Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

Н. А. Колодий

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ СВЯЗАННЫХ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СИЛЬНЫМ МАРТИНГАЛАМ

1. Введение

Элементы R_+^2 будем обозначать буквами x, y, z, u, v, причем, если в одном и том же выражении присутствует z и присутствует z_1 и (или) z_2, то всегда полагаем, что z_1 – первая компонента, а z_2 – вторая компонента вектора z (аналогично для x, y). Структурные операции $x\wedge z$, $x\vee z$ и неравенства $x<y$ и $x\leqslant y$ определяются покомпонентно (например, $x\wedge z=(x_1\wedge z_1, x_2\wedge z_2)$, неравенство $x<y$ эквивалентно системе неравенств $x_1<y_1$ и $x_2<y_2$). Далее $]x,y]$ обозначает прямоугольник $]x,y]=\{u: x<u\leqslant y\}$ (пустой, если не выполнено условие $x<y$); $\mathrm{R}_0^2=\{z\in\mathrm{R}_+^2 : z_1=0$ или $z_2=0\}$. Приращение функции $g(\cdot):\mathrm{R}_+^2\mapsto\mathrm{R}$ на непустом прямоугольнике $]x,y]$ определим равенством $g(]x,y])=g(y)-g(x_1,y_2)-g(y_1,x_2)+g(x)$. Если $]x,y]=\emptyset$, то $g(]x,y])$ полагаем равным нулю. Через $\mathbb{D}_0$ будем обозначать пространство всех таких функций $g(\cdot):\mathrm{R}_+^2\mapsto\mathrm{R}$, что $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ z\leqslant x}} g(x)=g(z)$ и существуют пределы $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ z_1\leqslant x_1,\, x_2<z_2}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x_1<z_1,\, z_2\leqslant x_2}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x<z}} g(x)$ и $g(z)=0$ для $z\in\mathrm{R}_0^2$.

Пусть $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{F}=(\mathfrak{F}_z,\ z\in\mathrm{R}_+^2),\ \mathrm{P})$ – вероятностное пространство с двупараметрической фильтрацией, удовлетворяющее "обычным" условиям: $\mathfrak{F}_x\subset\mathfrak{F}_z\subset\mathfrak{F}$ для любых $x\leqslant z$; $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^{\mathrm{P}}$ и $\mathfrak{F}_0$ содержит все P-нулевые элементы $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_x=\bigcap\limits_{x<z}\mathfrak{F}_z$ для всех x; $\mathfrak{F}_x$ и $\mathfrak{F}_z$ условно независимы относительно $\mathfrak{F}_{x\wedge z}$ для всех x и z (условие Каироли и Уолша). Определим $\mathfrak{F}_z^*=\Big(\bigvee\limits_{z_2\geqslant 0}\mathfrak{F}_z\Big)\bigvee\Big(\bigvee\limits_{z_1\geqslant 0}\mathfrak{F}_z\Big)$.

Далее $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{P}$ обозначают σ-алгебры $\mathbb{F}$-прогрессивно измеримых и $\mathbb{F}$-предсказуемых подмножеств $\mathrm{R}_+^2\times\Omega$ (см. [1]); $\mathfrak{M}_2^S$ обозначает пространство всех квадратически интегрируемых сильных $\mathbb{F}$-мартингалов (см. [2, 4, 8]), т.е. $\mathfrak{M}_2^S$ – пространство $\mathbb{F}$-

согласованных случайных полей $(\mu(x),\ x \in \mathrm{R}_+^2)$ с траекториями в $\mathbb{D}_0$, удовлетворяющих условиям: $\mathrm{E}\mu^2(x) < \infty$ для любого $x \in \mathrm{R}_+^2$ и $\mathrm{E}\{\mu(]x,x'])\,|\mathfrak{F}_x^*\} = 0$ для любых $x \leqslant x'$. Отметим, что пространство $\mathfrak{M}_2^S$ с метрикой

$$\mathtt{r}_2^S(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left[1 \wedge \left(\mathrm{E}\sup_{x\in]0,(n,n)]}|\mu(x)-\nu(x)|^2\right)^{1/2}\right]$$

является полным.

Семейство прямоугольников

$$\delta = \Big\{\delta_{i,j} =]u(i,j), u(i+1,j+1)]\,\Big|\, u(i,j) = (u_i', u_j''),\ i,j \in \{0,1,\dots\};$$

$$u(0,0) = 0,\ u_{i,j} < u_{i+1,j+1},\ u_i' \uparrow +\infty,\ u_j'' \uparrow +\infty\Big\}$$

будем называть разбиением пространства R_+^2; $\delta_{i,j}^{v,x} = \delta_{i,j} \cap]v,x]$, $|\delta| = \sup\limits_{i,j}|u(i,j) - u(i+1,j+1)|$.

Применяя результаты работы [2] (существование квадратической вариации и неравенства для моментов двупараметрического сильного мартингала), свойства стохастических интегралов от предсказуемых процессов по сильным двупараметрическим мартингалам и методы доказательств существования измеримых по параметру характеристик мартингалов и стохастических интегралов из работы [7], получаем следующие два утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть* $(\Theta,\mathfrak{G})$ – *измеримое пространство,* $\mu(\theta;x,\omega)$ – $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{T}$*-измеримая действительная функция,* $\mu(\theta,\cdot) \in \mathfrak{M}_2^S$ *для каждого* $\theta \in \Theta$.

