Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

**В. А. Ровский**

# О КОРРЕКТНОМ РАЗЛИЧЕНИИ ГАУССОВСКИХ ГИПОТЕЗ. II

## Введение

Обычное для теории вероятностей пренебрежение событиями нулевой вероятности и отождествление "почти совпадающих" подмножеств пространства элементарных исходов $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ во многом связано с тем, что часто приходится иметь дело не с событиями, а со случайными величинами, распределения которых не меняются при переходе к соответственным случайным величинам на произвольной "$\mathrm{mod}\,0$-версии" самого вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Более того, совокупность совместных конечномерных распределений всех случайных величин или даже произвольного порождающего $\mathfrak{F}$ семейства случайных величин, позволяет при естественном допущении, что рассматриваемое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ обладает свойством Лебега–Рохлина, однозначно восстановить пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ с точностью до $\mathrm{mod}\,0$-изоморфизма.

Когда речь заходит о распределениях $\mathbf{P}$ (например, гауссовских), определение и структура которых опираются на некоторые дополнительные структуры пространства $\Omega$ (структуры линейного пространства для гауссовских распределений), вероятностные распределения можно задавать, оперируя с некоторым пространством случайных величин или, что то же самое, с пространством $F$ измеримых функций на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, таких как $L^0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, наделяющихся структурами "согласованной системы конечномерных распределений", которые конкретно могут быть заданы, например с помощью характеристического функционала $\chi : L^0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) \to \mathbf{C}$. При этом изоморфизм двух пространств $F_0$ и $F_1$ с описанными только что структурами влечет изоморфизм булевых алгебр (эквивалентных) событий и, в предположении, что эти вероятностные пространства обладают свойством Лебега–Рохлина (ЛР-свойством), их канонический $\mathrm{mod}\,0$-изоморфизм.

Гауссовские многомерные и особенно бесконечномерные распределения можно описывать в терминах пространства $F$ всех линейных измеримых функционалов на линейном пространстве $E$ с гауссовской мерой. При этом многие важные вопросы, например критерий эквивалентности или сингулярности двух центрированных гауссовских мер на одном линейном пространстве $E$, удобно выражаются в терминах соотношения соответствующих двух гильбертовых норм на пространстве $F$.

Опишем более аккуратно, что в дальнейшем будем понимать под гауссовской центрированной мерой. Пусть $F$ – произвольное сепарабельное гильбертово пространство, со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_F$ и нормой $\|\cdot\|_F$ , сопряженное с гильбертовым пространством $E$. На пространстве $F$ рассмотрим положительно определенный функционал $\chi : F \to \mathbf{C}$, $\chi(f) = \exp\left(\frac{1}{2}\|f\|_F^2\right)$. Этот характеристический функционал является характеристическим функционалом слабого гауссовского распределения на $F$, часто называемого белым шумом. Как известно, соответствующее этому характеристическому функционалу гауссовское вероятностное распределение $\gamma$ может быть получено как вероятностное распределение в $\widehat{E}$ – пополнении гильбертова пространства $E$ по какой-нибудь существенно более слабой гильбертовой норме, настолько более слабой, что оператор вложения $E \to \widehat{E}$ является оператором Гильберта–Шмидта в нормах $E$ и $\widehat{E}$. При этом гильбертова норма $\|\cdot\|_F$ оказывается, очевидно, следом $L^2(\gamma)$-нормы на пространстве $F$. Хотя гильбертовость пространства $\widehat{E}$ не обязательна, мы будем ограничиваться именно этим случаем. Пространство $E$ называется ядром возникающей гауссовской меры. Если мы строим пополнение гильбертова пространства $E$ по двум различным гильбертовым нормам, то возникающие линейные пространства с гауссовской мерой оказываются канонически $\bmod 0$-изоморфными, и этот $\bmod 0$-изоморфизм возникает как продолжение тождественного отображения $\mathrm{id} : E \to E$.

Таким образом, задание гауссовской центрированной меры означает задание гильбертова пространства $E$.

Нас интересует пара центрированных взаимно абсолютно непрерывных гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на одном пространстве. Если пространства $F_0$ и $F_1$ линейных измеримых функционалов не совпадают, такие гауссовские меры сингулярны, и наше внимание будет сосредоточено на том случае, когда эти пространства совпадают по запасу элементов. В силу гильбертовости, $L^2$-нормы $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$, соответствующие нашим мерам $\gamma_0$ и $\gamma_1$, эквивалентны, но (для несовпадающих мер) различны. Критерий эквивалентности прост (он устанавливается, например, с помощью теоремы Какутани о критерии эквивалентности или сингулярности для бесконечных произведений): меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$ эквивалентны, если спектр отношения $\{\sigma_k^2\}$ соответствующих квадратичных форм (квадратов гильбертовых норм) дискретен, и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sigma_k^2-1)^2$.

В статистической задаче различения двух вероятностных мер (по выборке объема единица) решение определяется по значению отношения правдоподобия в выборочной точке. Если отношение правдоподобия по некоторой норме на пространстве с двумя эквивалентными гауссовскими мерами непрерывно, то мы будем говорить, что задача различения данных двух гауссовских гипотез в этой норме корректна. Конечно, чем слабее норма в пространстве $\widehat{E}$, на котором сосредоточены две наши гауссовские меры, тем меньше шансов, что производная Радона–Никодима (определяемая в принципе с использованием только пары возникающих гильбертовых структур на пространстве $F$ всех измеримых линейных функционалов) окажется по такой норме непрерывной. С другой стороны, необходимое условие гильберт-шмидтовости вложения $E \subset \widehat{E}$ означает, что норма пространства $\widehat{E}$ не должна быть слишком сильной. Всегда ли можно подобрать такую норму, на пространстве $E$, пополнение по которой являлось бы линейным носителем обеих рассматриваемых гауссовских мер, но относительно которой задача различения двух рассматриваемых гауссовских гипотез была бы корректно поставленной?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Таким образом, две гауссовские меры на одном бесконечномерном линейном пространстве или сингулярны, или эквивалентны, но не могут быть корректно различимы, по крайней мере – с использованием гильбертовых норм, или же эквивалентны и существует гильбертова норма, которая обеспечивает их корректное различение.

