\rho(p) = \widetilde{\lambda}^{-1}(p)$ для $p \in P_{\lambda(i),j}$, является изоморфизмом бимодулей. Следовательно,

$${}_{\lambda^{-1}}U_1 \simeq \bigoplus_{i,j} P_{\lambda(i),j}^{l_{i,j}}, \quad {}_{\lambda^{-1}}V_1 \simeq \bigoplus_{r,s} P_{\lambda(r),s}^{m_{r,s}},$$

откуда вытекает, что $\operatorname{Coker} d^{(\lambda)} \simeq {}_{\lambda^{-1}}(\operatorname{Coker} d)_1$. □

Поскольку

$$\begin{aligned}
&A_j = (e_{(j+t)t} \otimes e_{jt})A_j, \ B_{i_2,j_2} = (e_{(i_2+t+n)t+j_2} \otimes e_{i_2t+j_2})B_{i_2,j_2},\\
&(a_{(j+t)t} \otimes e_{jt})A_j = (e_{(j+t)t+1} \otimes a_{(j+n)t})B_{j+n,1},\\
&(a_{(j+n+t)t} \otimes e_{jt})A_j = -(e_{(j+n+t)t+1} \otimes a_{jt})B_{j,1},\\
&(e_{(j+t)t} \otimes a_{jt-1})A_j = -(a_{(j+n+t)t-1} \otimes e_{jt-1})B_{j-1,t-1},\\
&(e_{(j+t)t} \otimes a_{(j+n)t-1})A_j = (a_{(j+t)t-1} \otimes e_{(j+n)t-1})B_{j+n-1,t-1}
\end{aligned}$$

для $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1$, $0 \leqslant j_2 \leqslant t-1$, а также

$$(a_{(i_2+t+n)t+j_2} \otimes e_{i_2t+j_2})B_{i_2,j_2} = (e_{(i_2+t+n)t+j_2+1} \otimes a_{i_2+j_2})B_{i_2,j_2+1}$$

для $0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1$, $1 \leqslant j_2 \leqslant t-2$, то можно построить $\Lambda$-гомоморфизм

$$f\colon \operatorname{Im} d_{2t-2} \to {}_1R_\sigma,$$

такой, что

$$\begin{aligned}
&f(A_j) = \sigma(e_{jt}), \quad 0 \leqslant j \leqslant t-1,\\
&f(B_{i_2,j_2}) = \sigma(e_{i_2t+j_2}), \quad 0 \leqslant i_2 \leqslant 2n-1, \quad 1 \leqslant j_2 \leqslant t-1.
\end{aligned}$$

Ясно, что $f$ – изоморфизм.

Кроме того, как легко проверить, имеется изоморфизм скрученных $R$-бимодулей

$$g\colon {}_1R_\sigma \to {}_{\sigma^{-1}}R_1,$$

такой, что $g(r) = \sigma^{-1}(r)$ для $r \in R$.

Таким образом, $\operatorname{Im} d_{2t-2} \simeq {}_{\sigma^{-1}}R_1$, и применение леммы 6 завершает доказательство теоремы 1.

## Литература


1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite selfinjective algebras of class $A_n$.* — Lect. Notes Math. **832** (1980), 449–520.
3. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class $A_n$.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
4. K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class $A_n$, II.* — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.

5. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Алгебра Йонеды алгебры Мёбиуса*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 90–112.
6. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*. — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.
7. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса*. — http://www.mathsoc.spb.ru/ preprint/2005/index.html#03.

Generalov A. I., Kachalova M. A. Bimodule resolution of Möbius algebra.

The minimal projective bimodule resolution of Möbius algebras that form a class of self-injective algebras of finite representation type is constructed.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 января 2005 г.