Тогда существует такая $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{T}$*-измеримая функция* $\overline{\mu}(\theta;x,\omega)$ *со значениями в* R_+*, что для любого фиксированного* $\theta \in \Theta$ *случайное поле* $\overline{\mu}(\theta,\cdot)$ *является квадратической вариацией мартингала* $\mu(\theta,\cdot)$:

$$\overline{\mu}(\theta,x) = \mathrm{P}\text{-}\lim_{|\delta|\to 0}\sum_{i,j}\left(\mu(\theta,\delta_{i,j}^{0,x})\right)^2 \quad \textit{п.н. для любых } x \in \mathrm{R}_+^2,\ \theta \in \Theta.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $(\Theta,\mathfrak{G})$ – *измеримое пространство,* $\beta(\theta;x,\omega)$ *и* $\mu(\theta;x,\omega)$ – $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{P}$*-измеримая и* $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{T}$*-измеримая действительные функции,* $\mu(\theta,\cdot) \in \mathfrak{M}_2^S$ *для каждого* $\theta \in \Theta$, $\mathrm{E}\int\limits_0^x \beta^2(\theta,u)\overline{\mu}(\theta,du) < \infty$

для любых $x \in \mathrm{R}^2_+$, $\theta \in \Theta$. *Тогда существует такая* $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{P}$*-измеримая действительная функция* $\mathbf{J}(\theta; x, \omega)$, *что:*

1) $\mathbf{J}(\theta, x)$ *является стохастическим интегралом на прямоугольнике* $]0, x]$ *от* $\mathfrak{P}$*-измеримой функции* $\beta(\theta, \cdot)$ *по квадратически интегрируемому сильному мартингалу* $\mu(\theta, \cdot)$:

$$\mathbf{J}(\theta, x) = \int_0^x \beta(\theta, u)\,\mu(\theta, du) \qquad \text{п.н. для любых} \quad x \in \mathrm{R}^2_+,\ \theta \in \Theta;$$

2) *для каждого фиксированного* $\theta \in \Theta$ *случайное поле* $\mathbf{J}(\theta, \cdot)$ *является элементом пространства* $\mathfrak{M}^S_2$, *квадратическая вариация* $\mathbf{J}(\theta, \cdot)$ *на прямоугольнике* $]0, x]$ *равна* $\int_0^x \beta^2(\theta, u)\overline{\mu}(\theta, du)$;

3) *если* $\mathrm{E}\Big(\int_0^x \beta^2(\theta, u)\overline{\mu}(\theta, du)\Big)^{p/2} < \infty$ *для некоторого* $p \geqslant 2$, *то*

$$\mathrm{E}\sup_{u\in]0,x]}\Big|\mathbf{J}(\theta, u)\Big|^p \leqslant C_p\mathrm{E}\Big(\int_0^x \beta^2(\theta, x)\overline{\mu}(\theta, dx)\Big)^{p/2}. \tag{1}$$

где константа C_p *зависит только от* p;

4) *если для каждого* $\theta \in \Theta$ *траектории* $\mu(\theta, \cdot)$ *п.н. непрерывны, то* $\mathbf{J}(\theta, \cdot)$ *также п.н. непрерывен.*

В дальнейшем будем применять как неравенство (1), так и неравенство

$$\mathrm{E}\Big|\int_0^x \beta(\theta, u)\,\mu(\theta, du)\Big|^p \leqslant C_p\mathrm{E}\Big(\int_0^x \beta^2(\theta, u)\overline{\mu}(\theta, du)\Big)^{p/2}, \tag{2}$$

вытекающее из неравенства (1) и справедливое при тех же условиях.

Целью данной работы является исследование свойств стохастического интеграла

$$\eta(z) = \int_0^z \beta(z, x)\,\mu(z, dx), \qquad z \in \mathrm{R}^2_+, \tag{3}$$

где $\beta(z; x, \omega)$ и $\mu(z; x, \omega)$ – $\mathfrak{B}(\mathrm{R}^2_+)\otimes\mathfrak{P}$-измеримая и $\mathfrak{B}(\mathrm{R}^2_+)\otimes\mathfrak{T}$-измеримая действительные функции, $\mu(z, \cdot) \in \mathfrak{M}^S_2$ для каждого $z \in \mathrm{R}^2_+$.

Так как в интеграле (3) подынтегральная функция и мартингал зависят от пределов интегрирования, то, в общем случае, поле η не обладает мартингальными свойствами. Главным образом нас интересуют условия существования непрерывной справа и не имеющей разрывов второго рода модификации поля η, и неравенства для моментов равномерной нормы η. Одновременно с интегралом (3) будем рассматривать случайные поля

$$\vartheta(z) = \int_0^z \beta(x,x)\mu(x,dx),$$

$$\xi(z) = \int_0^z \beta(z,x)\mu(z,dx) + \int_0^z \beta(x,x)\mu(x,dx) -$$

$$- \int_0^z \beta((z_1,x_2),x)\mu((z_1,x_2),dx) - \int_0^z \beta((x_1,z_2),x)\mu((x_1,z_2),dx),$$

$$\zeta_1(z) = \int_0^z \beta((z_1,x_2),x)\mu((z_1,x_2),dx) - \int_0^z \beta(x,x)\mu(x,dx),$$

$$\zeta_2(z) = \int_0^z \beta((x_1,z_2),x)\mu((x_1,z_2),dx) - \int_0^z \beta(x,x)\mu(x,dx)$$