## Постановка задачи

Сменим обозначения и коротко сформулируем задачу. Пусть на некотором линейном пространстве $E$ заданы две (эквивалентные) гильбертовы нормы, позволяющие рассматривать эти гильбертовы пространства как ядра $H_{\gamma_0}$ и $H_{\gamma_1}$ некоторых двух эквивалентных гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$, определенных на подмножествах некоторого надпространства нашего линейного пространства $E$. Из условия эквивалентности мер следует, что ядра совпадают по запасу элементов, а соответствующие гильбертовы нормы эквивалентны.

Пусть $H$ – гильбертово пространство, полученное пополнением ядра по более слабой, чем норма ядра, (пред)гильбертовой норме. Нас будет интересовать вопрос, когда для пары гильбертовых норм на ядре существует такое гильбертово пространство $H \supset H_{\gamma_0}$, что

1. $H$ – линейный носитель мер $\gamma_i$, и, в частности, любой шар имеет положительную меру;

2. $\dfrac{d\gamma_1}{d\gamma_0}$ – отношение правдоподобия наших мер имеет версию, непрерывную в норме $H$.

Введем определение:

**Определение.** *Будем говорить, что статистическая задача различения двух эквивалентных гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ корректна, если существует такое гильбертово пространство $H$, что выполняются свойства 1 и 2, указанные выше.*

Следующая теорема дает критерий корректной различимости гипотез. Доказательство теоремы будет дано в конце работы.

**Теорема 1.** *Пусть $\gamma_0$ и $\gamma_1$ – две эквивалентные гауссовские меры со средними значениями 0 и с (общими по запасу элементов) ядрами $H_{\gamma_0}$ и $H_{\gamma_1}$. Пусть $(\tau_k^2)$ – спектральный тип отношения квадратичных форм, соответствующих квадратам гильбертовых норм на $H_{\gamma_0}$ и $H_{\gamma_1}$ (т.к. меры эквивалентны, то спектр дискретен). Для того чтобы задача различения наших мер была корректной необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tau_k - 1| < \infty$.*

**Замечание 1.** На самом деле, для случая $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tau_k - 1| = \infty$ будет доказано более сильное утверждение: никакая версия отношения правдоподобия не является непрерывной ни в одной точке гильбертова пространства полной меры, в котором любой шар имеет положительную меру. □

**Замечание 2.** Условие эквивалентности двух центрированных гауссовских мер позволяет реализовать общее по запасу элементов ядро этих мер как гильбертово пространство последовательностей $l^2 \subset \mathbf{R}^\infty$ с эквивалентными гильбертовыми весовыми нормами на нем, а сами меры – как продакт-меры в $\mathbf{R}^\infty$, одна из которых стандартная – $\gamma_0 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,1)$, а вторая имеет вид $\gamma_1 = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,\sigma_k^2)$, причем $\{\sigma_k\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - 1)^2 < \infty.$$

Тогда квадратичные формы на ядре $H_{\gamma_0} = l^2$, соответствующие двум гауссовским мерам, имеют вид

$$\mathcal{Q}_0(x,x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

и

$$\mathcal{Q}_0(x,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\sigma_k^2}.$$

Будем считать “основной” метрику на ядре, порожденную квадратичной формой $\mathcal{Q}_0$ и записывать скалярное произведение $\mathcal{Q}_0(x,y)$ в виде $(x,y)$. □

**Замечание 3.** Спектральный тип $\{\tau_k^2\}$ отношения квадратичных форм $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}_1$ связан с дисперсиями $\{\sigma_k^2\}$ следующим образом:

$$\tau_k^2 = \frac{1}{\sigma_k^2}.$$

При этом, в силу эквивалентности мер, ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\tau_k|1 - 1|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1|$ сходятся или расходятся одновременно. □

### Вспомогательные утверждения

Укажем структуру гильбертовых пространств, которые мы будем рассматривать в качестве носителей наших мер. Напомним определение ядерного оператора в гильбертовом пространстве (см., например, [5, стр. 311]):

**Определение.** *Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство. Линейный непрерывный оператор $A : H \to H$ называется ядерным, если $\sqrt{AA^*}$ обладает ортонормированным базисом из собственных векторов, отвечающих собственным числам $\alpha_n$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$.*

**Лемма 1.** *Пусть $\gamma_0 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,1)$ – стандартная гауссовская мера в $\mathbf{R}^\infty$ и $H_{\gamma_0}$ – ядро этой меры. Для того чтобы гильбертово пространство $H$ было пространством полной меры, в котором любой шар имеет положительную меру, а $H'_{\gamma_0}$ идентифицировалось как пространство линейных измеримых функционалов на $H$, разделяющих точки $H$, необходимо и достаточно, чтобы $H$ было получено пополнением ядра $H_{\gamma_0}$ по норме $\|x\|_A^2 = (Ax, x)$, порожденной некоторым положительным самосопряженным ядерным оператором $A$ в $H_{\gamma_0}$. При этом пополнение $H_{\gamma_0}$ можно произвести за счет элементов $\mathbf{R}^\infty$.*

**Доказательство.** Первую часть утверждения можно доказать, например, с помощью теоремы Колмогорова о трех рядах. Поэтому сразу перейдем ко второй части.

Покажем, что пополнение $H_{\gamma_0} \subset \mathbf{R}^\infty$ по норме $\|\cdot\|_A$ можно произвести за счет элементов $\mathbf{R}^\infty$. Это в точности означает, что любая фундаментальная в $H_{\gamma_0}$ последовательность должна сходится покоординатно, т.е. координатные функционалы должны быть непрерывны в норме $\|\cdot\|_A$. Это, в свою очередь, эквивалентно покоординатной ограниченности единичного в норме $\|\cdot\|_A$ шара.

Пусть $U = \{x \in H_{\gamma_0} : (Ax, x) \leqslant 1\}$ – единичный шар в норме $\|\cdot\|_A$, состоящий из элементов $H_{\gamma_0}$. Покажем, что он покоординатно ограничен. Пусть, как и выше, $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в пространстве $H_{\gamma_0}$, $A_{ij} = (Ae_i, e_j)$; $\mathrm{Pr}_k = (\cdot\,, e_k)e_k$ – оператор проектирования на $k$-ую ось. Обозначив через $x^k = (I - \mathrm{Pr}_k)x$, можем записать

$$\|x\|_A^2 = A_{kk}x_k^2 + 2x_k \cdot (Ax^k, e_k) + (Ax^k, x^k).$$

Пусть $x \in U$. Тогда $A_{kk}x_k^2 + 2x_k \cdot (Ax^k, e_k) + (Ax^k, x^k) \leqslant 1$ и из этого следует:

$$\frac{-(Ax^k, e_k) - \sqrt{(Ax^k, e_k)^2 + A_{kk} \cdot (1 - (Ax^k, x^k))}}{A_{kk}} \leqslant x_k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{-(Ax^k, e_k) + \sqrt{(Ax^k, e_k)^2 + A_{kk} \cdot (1 - (Ax^k, x^k))}}{A_{kk}}.$$

Таким образом, для $k$-ой координаты точки из шара мы получаем оценку:

$$|x_k| \leqslant \frac{2 \cdot (Ax^k, e_k) + \sqrt{A_{kk} \cdot (1 - (Ax^k, x^k))}}{A_{kk}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2 \cdot (Ax^k, x^k)^{\frac{1}{2}} \cdot (Ae_k, e_k)^{\frac{1}{2}} + A_{kk}^{\frac{1}{2}}}{A_{kk}} \leqslant 3 \cdot A_{kk}^{\frac{1}{2}},$$

и, значит, единичный шар покоординатно ограничен. Лемма доказана. □

Пусть $\gamma_0 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,1)$ и $\gamma_1 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0, \sigma_k^2)$, как и прежде две взаимно абсолютно непрерывные гауссовские меры. Рассмотрим плотность двух мер $\frac{d\gamma_1}{d\gamma_0}$, одна из версий которой может быть задана с помощью бесконечного произведения:

$$\rho(x) := \frac{d\gamma_1}{d\gamma_0}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \cdot \exp\left( - \frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_k^2}{\sigma_k^2} \right)$$

в тех точках из $\mathbf{R}^\infty$, где $\rho(x)$ сходится. Функция $\rho$ однозначно определена и конечна на множестве меры 1 по каждой из мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$. В остальных точках $\rho(x)$ определяется произвольно.

**Замечание 4.** Везде, где не оговорено иное, фразы "почти всюду", "полной меры", "меры нуль", "с точностью до эквивалентности" надо понимать в смысле меры $\gamma_0$.

Под версией функции $f$ на пространстве с мерой $(M, \mu)$ понимается функция, заданная в каждой точке $M$ и почти всюду равная $f$. □

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (x_k^2 - 1), \quad \text{п.в. } x \in \mathbf{R}^\infty. \tag{2}$$

где $\beta_k = \sigma_k - 1$. Эта функция является квадратическим функционалом (по терминологии [4, стр. 419]) или гауссовским хаосом порядка 2 [см., например, 5, стр. 84]. Несложно проверить, что $s(x)$ определена и конечна почти всюду по мерам $\gamma_0$ и $\gamma_1$ в $\mathbf{R}^\infty$. Это вытекает из теоремы Колмогорова о трех рядах и того, что в силу эквивалентности двух мер $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$.

**Замечание 5.** В дальнейшем, мы будем четко оговаривать, имеем ли мы дело с функцией, заданной в пространстве с мерой, понимаемой с точностью до эквивалентности, или какой-нибудь из ее всюду определенных версий. □

Как показывает следующая лемма, корректная различимость мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ эквивалентна выполнению некоторого условия для функции (2).

**Лемма 2.** *Для того чтобы была корректной задача различения мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовало гильбертово пространство $H \subset \mathbf{R}^\infty$ полной меры и версия функции $s$, определенная на $H$, в котором эта версия непрерывна.*

**Доказательство.** Нам потребуется ввести несколько норм, поэтому мы их будем нумеровать: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$.

*Необходимость* Пусть задача различения мер корректна. Это значит, что существует версия плотности $\rho(x)$, которая непрерывна в некотором гильбертовом пространстве $(H, \|\cdot\|)$ полной меры. Рассмотрим логарифм плотности:

$$\ln \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\ln \sigma_k + \frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{\sigma_k^2 - 1}{\sigma_k^2} \right), \quad \text{п.в. } x \in \mathbf{R}^\infty. \tag{3}$$

и еще две функции:

$$p_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -(\sigma_k - 1) + x_k^2 \cdot \frac{(\sigma_k^2 - 1)}{2\sigma_k^2} \right),$$

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(\sigma_k - 1)}{2} \cdot (x_k^2 - 1) \right), \quad \text{п.в. } x \in \mathbf{R}^\infty$$

конечные почти всюду (по мере $\gamma_0$). Заметим, что $\ln \rho$ и $p_1$ отличаются на константу и поэтому непрерывны одновременно:

$$\ln \rho(x) - p_1(x) = \sum ((\sigma_k - 1) - \ln \sigma_k) = \text{const} < \infty, \quad \text{п.в. } x \in \mathbf{R}^\infty.$$