(сумма которых равна η). Определения стохастических интегралов, входящих в эти поля, будут даны в следующем разделе. Справедливость формулируемых далее утверждений для интеграла (3) будет следовать из соответствующих свойств случайных полей ϑ, ξ, ζ_1 и ζ_2, среди которых самостоятельное значение имеют неравенства для моментов модулей непрерывности полей ξ, ζ_1 и ζ_2. Свойства стохастических интегралов вида (3) и связанных с ними случайных полей применяются в исследовании стохастических уравнений Вольтерра на плоскости [6].

2. Интегралы

В этом разделе определяются стохастические интегралы, входящие в случайные поля ϑ, ξ, ζ_1, ζ_2, и стохастические интегралы, возникающие в процессе исследования этих случайных полей.

Лемма 2.1. *Пусть* $(z;x,\omega)\mapsto \varkappa(z;x,\omega)\in \mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{C}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, *где* $\mathfrak{C}$ *– одна из* σ*-алгебр:* $\mathfrak{T}$ *или* $\mathfrak{P}$. *Тогда:* $(x,\omega)\mapsto\varkappa(x;x,\omega)\in\mathfrak{C}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$; $(t;x,\omega)\mapsto\varkappa((t,x_2);x,\omega)\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+)\otimes\mathfrak{C}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$.

Доказательство. Заметим, что $\{(x,\omega)\,:\,(x,x,\omega)\in A\}\in\mathfrak{C}$ и $\{(t,x,\omega):((t,x_2),x,\omega)\in A\}\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+)\otimes\mathfrak{C}$ для любого $A\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{C}$. Поэтому для любого $B\in\mathfrak{B}(\mathrm{R})$

$$
\begin{aligned}
&\{(x,\omega):\varkappa(x,x,\omega)\in B\}=\\
=&\{(x,\omega):(x,x,\omega)\in\{(z,x,\omega):\varkappa(z,x,\omega)\in B\}\}\in\mathfrak{C},\\
&\{(t,x,\omega):\varkappa((t,x_2),x,\omega)\in B\}=\\
=&\{(t,x,\omega):((t,x_2),x,\omega)\in\{(z,x,\omega):\varkappa(z,x,\omega)\in B\}\}\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+)\otimes\mathfrak{C}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Для произвольных функций $h(z,y,x):\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\mapsto\mathrm{R}$, $g(z,x):\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\mapsto\mathrm{R}$ и разбиения δ определим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_1^\delta(g,]v,x])&=\sum_{i,j}g(u(i,j),\delta_{i,j}^{v,x}),\\
\mathbf{S}_2^\delta(g,t,]v,x])&=\sum_{i,j}g((u_i',t),\delta_{i,j}^{v,x}),\\
\mathbf{S}_3^\delta(h,t,]v,x])&=\sum_{i,j}h((u_i',t),u(i,j),\delta_{i,j}^{v,x}),\\
\mathbf{S}_4^\delta(h,z,]v,x])&=\sum_{i,j}h(z,(u_i',z_2),\delta_{i,j}^{v,x}),\\
\mathbf{S}_5^\delta(h,t,s,]v,x])&=\sum_{i,j}h((u_i',t),(u_i',s),\delta_{i,j}^{v,x}).
\end{aligned}
$$

Определим случайное поле $\mu'(z,y,x)=\mu(z,x)-\mu(y,x)$ и заметим, что существует такая $\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{T}$-измеримая функция $\widehat{\mu}(\cdot):\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\times\Omega\mapsto\mathrm{R}_+$, что для фиксированных $z,y\in\mathrm{R}_+^2$ случайное поле $\widehat{\mu}(z,y,\cdot)$ является квадратической вариацией сильного квадратично интегрируемого мартингала $\mu'(z,y,\cdot)$.

Далее будем предполагать, что случайное поле μ удовлетворяет условию: существует такая возрастающая функция $\varrho(\cdot)$: $\mathrm{R}_+\mapsto\mathrm{R}_+$ и такая измеримая функция $\lambda(z,x,\omega):\mathrm{R}_+^2\times\mathrm{R}_+^2\times\Omega\mapsto\mathrm{R}_+$, что: $\lim\limits_{t\to0}\varrho(t)=0$; $0\leqslant\lambda(y,]u,v],\omega)\leqslant\lambda(z,]u,v],\omega)$ для любых $u<v$,

$y \leqslant z$; $\mathrm{E}\lambda(z,]0, z]) < \infty$ для любого $z \in \mathrm{R}_+^2$;

$$\widehat{\mu}(z, y,]u, v]) \leqslant \lambda(z \vee y,]u, v])\varrho(|z - y|) \tag{4}$$

для любых $u < v$.