Покажем, что найдется гильбертово пространство $(H_1, \|\cdot\|_1)$ полной меры, в котором функции $p_1$ и $p_2$ непрерывны. Рассмотрим разность этих функций:

$$p_1(x) - p_2(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(x_k^2-1)(\sigma_k-1)}{2} - \frac{(\sigma_k-1)^2}{2\sigma_k} \cdot x_k^2 - \frac{(\sigma_k-1)^2(\sigma_k+1)}{2\sigma_k^2} \cdot x_k^2 \right),$$
$$\text{п.в. } x \in \mathbf{R}^{\infty} \quad (4)$$

и введем две нормы

$$\|x\|_2^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_k-1)^2}{2\sigma_k} \cdot x_k^2$$

$$\|x\|_3^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_k-1)^2(\sigma_k+1)}{2\sigma_k^2} \cdot x_k^2.$$

В качестве гильбертовой нормы $\|\cdot\|_1$, относительно которой, в пополненном по этой норме ядре, будут непрерывны функции $p_1$ и $p_2$, возьмем следующую:

$$\|x\|_1^2 := \|x\|^2 + \|x\|_2^2 + \|x\|_3^2.$$

Новая норма *не слабее* каждой из трех норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$, а пополненное по этой норме ядро меры $\gamma_0$ превращается в гильбертово пространство $(H_1, \|\cdot\|_1)$ полной меры. Так как норма $\|\cdot\|_1$ *не слабее* $\|\cdot\|$, то $H_1 \subset H$. В качестве версии логарифма плотности мы возьмем непосредственно возникающую (см. 3):

$$\forall\, x \in H_1 \quad \ln \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\ln \sigma_k + \frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{\sigma_k^2 - 1}{\sigma_k^2} \right).$$

Несложно проверить, что эта функция определена всюду на $H_1$ и непрерывна в этом пространстве. Функция $p_1$ также задана всюду на $H_1$ и, как было показано выше, непрерывна вместе с $\ln \rho(x)$. Непрерывность $p_2$ в пространстве $(H_1, \|\cdot\|_1)$ вытекает из равенства

$$2 \cdot p_2(x) = p_1(x) + \|x\|_2^2 + \|x\|_3^2, \quad x \in H_1, \quad (5)$$

полученного из (4) и того, что каждое слагаемое в (5) определено и непрерывно всюду в $(H_1, \|\cdot\|_1)$. Как несложно видеть, функция $2 \cdot p_2$ и есть введенная ранее функция $s$.

*Достаточность.* Пусть теперь $(H_1, \|\cdot\|_1)$ – гильбертово пространство полной меры, и $s(x)$ – непрерывная в $(H_1, \|\cdot\|_1)$ версия функции (2). Снова рассмотрим функции $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$, введенные при доказательстве необходимости. Пусть

$$\|x\|_4^2 := \|x\|_1^2 + \|x\|_2^2 + \|x\|_3^2. \tag{6}$$

Рассмотрим пополнение ядра по предгильбертовой норме $\|\cdot\|_4$: $(H_4, \|\cdot\|_4)$. Это пространство имеет полную меру. Определим (см. 4)

$$p_1(x) = s(x) - \|x\|_2^2 - \|x\|_3^2, \quad x \in H_4,$$

где $s(x)$ – непрерывная в $(H_1, \|\cdot\|_1)$ версия (2). Тогда $p_1$ – также непрерывна, поскольку каждое слагаемое (6) определено и непрерывно всюду в $(H_4, \|\cdot\|_4)$. В качестве версии $\ln\rho(x)$ возьмем функцию $\ln\rho(x) = p_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}((\sigma_k - 1) - \ln\sigma_k)$, $x \in H_4$. Она непрерывна в $(H_4, \|\cdot\|_4)$. Таким образом, нашлось гильбертово пространство полной меры и версия плотности, непрерывная в нем. Лемма доказана. □

Перейдем к вопросу непрерывности плотности.

**Предложение 1.** *Пусть $\gamma_0 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,1)$ и $\gamma_1 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,\sigma_k^2)$ две эквивалентные гауссовские меры (т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - 1)^2 < \infty$). Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\sigma_k - 1| < \infty$, то задача различения мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ корректна. В качестве гильбертова пространства $H$, на котором задача различения гипотез корректна, можно взять любое пополнение ядра $H_{\gamma_0}$ по норме, которая не слабее, чем $\|x\|^2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\sigma_k - 1| \cdot x_k^2$, но такая, что $H$ – линейный носитель мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ и любой шар в $H$ имеет положительную $\gamma_0$-меру. В качестве непрерывной версии плотности можно взять естественно возникающую:*

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \cdot \exp\left(-\frac{x_k^2}{2} \cdot \frac{1 - \sigma_k^2}{\sigma_k^2}\right), \quad x \in H.$$

**Доказательство.** Достаточное условие корректной различимости гипотез было дано в [3]. Докажем вторую часть утверждения. Пусть $(H, \|\cdot\|)$ гильбертово пространство с нормой $\|x\|^2 :=$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1| \cdot x_k^2$. Несложно проверить, что функция $s(x)$ непрерывна в этой норме и определена всюду в $H \subset \mathbf{R}^\infty$. По лемме 2 существует гильбертово пространство, в котором непрерывна функция $\rho(x)$. Это пространство – результат пополнения ядра меры $\gamma_0$ по норме, не слабее, чем норма $\|\cdot\|$ пространства $H$ (см. доказательство леммы 2). Для построения искомого пространства использовались нормы

$$\|x\|_2^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_k - 1)^2}{2\sigma_k} x_k^2$$

и

$$\|x\|_3^2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sigma_k - 1)^2(\sigma_k + 1)}{2\sigma_k^2} x_k^2,$$

и создавалась новая:

$$\|x\|_1^2 := \|x\|^2 + \|x\|_2^2 + \|x\|_3^2.$$

Затем, ядро пополнялось по норме $\|\cdot\|_1$. Но поскольку норма $\|x\|^2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1| \cdot x_k^2$ не слабее каждой из норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$, то плотность будет непрерывна уже в $(H, \|\cdot\|)$. Тем самым предложение 1 доказано. □

Как будет показано ниже, корректное различение гипотез возможно только при условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1| < \infty$. Для доказательства того, что не существует непрерывной версии плотности в ситуации когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\sigma_k - 1| = \infty$ сформулируем и докажем еще несколько утверждений.

Пусть $s_m$ обозначает частичную сумму:

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k (x_k^2 - 1), \quad x \in \mathbf{R}^\infty.$$

С помощью этих функций дадим описание (понимаемых с точностью до эквивалентности) множеств вида $\{x : s(x) > t\}$, которые нам понадобятся при доказательстве непрерывности $s(x)$:

**Лемма 3.** *Пусть $s(x)$ – некоторая версия функции (2), определенная на всем $\mathbf{R}^\infty$. Обозначим $F(t) = \{x \in \mathbf{R}^\infty : s(x) > t\}$, $G(t) = \bigcup\limits_{k=1}^\infty \bigcap\limits_{n=1}^\infty \bigcup\limits_{m=n}^\infty \Big\{x \in \mathbf{R}^\infty : s_m(x) > t + \dfrac{1}{k}\Big\}$. Тогда существует множество $\mathcal{N}$ $\gamma_0$-меры нуль такое, что $\forall t$ $F(t)\Delta G(t) \subset \mathcal{N}$ ($\Delta$ – симметрическая разность множеств).*

**Доказательство.** Поскольку $s(x)$ – некоторая версия $\lim s_m(x)$, то множество $\mathcal{N} := \{x \in \mathbf{R}^\infty : s_m(x) \not\to s(x)\}$ имеет меру нуль.

Пусть $x \in \Big(\bigcap\limits_{n=1}^\infty \bigcup\limits_{m=n}^\infty \Big\{s_m(x) > t + \dfrac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N}$, для некоторого $k$. Тогда, очевидно, $s(x) \geqslant t + \frac{1}{k}$, т.е.

$$\Big(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty \Big\{s_m(x) > t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N} \subset \Big\{s(x) \geqslant t + \frac{1}{k}\Big\} \setminus \mathcal{N}.$$

Пусть теперь $x \in \{s(x) > t + \frac{1}{k}\} \setminus \mathcal{N}$. Тогда для всякого $n$ существует $m$, $m > n$ такое, что $s_m(x) > t + \frac{1}{k}$, т.е.

$$\Big\{s(x) > t + \frac{1}{k}\Big\} \setminus \mathcal{N} \subset \Big(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty \Big\{s_m(x) > t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N}.$$

Таким образом, выполняются следующие включения:

$$\Big\{s(x) > t + \frac{1}{k}\Big\} \setminus \mathcal{N} \subset \subset \Big(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty \Big\{s_m(x) > t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N} \subset \Big\{s(x) \geqslant t + \frac{1}{k}\Big\} \setminus \mathcal{N}. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\Big(\bigcup_{k=1}^\infty \Big\{s(x) > t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N} = = \Big(\bigcup_{k=1}^\infty \Big\{s(x) \geqslant t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N} = \{s(x) > t\} \setminus \mathcal{N},$$

поэтому, объединяя каждое из множеств в (7) по всем $k$, получаем желаемое равенство:

$$\{s(x) > t\} \setminus \mathcal{N} = \Big(\bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty \Big\{s_m(x) > t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \setminus \mathcal{N}.$$

Лемма доказана. □

Далее, мы будем работать с дополнениями множеств $\{s(x) > t\}$, т.е. с множествами вида $\{s(x) \leqslant t\}$.

Нам понадобится еще одна несложная лемма, приводимая без доказательства:

**Лемма 4.** *Пусть* $a_n > 0$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, и пусть* $S_n = a_1 + K + a_n$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ *также расходится.*

## Доказательство теоремы 1

Итак, нас будет интересовать случай, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k| = \infty$. Наша цель – доказать, что ни в каком гильбертовом пространстве полной меры, в котором шары имеют положительную меру, не существует непрерывной версии функции $s(x)$. Сначала сделаем одно замечание.

**Замечание 6.** Ситуация, когда не все $\beta_k = \sigma_k - 1$ одного знака, не сильно усложняет дело. Действительно, предположим, что $\sum\limits_{k:\beta_k>0}^{\infty} \beta_k = \infty$. Тогда пространство $\mathbf{R}^\infty$ с мерами $\gamma_0 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,1)$ и $\gamma_1 = \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(0,\sigma_k^2)$ можно представить в виде

$$(\mathbf{R}^\infty, \gamma_0) = \Big( (\mathbf{R}^\infty)^+ \times (\mathbf{R}^\infty)^-, \gamma_0^+ \otimes \gamma_0^- \Big),$$
$$(\mathbf{R}^\infty, \gamma_1) = \Big( (\mathbf{R}^\infty)^+ \times (\mathbf{R}^\infty)^-, \gamma_1^+ \otimes \gamma_1^- \Big),$$

где

$$(\mathbf{R}^\infty)^+ = \mathop{\times}_{k:\beta_k>0} \mathbf{R}_k, \qquad (\mathbf{R}^\infty)^- = \mathop{\times}_{k:\beta_k\leqslant 0} \mathbf{R}_k,$$
$$\gamma_0^+ = \bigotimes_{k:\beta_k>0} \mathrm{N}(0,1), \qquad \gamma_0^- = \bigotimes_{k:\beta_k\leqslant 0} \mathrm{N}(0,1),$$
$$\gamma_1^+ = \bigotimes_{k:\beta_k>0} \mathrm{N}(0,\sigma_k^2), \qquad \gamma_0^- = \bigotimes_{k:\beta_k\leqslant 0} \mathrm{N}(0,\sigma_k^2).$$