Не умаляя общности будем считать, что одновременно с неравенством (4) выполнены неравенства:

$$\overline{\mu}(z,]u, v]) \leqslant \lambda(z,]u, v]); \tag{5}$$

$$|\overline{\mu}(z,]u, v]) - \overline{\mu}(y,]u, v])| \leqslant \lambda(z \vee y,]u, v])\varrho(|z - y|); \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &|\widehat{\mu}(z', x',]u, v]) - \widehat{\mu}(z, x,]u, v])| \leqslant \\ &\leqslant \lambda(z' \vee z \vee x' \vee x,]u, v])\big(\varrho(|z' - z|) + \varrho(|x' - x|)\big). \end{aligned} \tag{7}$$

Действительно, если (4) выполняется, то учитывая соотношения

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}(z,]u, v]) = \widehat{\mu}(z, 0,]u, v]), \\ &|\overline{\mu}(z,]u, v]) - \overline{\mu}(y,]u, v])| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sqrt{\overline{\mu}(z,]u, v])} + \sqrt{\overline{\mu}(y,]u, v])}\right)\sqrt{\widehat{\mu}(z, y,]u, v])}, \\ &|\widehat{\mu}(z, x,]u, v]) - \widehat{\mu}(y, x,]u, v])| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sqrt{\widehat{\mu}(z, x,]u, v])} + \sqrt{\widehat{\mu}(y, x,]u, v])}\right)\sqrt{\widehat{\mu}(z, y,]u, v])}, \end{aligned}$$

получаем, что выполняются все неравенства (4)–(7) при замене прежнего поля $\lambda(z, x)$ и функции $\varrho(t)$ на $2\lambda(z, x)(1 + \varrho(|z|))(1 + \sqrt{\varrho(|z|)})$ и $\varrho(t) + \sqrt{\varrho(t)}$.

Теорема 2.1. *Существуют такие функции $\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(B, \omega)$, $\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t, B, \omega)$, $\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t, B, \omega)$, $\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z, B, \omega)$ и $\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t, s, B, \omega)$ аргументов $B \in \mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)$, $z \in \mathrm{R}_+^2$, t, $s \in \mathrm{R}_+$, $\omega \in \Omega$, что:*

1) *функции множеств $\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(\cdot, \omega)$, $\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t, \cdot, \omega)$, $\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t, \cdot, \omega)$, $\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z, \cdot, \omega)$ и $\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t, s, \cdot, \omega)$ являются σ-конечными мерами для любых фиксированных t, $s \in \mathrm{R}_+$, $z \in \mathrm{R}_+^2$, $\omega \in \Omega$;*

2) *с вероятностью* 1 *для любых* $t,\ s \in \mathrm{R}_+,\ z, v, x, \in \mathrm{R}_+^2$

$$\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(]v, x]) = \lim_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_1^{\delta}(\overline{\mu},]v, x]),$$

$$\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,]v, x]) = \lim_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_2^{\delta}(\overline{\mu}, t,]v, x]),$$

$$\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t,]v, x]) = \lim_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_3^{\delta}(\widehat{\mu}, t,]v, x]),$$

$$\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z,]v, x]) = \lim_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_4^{\delta}(\widehat{\mu}, z,]v, x]),$$

$$\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t, s,]v, x]) = \lim_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_5^{\delta}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x]),$$

3) *случайное поле* $(x, \omega) \mapsto \mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(]0, x], \omega)$ *является прогрессивно измеримым; поля* $(t; x, \omega) \mapsto \mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,]0, x], \omega)$ *и* $(t; x, \omega) \mapsto \mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t,]0, x], \omega)$ $\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+) \otimes \mathfrak{T}$-*измеримы; поля* $(z; x, \omega) \mapsto \mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z,]0, x], \omega)$ *и* $(t, s; x, \omega) \mapsto \mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t, s,]0, x], \omega)$ $\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2) \otimes \mathfrak{T}$-*измеримы; как функции от* x *они являются элементами пространства* $\mathbb{D}_0$.

Доказательство. Рассмотрим два разбиения пространства R_+^2: $\delta = \{\delta_{i,j} =]u(i,j), u(i+1, j+1)]\}$ и $\widehat{\delta} = \{\widehat{\delta}_{i,j} =]\widehat{u}(i,j), \widehat{u}(i+1, j+1)]\}$, связаные соотношением $\delta \subset \widehat{\delta}$ в том смысле, что любой прямоугольник разбиения δ может быть представлен в виде объединения прямоугольников разбиения $\widehat{\delta}$. Тогда для любых $t, s \in \mathrm{R}_+$, $v, x \in \mathrm{R}_+^2$, $v \leqslant x$, учитывая условие (7), имеем

$$\Big|\mathbf{S}_5^{\delta}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x]) - \mathbf{S}_5^{\widehat{\delta}}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x])\Big| = \bigg|\sum_{i,j}\bigg(\widehat{\mu}((u_i', t), (u_i', s), \delta_{i,j}^{v,x}) -$$

$$- \sum_{u(i,j)\leqslant \widehat{u}(r,k) < u(i+1,j+1)} \widehat{\mu}((\widehat{u}_r', t), (\widehat{u}_r', s), \widehat{\delta}_{r,k}^{v,x})\bigg)\bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j} \sum_{u(i,j)\leqslant \widehat{u}(r,k) < u(i+1,j+1)} \Big|\widehat{\mu}((u_i', t), (u_i', s), \widehat{\delta}_{r,k}^{v,x}) -$$

$$- \widehat{\mu}((\widehat{u}_r', t), (\widehat{u}_r', s), \widehat{\delta}_{r,k}^{v,x})\Big| \leqslant 2\lambda(x,]v, x])\varrho(|\delta|).$$

Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\delta, \delta' :\, |\delta| \vee |\delta'| < \varepsilon} \Big|\mathbf{S}_5^{\delta}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x]) - \mathbf{S}_5^{\delta'}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x])\Big| = 0$ и, значит, существует $\mathrm{A}_5^{\overline{\mu}}(t, s,]v, x]) = \lim\limits_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_5^{\delta}(\widehat{\mu}, t, s,]v, x])$. Более того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\delta,\delta'\colon|\delta|\vee|\delta'|<\varepsilon}\ \sup_{x\in[0,z]}\left|\mathbf{S}_5^{\delta}(\widehat{\mu},t,s,]0,x])-\mathbf{S}_5^{\delta'}(\widehat{\mu},t,s,]0,x])\right|=0.$$

Поэтому $(t,s;x,\omega)\mapsto \mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,]0,x],\omega)$ – $\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{T}$-измеримое поле с x-траекториями в $\mathbb{D}_0$.

Для любых $t,s\in\mathrm{R}_+$ и для P-почти всех $\omega\in\Omega$ отображение $]v,x]\mapsto \mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,]v,x],\omega)$ является положительной, σ-конечной, аддитивной и σ-полуаддитивной функцией множеств, определенной на полукольце прямоугольников $\{]v,x]\ :\ v,x\in\mathrm{R}_+^2,\ v\leqslant x\}$, и, значит, имеет единственное продолжение до σ-конечной меры $\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,\cdot,\omega)$ на $\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)$.

Аналогично получаем доказательства остальных утверждений теоремы.

В дальнейшем будем применять следующие естественные обозначения для интегралов от измеримых случайных полей $(\alpha(x),\ x\in\mathrm{R}_+^2)$ по мерам $\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(\cdot)$, $\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,\cdot)$, $\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t,\cdot)$, $\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z,\cdot)$ и $\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,\cdot)$:

$$\int_0^y \alpha(x)\overline{\mu}(x,dx)=\int_0^y \alpha(x)\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\overline{\mu}((x_1,t),dx)=\int_0^y \alpha(x)\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\widehat{\mu}((x_1,t),x,dx)=\int_0^y \alpha(x)\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\widehat{\mu}(z,(x_1,z_2),dx)=\int_0^y \alpha(x)\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\widehat{\mu}((x_1,t),(x_1,s),dx)=\int_0^y \alpha(x)\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,dx).$$

Теорема 2.2. *Существуют такие функции* $\mathrm{M}_1^{\mu}(x,\omega)\in\mathfrak{T}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, $\mathrm{M}_2^{\mu}(t,x,\omega)\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+)\otimes\mathfrak{T}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, $\mathrm{M}_3^{\mu'}(t,x,\omega)\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+)\otimes\mathfrak{T}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, $\mathrm{M}_4^{\mu'}(z,x,\omega)\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{T}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, $\mathrm{M}_5^{\mu'}(t,s,x,\omega)\in\mathfrak{B}(\mathrm{R}_+^2)\otimes\mathfrak{T}\,\big|\,\mathfrak{B}(\mathrm{R})$, *что для любых фиксированных* $t,s\in\mathrm{R}_+$, $z\in\mathrm{R}_+^2$ *случайные поля*

$\mathrm{M}_1^{\mu}(\cdot)$, $\mathrm{M}_2^{\mu}(t,\cdot)$, $\mathrm{M}_3^{\mu'}(t,\cdot)$, $\mathrm{M}_4^{\mu'}(z,\cdot)$ *и* $\mathrm{M}_5^{\mu'}(t,s,\cdot)$ *являются элементами* $\mathfrak{M}_2^S$ *с квадратическими вариациями* $\mathrm{A}_1^{\overline{\mu}}(]0,\cdot])$, $\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,]0,\cdot])$, $\mathrm{A}_3^{\widehat{\mu}}(t,]0,\cdot])$, $\mathrm{A}_4^{\widehat{\mu}}(z,]0,\cdot])$ *и* $\mathrm{A}_5^{\widehat{\mu}}(t,s,]0,\cdot])$ *соответственно и*

$$\mathrm{M}_1^{\mu}(\cdot)=\lim_{|\delta|\to 0}\mathbf{S}_1^{\delta}(\mu,]0,\cdot]),\qquad \mathrm{M}_2^{\mu}(t,\cdot)=\lim_{|\delta|\to 0}\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,\cdot]),$$

$$\mathrm{M}_3^{\mu'}(t,\cdot)=\lim_{|\delta|\to 0}\mathbf{S}_3^{\delta}(\mu',t,]0,\cdot]),\qquad \mathrm{M}_4^{\mu'}(z,\cdot)=\lim_{|\delta|\to 0}\mathbf{S}_4^{\delta}(\mu',z,]0,\cdot]),$$

$$\mathrm{M}_5^{\mu'}(t,s,\cdot)=\lim_{|\delta|\to 0}\mathbf{S}_5^{\delta}(\mu',t,s,]0,\cdot])$$

в топологии пространства $(\mathfrak{M}_2^S,\mathbf{r}_2^S)$.

Доказательство. Заметим, что для каждого $t\in\mathrm{R}_+$ случайное поле $\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,\cdot])$ является элементом пространства $\mathfrak{M}_2^S$ с квадратической вариацией $\mathbf{S}_2^{\delta}(\overline{\mu},t,]0,\cdot])$. Если разбиения δ и $\widehat{\delta}$ пространства R_+^2 связаны соотношением $\delta\subset\widehat{\delta}$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,x])-\mathbf{S}_2^{\widehat{\delta}}(\mu,t,]0,x])=\\
&=\sum_{i,j}\Bigl(\mu((u_i',t),\delta_{i,j}^{0,x})-\sum_{u(i,j)\leqslant\widehat{u}(r,k)<u(i+1,j+1)}\mu((\widehat{u}_r',t),\widehat{\delta}_{r,k}^{0,x})\Bigr)=\\
&=\sum_{i,j}\ \sum_{u(i,j)\leqslant\widehat{u}(r,k)<u(i+1,j+1)}\mu'((u_i',t),(\widehat{u}_r',t),\widehat{\delta}_{r,k}^{0,x}).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\Bigl(\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,x])-\mathbf{S}_2^{\widehat{\delta}}(\mu,t,]0,x]),\ x\in\mathrm{R}_+^2\Bigr)\in\mathfrak{M}_2^S$ с квадратической вариацией

$$\Bigl(\sum_{i,j}\ \sum_{u(i,j)\leqslant\widehat{u}(r,k)<u(i+1,j+1)}\widehat{\mu}((u_i',t),(\widehat{u}_r',t),\widehat{\delta}_{r,k}^{0,x}),\quad x\in\mathrm{R}_+^2\Bigr).$$

Применяя неравенство Каироли [8] и условие (4), получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\sup_{x\in]0,z]}\Bigl|\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,x])-\mathbf{S}_2^{\widehat{\delta}}(\mu,t,]0,x])\Bigr|^2\leqslant\\
&\leqslant 16\mathrm{E}\lambda(z,]0,z])\varrho(|\delta|)\to 0\quad\text{при}\quad|\delta|\to 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\delta,\delta':\,|\delta|\vee|\delta'|<\varepsilon}\ \mathrm{E}\sup_{x\in]0,z]}\Bigl|\mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,]0,x])-\mathbf{S}_2^{\delta'}(\mu,t,]0,x])\Bigr|^2=0$$

для каждого $z \in \mathrm{R}_+^2$.

Следовательно, существует предел $\mathrm{M}_2^{\mu}(t,\cdot) = \lim\limits_{|\delta|\to 0} \mathbf{S}_2^{\delta}(\mu,t,\cdot)$ в топологии пространства $\mathfrak{M}_2^S$, и квадратическая вариация мартингала $\mathrm{M}_2^{\mu}(t,\cdot)$ равна $\mathrm{A}_2^{\overline{\mu}}(t,]0,\cdot])$.

Доказательства остальных утверждений теоремы могут быть получены аналогично.

В дальнейшем будем применять следующие обозначения для интегралов от предсказуемых случайных полей $(\alpha(x),\, x \in \mathrm{R}_+^2)$ по сильным мартингалам $\mathrm{M}_1^{\mu}(\cdot)$, $\mathrm{M}_2^{\mu}(t,\cdot)$, $\mathrm{M}_3^{\mu'}(t,\cdot)$, $\mathrm{M}_4^{\mu'}(z,\cdot)$ и $\mathrm{M}_5^{\mu'}(t,s,\cdot)$:

$$\int_0^y \alpha(x)\mu(x,dx) = \int_0^y \alpha(x)\mathrm{M}_1^{\mu}(dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\mu((x_1,t),dx) = \int_0^y \alpha(x)\mathrm{M}_2^{\mu}(t,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\mu'((x_1,t),x,dx) = \int_0^y \alpha(x)\mathrm{M}_3^{\mu'}(t,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\mu'(z,(x_1,z_2),dx) = \int_0^y \alpha(x)\mathrm{M}_4^{\mu'}(z,dx),$$

$$\int_0^y \alpha(x)\mu'((x_1,t),(x_1,s),dx) = \int_0^y \alpha(x)\mathrm{M}_5^{\mu'}(t,s,dx).$$

3. Модификации и неравенства

Согласно теореме 2.2 и лемме 1.2 случайное поле ϑ является элементом пространства $\mathfrak{M}_2^S$ и

$$\mathrm{E}\sup_{x\in]0,z]}\Big|\vartheta(x)\Big|^p \leqslant C_p\mathrm{E}\Big(\int_0^z \beta^2(x,x)\overline{\mu}(x,dx)\Big)^{p/2}, \quad p \geqslant 2.$$

Для произвольной фунции $h(\cdot) : \mathrm{R}_+^k \mapsto \mathrm{R}$ и измеримого случайного поля $\gamma(\cdot,\cdot) : \mathrm{R}_+^k \times \Omega \mapsto \mathrm{R}$ определим:

$$\Phi_a(p,\varepsilon,\gamma) = \sup\big\{(\mathrm{E}|\gamma(a') - \gamma(a'')|^p)^{1/p} \,:\, a',a'' \in [0,a];\, |a'-a''| \leqslant \varepsilon\big\},$$

$$\Delta(a,f,\varepsilon)=\sup\{|f(a')-f(a'')|: a',a''\in[0,a];\ |a'-a''|\leqslant\varepsilon\},$$

$\varepsilon>0$, $p>1$, $a\in \mathrm{R}_+^k$.