Тогда плотность, соответственно, будет равна:

$$\rho(x) = \frac{d\gamma_1}{d\gamma_0}(x) = \frac{d\gamma_1^+}{d\gamma_0^+}(x^+) \cdot \frac{d\gamma_1^-}{d\gamma_0^-}(x^-) =: \rho^+(x^+) \cdot \rho^-(x^-),$$

$$\text{для } \gamma_0^+\text{-п.в. } x^+ \in (\mathbf{R}^\infty)^+ \text{ и } \gamma_0^-\text{-п.в. } x^- \in (\mathbf{R}^\infty)^-,$$

причем $x \in \mathbf{R}^\infty$ отождествляется с упорядоченной парой $(x^+, x^-) \in (\mathbf{R}^\infty)^+ \times (\mathbf{R}^\infty)^-$. Пусть, к примеру, $\sum\limits_{k:\beta_k>0} \beta_k = \infty$. Тогда к пространству с мерами $((\mathbf{R}^\infty)^+, \gamma_0^+, \gamma_1^+)$ применим вопрос о корректности задачи различения мер $\gamma_0^+$ и $\gamma_1^+$: по теореме 2 не существует гильбертова пространства $(H^+, \|\cdot\|^+)$, $H^+ \subset (\mathbf{R}^\infty)^+$ полной $\gamma_0^+$-меры, в котором некоторая версия плотности $\rho^+$ была бы непрерывна. Из этого, в свою очередь, следует, что не может существовать гильбертова пространства $(H, \|\cdot\|)$, $H \subset (\mathbf{R}^\infty)$ полной $\gamma_0$-меры и непрерывной версии плотности $\rho$ в нем, так как иначе, рассматривая $(\mathbf{R}^\infty)^+$ как подпространство $\mathbf{R}^\infty$, получили бы гильбертово пространство $H^+ := H \cap (\mathbf{R}^\infty)^+$ с нормой $\|x\|^+ := \|x\|\big|_{H^+}$ и $\rho^+(x) := \rho\big|_{H^+}(x)$ – версию плотности $\frac{d\gamma_1^+}{d\gamma_0^+}$, очевидно непрерывную в $(H^+, \|\cdot\|^+)$. Это противоречит теореме 2. Поэтому, ситуация с разными знаками чисел $\beta_k$ сводится к ситуации, когда все $\beta_k$ положительны и мы будем считать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k = \infty$. □

Перейдем к формулировке и доказательству утверждения, которое вместе с леммой 2 и предложением 1, доказывает теорему 1.

**Теорема 2.** *Пусть $(H, \|\cdot\|)$ – гильбертово пространство полной $\gamma_0$-меры, удовлетворяющее условиям леммы 1, и $s(x)$ – функция, определенная формулой (2). Если выполняются следующие условия:*

$$\forall k \ \beta_k > 0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \tag{10}$$

*то не существует версии $s(x)$ заданной на всем $H$ и непрерывной в этом пространстве. Более того, ни для какой точки $H$ не существует версии $s(x)$, непрерывной в этой точке.*

**Доказательство.** По лемме 1 существует положительный самосопряженный ядерный оператор $A$ в $H_{\gamma_0}$, при помощи которого норма в $H$ связана с нормой на ядре: $\|x\|^2 = (Ax, x)$, $x \in H_{\gamma_0}$. Напомним, что $(\cdot,\cdot)$ – это скалярное произведение в $H_{\gamma_0}$.

Пусть $s(x)$ – какая-нибудь версия функции (2). Мы покажем, что эта функция не является непрерывной ни в какой точке $H$ и не может быть сделана таковой за счет переопределения на множестве меры нуль. Доказательство проведем в несколько шагов. На первом шаге дадим необходимое условие непрерывности $s(x)$ в точке. На втором и третьем шагах покажем, что $s(x)$ не является непрерывной в нуле. На четвертом – покажем, что необходимое условие непрерывности в точке не выполняется в каждой точке из всюду плотного в $H$ множества, а на пятом – завершим доказательство для всего $H$.

*Шаг 1.* Пусть $a \in H$ – некоторая точка и $|s(a)| < \infty$. Это условие можно всегда обеспечить для множества точек $a$ меры нуль. Если $s(x)$ непрерывна в точке $a$, то для любого $t > s(a)$ множество $\{x : s(x) < t\}$ должно содержать открытую окрестность точки $a$:

$$\forall\, t : t > s(a) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subset \{s(x) < t\}, \tag{11}$$

где $U_\varepsilon(a)$ – открытый шар в $H$ с центром в точке $a$ и радиусом $\sqrt{\varepsilon}$:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in H : (Ax, x) < \varepsilon\}.$$

Из (11) следует, что

$$\forall\, t : t > s(a) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subset \{s(x) \leqslant t\}.$$

По лемме 3, множества $\{s(x) \leqslant t\}$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} \left\{s_m(x) \leqslant t + \frac{1}{k}\right\}$ совпадают с точностью до некоторого множества меры нуль, не зависящего от $t$. Как и прежде, будем обозначать это множество символом $\mathcal{N}$. Тогда должно выполняться следующее:

$$\forall\, t : t > s(a) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$$
$$U_\varepsilon(a) \subset \Big( \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \Big\{s_m(x) \leqslant t + \frac{1}{k}\Big\}\Big) \cup \mathcal{N}. \tag{12}$$

Если (12) не выполняется ни для какого $\mathcal{N}$ меры нуль, то $s(x)$ не является непрерывной в точке $a$. Кроме того, не может быть непрерывной и любая ее модификация, так как изменение $s(x)$ на некотором множестве меры нуль означает присоединение этого нуль-множества к множеству $\mathcal{N}$ в правой части включения (12).