Для исследования полей ξ, ζ_1 и ζ_2 будем применять следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [3] и [5].

Лемма 3.1. *Предположим, что для некоторого $p>1$*

$$\sup_{a'\in[0,a]}\mathrm{E}|\gamma(a')|^p<\infty \quad \textit{и} \quad \int\limits_0^1 s^{-1-k/p}\Phi_a(p,s,\gamma)ds<\infty.$$

Тогда существует непрерывная модификация $\overline{\gamma}$ случайного поля γ и

$$(\mathrm{E}\sup_{a'\in[0,a]}|\overline{\gamma}(a')|^p)^{1/p}\leqslant C_{k,p,a}\Big\{\sup_{a'\in[0,a]}(\mathrm{E}|\gamma(a')|^p)^{1/p}+\int\limits_0^1\frac{\Phi_a(p,s,\gamma)}{s^{1+k/p}}ds\Big\},$$

$$(\mathrm{E}\Delta^p(a,\varepsilon,\overline{\gamma}))^{1/p}\leqslant C_{k,p,a}\Big\{\varepsilon^{-k/p}\Phi_a(p,\varepsilon,\gamma)+\int\limits_0^\varepsilon\frac{\Phi_a(p,s,\gamma)}{s^{1+k/p}}ds\Big\}$$

для любых $a\in\mathrm{R}_+^k$ и $\varepsilon\in]0,1]$.

Определим $\beta'(z,y,x)=\beta(z,x)-\beta(y,x)$ и рассмотрим условие:

(H) существует такое число $p\geqslant 2$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t\geqslant 0}$ и измеримое случайное поле $\overline{\beta}(z,x)$, что:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^1\frac{\varphi(s)\,ds}{s^{1+2/p}}<\infty;\quad 0\leqslant\overline{\beta}(z,x)\leqslant\overline{\beta}(z',x)\quad\text{для}\quad z\leqslant z';\\
&\widehat{\mu}(z,z',]x,y])\leqslant\lambda(z\vee z',]x,y])\varphi^2(|z-z'|)\quad\text{для}\quad x\leqslant y;\\
&|\beta'(z,y,x)|\leqslant\overline{\beta}(z\vee y,x)\varphi(|z-y|);\\
&B_p(z)\triangleq\mathrm{E}\Big(\int\limits_0^z\overline{\beta}^{\,2}(z,x)\lambda(z,dx)\Big)^{p/2}<\infty.
\end{aligned}\tag{8}$$

Не умаляя общности будем считать, что одновременно с неравенством (8) выполнено неравенство $|\beta(z,x)|\leqslant\overline{\beta}(z,x)$.

Теорема 3.1. *Предположим, что условие* (H) *выполнено. Тогда:*

1) *случайное поле* ξ *имеет непрерывную модификацию, поля* η, ζ_1 *и* ζ_2 *имеют модификации с траекториями в* $\mathbb{D}_0$*;*

2) *для любого фиксированного* $z_2 \geqslant 0$ *процесс* $(\zeta_1(z_1, z_2))_{z_1 \geqslant 0}$ *имеет непрерывные траектории; для любого фиксированного* $z_1 \geqslant 0$ *процесс* $(\zeta_1(z_1, z_2))_{z_2 \geqslant 0}$ *является однопараметрическим квадратично интегрируемым* $(\mathfrak{F}_{(z_1,z_2)})_{z_2 \geqslant 0}$*-мартингалом;*

3) *для любого фиксированного* $z_1 \geqslant 0$ *процесс* $(\zeta_2(z_1, z_2))_{z_2 \geqslant 0}$ *имеет непрерывные траектории; для любого фиксированного* $z_2 \geqslant 0$ *процесс* $(\zeta_2(z_1, z_2))_{z_1 \geqslant 0}$ *является однопараметрическим квадратично интегрируемым* $(\mathfrak{F}_{(z_1,z_2)})_{z_1 \geqslant 0}$*-мартингалом;*

4) *справедливы неравенства:*

$$\mathrm{E} \sup_{x \in [0,z]} |\eta(x)|^p \leqslant C_{p,\varphi,z} \mathrm{E} \Big(\int_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z,x)\lambda(z,dx) \Big)^{p/2},$$

$$\mathrm{E}\Delta^p(z,\xi,\varepsilon) + \mathrm{E}\Delta^p(z_1, \zeta_1(\cdot, z_2), \varepsilon) + \mathrm{E}\Delta^p(z_2, \zeta_2(z_1, \cdot), \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant C_{p,\varphi,z,\varepsilon} \mathrm{E} \Big(\int_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z,x)\lambda(z,dx) \Big)^{p/2},$$

где $C_{p,\varphi,z,\varepsilon} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что при $y \leqslant z$ имеет место равенство

$$\xi(z) - \xi(y) = \mathbf{J}_1(z,y) - \mathbf{J}_2(z,y) - \mathbf{J}_3(z,y) + \mathbf{J}_4(z,y) + \mathbf{J}_5(z,y),$$