*Шаг 2.* Пусть $a = 0$, $U_\varepsilon = U_\varepsilon(0)$ – окрестность нуля. Покажем, сначала, что не существует такого $\varepsilon > 0$, что

$$U_\varepsilon \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t}, \tag{13}$$

где $C_{m,k,t} = \Big\{ s_m(x) \leqslant t + \dfrac{1}{k} \Big\}$.

Предположим противное: пусть существует $\varepsilon$, при котором выполняется (13). Тогда для каждого $k$ существует $n$ такое, что $U_\varepsilon \subset \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t}$, т.е. $U_\varepsilon \subset C_{m,k,t}$ для всех $m$, $m > n$. Множество $C_{m,k,t}$ – это цилиндрическое множество с $m$-мерным эллипсоидом $\Big\{ \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l x_l^2 \leqslant t + \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l \Big\}$ в основании. Для того чтобы $U_\varepsilon = \{(Ax, x) < \varepsilon\}$ содержалось в $C_{m,k,t}$ необходимо, чтобы проекция шара $U_\varepsilon$ на $j$-ую ось в $H_{\gamma_0}$ содержалась в проекции эллипсоида $C_{m,k,t}$ на ту же ось. Должно выполняться следующее:

$$\{x : A_{jj} x_j^2 < \varepsilon\} \subset \Big\{ x : \beta_j x_j^2 \leqslant t + \frac{1}{k} + \sum_{l=1}^{m} \beta_l \Big\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{14}$$

Через $(A_{ij})$ обозначено матричное представление оператора $A$ в ортонормированном базисе в $H_{\gamma_0}$.

Включение (14) равносильно тому, что

$$\frac{\varepsilon}{A_{jj}} \leqslant \frac{t + \frac{1}{k} + \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l}{\beta_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Поэтому, радиус $\varepsilon$, при котором шар $U_\varepsilon$ содержится в $C_{m,k,t}$, должен быть заведомо меньше, чем

$$\varepsilon_m = \Big( t + \frac{1}{k} + \sum_{l=1}^{m} \beta_l \Big) \cdot \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{A_{jj}}{\beta_j}.$$

Обозначим $r(m)$ индекс $j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, на котором достигается минимум $\frac{A_{jj}}{\beta_j}$:

$$\frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{A_{jj}}{\beta_j}.$$

Здесь и далее $A_i$ для краткости будет обозначать $A_{ii}$. Поэтому вместо $A_{r(m),r(m)}$ пишем $A_{r(m)}$.

Поскольку мы предположили, что $U_\varepsilon \subset \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t}$, то радиус $\varepsilon$, при котором это включение возможно, должен быть меньше, чем $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m$. Покажем, что $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m = 0$.

Сначала покажем, что $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m < \infty$. Действительно, поскольку $\frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l \leqslant \sum\limits_{l=1}^{m} \left(\frac{A_l}{\beta_l}\beta_l\right) = \sum\limits_{l=1}^{m} A_l$, то

$$\varepsilon_m = \frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \left(t + \frac{1}{k}\right) + \frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \left(t + \frac{1}{k}\right) + \sum_{l=1}^{m} A_l \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{l=1}^{m} A_l < \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{l=1}^{m} A_l$ сходится, так как оператор $A$ – ядерный. Следовательно, $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m < \infty$.

Итак, $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m = \inf\limits_{m\geqslant n} \left[\left(t + \frac{1}{k} + \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l\right) \cdot \frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}}\right]$. Нам нужно проверить, что $\inf\limits_{m\geqslant n} \varepsilon_m = 0$. Слагаемое $\left(t + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}}$ с ростом $m$ монотонно убывает к нулю. Покажем, что $\frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l$ также стремится к нулю при $m \to \infty$.

Поскольку $\frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \leqslant \frac{A_m}{\beta_m}$, то

$$\frac{A_{r(m)}}{\beta_{r(m)}} \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_l \leqslant \frac{A_m}{\beta_m} \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_l$$

и достаточно доказать, что

$$\frac{A_m}{\beta_m} \cdot \sum_{l=1}^{m} \beta_l \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Предположим противное, пусть $\frac{A_m}{\beta_m} \cdot \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l \geqslant \alpha > 0$ для некоторой постоянной $\alpha$. Тогда $A_m \geqslant \dfrac{\alpha \cdot \beta_m}{\sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l}$. Но, из того, что оператор $A$ ядерный следует, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m < \infty$. Значит, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{\beta_m}{\sum\limits_{l=1}^{m} \beta_1}\right)$ должен сходиться. Однако по лемме 4 этот ряд расходится. Следовательно, предположение, что $\dfrac{A_m}{\beta_m} \sum\limits_{l=1}^{\infty} \beta_l \geqslant \alpha > 0$ неверно и поэтому, $\varepsilon = \inf\limits_{m \geqslant n} \varepsilon_m = 0$. Поэтому,

$$U_\varepsilon \not\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

*Шаг 3.* Пусть $a = 0$. Покажем теперь, что не существует множества $\mathcal{N}$ меры нуль, такого, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon \subset \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t}\Big) \cup \mathcal{N}. \tag{15}$$

Раскрыв скобки, (15) можно переписать:

$$U_\varepsilon \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} (C_{m,k,t} \cup \mathcal{N}).$$

На шаге 2 показано, что независимо от $k$ для всякого $n$ найдется $m > n$ такое, что $U_\varepsilon \not\subset C_{m,k,t}$. Точнее, для некоторого $j$, $1 \leqslant j \leqslant m$

$$\mathrm{Pr}_j\, U_\varepsilon = \big\{x : A_{jj} x_j^2 < \varepsilon\big\} \not\subset \left\{x : \beta_j x_j^2 \leqslant t + \frac{1}{k} + \sum_{l=1}^{m} \beta_l\right\} = \mathrm{Pr}_j\, C_{m,k,t}.$$

Следовательно, $\mathrm{Pr}_j\, U_\varepsilon \setminus \mathrm{Pr}_j\, C_{m,k,t}$ не пусто и содержит открытое в $j$-й оси подмножество, которое мы обозначим как $G$. Очевидно,

$$\mathrm{Pr}_j^{-1}(G) \cap C_{m,k,t} = \varnothing.$$

В то же время

$$\mathrm{Pr}_j^{-1}(G) \cap U_\varepsilon \neq \varnothing$$

и открыто в $H$, а следовательно имеет ненулевую $\gamma$-меру. Поэтому $U_\varepsilon \setminus C_{m,k,t}$ также имеет положительную меру. Таким образом мы получили, что для всякого $n$, существует $m > n$, что $U_\varepsilon \setminus C_{m,k,t}$

не меры нуль. Это в точности означает, что (15) ни при каком множестве $\mathcal{N}$ нулевой меры выполняться не может.

Таким образом, доказано, что $s(x)$ не является непрерывной в нуле.

*Шаг 4.* Покажем, что функция $s(x)$ разрывна в каждой точке из всюду плотного множества в $H$.

Пусть $a \in c_0$ – линейное множество финитных последовательностей, плотное в $H$, и $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$. Обозначим $L_N = \{x \in \mathbf{R}^\infty : x_k = 0, k > N\}$. Тогда $a \in L_N$. Пусть

$$U_\varepsilon(a) = \{x : (A(x-a), x-a) < \varepsilon\}$$

– окрестность точки $a$ в $H$.

Покажем, что (12) не выполняется ни для какого множества меры нуль $\mathcal{N}$. Рассмотрим множества:

$$U_\varepsilon^{L_N} = \mathrm{Pr}^{-1}_{L_N^\perp} U_\varepsilon(a)$$

и

$$C^{L_N}_{m,k,t} = \mathrm{Pr}^{-1}_{L_N^\perp} C_{m,k,t}.$$

В координатном виде их можно переписать так:

$$U_\varepsilon^{L_N} = \Big\{x : \sum_{i,j=N+1}^{\infty} A_{ij} x_i x_j < \varepsilon\Big\}$$

и

$$C^{L_N}_{m,k,t} = \Big\{x : \sum_{l=N+1}^{m} \beta_l x_l^2 \leqslant t + \frac{1}{k} + \sum_{l=1}^{m} \beta_l\Big\}.$$

Для этих множеств применимы те же рассуждения, что и на шаге 2 и 3. Следовательно, для любого $n$ существует $m > n$, что $U_\varepsilon^{L_N} \setminus C^{L_N}_{m,k,t}$ имеет положительную меру. Тогда $U_\varepsilon(a) \setminus C^{L_N}_{m,k,t}$ также не меры нуль, поскольку $U_\varepsilon^{L_N} \setminus C^{L_N}_{m,k,t}$ содержит открытое цилиндрическое множество, пересечение которого с $U_\varepsilon(a)$, очевидно, непусто.

*Шаг 5.* На данный момент мы показали, что $s(x)$ разрывна в любой точке из всюду плотного в $H$ множества $c_0$. Здесь мы покажем, что $s(x)$ не является непрерывной также ни в какой другой точке $H$.

Предположим, что $s(x)$ непрерывна в точке $a \in H$. Тогда

$$\forall\, t : t > s(a) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 :$$
$$U_\varepsilon(a) \subset \Big( \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \Big\{ s_m(x) \leqslant t + \frac{1}{k} \Big\} \Big) \cup \mathcal{N}, \tag{16}$$

для некоторого множества $\mathcal{N}$ меры нуль. Зафиксируем окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a$ и рассмотрим последовательность точек $a^{(n)} \in c_0$, сходящиеся к $a$ в $H$. Начиная с некоторого номера $n$ все $a^{(n)}$ принадлежат $U_\varepsilon(a)$, и, следовательно, $s(a^{(n)}) < t$. Поскольку $a^{(n)}$ – внутренняя точка $U_\varepsilon(a)$, то существует $V(a^{(n)})$ – окрестность точки $a^{(n)}$ – целиком содержащаяся в $U_\varepsilon(a)$. Но для $V(a^{(n)})$ из шага 4 известно, что множество

$$V(a^{(n)}) \setminus \Big( \Big( \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_{m,k,t} \Big) \cup \mathcal{N} \Big)$$

непусто и имеет положительную меру. Следовательно (16) неверно ни для какого множества $\mathcal{N}$ меры нуль. Тем самым теорема доказана. $\square$

Некоторая конкретная ситуация, наводящая на мысль о возможном тройственном ответе на вопрос о корректности различения двух гауссовских гипотез, упоминается в статье А. М. Вершика и В. Н. Судакова [1] (по сообщению В. Н. Судакова, эта ситуация была замечена А. М. Вершиком).

Автор благодарит В. Н. Судакова за постановку задачи и поддержку.

## Литература


1. А. М. Вершик, В. Н. Судаков, *Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **12** (1969), 7–67.
2. V. N. Sudakov, *Gaussian measures. A brief survey.* — Rendiconti dell'instituto di matematica dell'universita di Trieste **XXVI** (1994), 289–325.
3. В. А. Ровский, *О корректном различении гауссовских гипотез.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 155–160.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, Т. 1.* Наука, М. (1971).
5. В. И. Богачев, *Гауссовские меры*. Наука, М. (1997).

Rovsky V. A. Correct discrimination of the Gaussian hypotheses. II.

For a pair of equivalent Gaussian distributions a notion of their correct discrimination is introduced, which means the existence of a continuous version of their likelyhood ratio on some Hilbert support of these measures. Not every pair of equivalent Gaussian measures can be correctly discriminated.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 декабря 2004 г.