где

$$\mathbf{J}_1(z,y) = \int_0^y \beta(z,x)\mu'(z,y,dx) + \int_0^y \beta'(z,y,x)\mu(y,dx),$$

$$\mathbf{J}_2(z,y) = \int_0^y \beta((z_1,x_2),x)\mu'((z_1,x_2),(y_1,x_2),dx) +$$

$$+ \int_0^y \beta'((z_1,x_2),(y_1,x_2),x)\mu((y_1,x_2),dx),$$

$$\mathbf{J}_3(z,y) = \int\limits_0^y \beta((x_1,z_2),x)\mu'((x_1,z_2),(x_1,y_2),dx) + \\ + \int\limits_0^y \beta'((x_1,z_2),(x_1,y_2),x)\mu((x_1,y_2),dx),$$

$$\mathbf{J}_4(z,y) = \\ = \int\limits_{(0,y_2)}^{z} \big[\beta(z,x)\mu'(z,(z_1,x_2),dx) + \beta'(z,(z_1,x_2),x)\mu((z_1,x_2),dx)\big] - \\ - \int\limits_{(0,y_2)}^{z} \big[\beta((x_1,z_2),x)\mu'((x_1,z_2),x,dx) - \beta'((x_1,z_2),x,x)\mu(x,dx)\big],$$

$$\mathbf{J}_5(z,y) = \\ = \int\limits_{(y_1,0)}^{(z_1,y_2)} \big[\beta(z,x)\mu'(z,(x_1,z_2),dx) + \beta'(z,(x_1,z_2),x)\mu((x_1,z_2),dx)\big] - \\ - \int\limits_{(y_1,0)}^{(z_1,y_2)} \big[\beta((z_1,x_2),x)\mu'((z_1,x_2),x,dx) - \beta'((z_1,x_2),x,x)\mu(x,dx)\big].$$

Применяя неравенство (2) имеем

$$\mathrm{E}|\mathbf{J}_1(z,y)|^p \leqslant 2^{p-1}C_p\mathrm{E}\bigg\{\bigg(\int\limits_0^y |\beta(z,x)|^2\widehat{\mu}(z,y,dx)\bigg)^{p/2} + \\ + \bigg(\int\limits_0^y |\beta'(z,y,x)|^2\overline{\mu}(y,dx)\bigg)^{p/2}\bigg\} \leqslant 2^pC_p\varphi^p(|z-y|)B_p(z);$$

$$\mathrm{E}|\mathbf{J}_2(z,y)|^p \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p-1} C_p \mathrm{E}\Big\{ \Big(\int_0^y |\beta((z_1,x_2),x)|^2 \widehat{\mu}((z_1,x_2),(y_1,x_2),dx) \Big)^{p/2} +$$
$$+ \Big(\int_0^y |\beta'((z_1,x_2),(y_1,x_2),x)|^2 \overline{\mu}((y_1,x_2),dx) \Big)^{p/2} \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant 2^p C_p \varphi^p(|z_1-y_1|) B_p(z);$$
$$\mathrm{E}|\mathbf{J}_3(z,y)|^p \leqslant 2^p C_p \varphi^p(|z_2-y_2|) B_p(z);$$

$$\mathrm{E}|\mathbf{J}_4(z,y)|^p \leqslant 4^{p-1} C_p \mathrm{E}\Big\{ \Big(\int_{(0,y_2)}^z |\beta(z,x)|^2 \widehat{\mu}(z,(z_1,x_2),dx) \Big)^{p/2} +$$
$$+ \Big(\int_{(0,y_2)}^z |\beta'(z,(z_1,x_2),x)|^2 \overline{\mu}((z_1,x_2),dx) \Big)^{p/2} +$$
$$+ \Big(\int_{(0,y_2)}^z |\beta((x_1,z_2),x)|^2 \widehat{\mu}((x_1,z_2),x,dx) \Big)^{p/2} +$$
$$+ \Big(\int_{(0,y_2)}^z |\beta'((x_1,z_2),x,x)|^2 \overline{\mu}(x,dx) \Big)^{p/2} \Big\} \leqslant 4^p C_p \varphi^p(|z_2-y_2|) B_p(z);$$
$$\mathrm{E}|\mathbf{J}_5(z,y)|^p \leqslant 4^p C_p \varphi^p(|z_1-y_1|) B_p(z).$$

Следовательно, $\Phi_z(p,s,\xi) \leqslant C'_p \varphi(s) \big(B_p(z)\big)^{1/p}$. Снова применяя неравенство (2), имеем $\mathrm{E}|\xi(z)|^p \leqslant C''_p B_p(z)$.

Согласно лемме 3.1 случайное поле ξ имеет непрерывную модификацию для которой справедливы неравенства:

$$\mathrm{E} \sup_{x\in[0,z]} |\xi(x)|^p \leqslant C'_{p,\varphi,z} \mathrm{E}\Big(\int_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z,x)\lambda(z,dx) \Big)^{p/2}, \tag{9}$$

$$\mathrm{E}\Delta^p(z,\xi,\varepsilon) \leqslant C'_{p,\varphi,z,\varepsilon} \mathrm{E}\Big(\int_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z,x)\lambda(z,dx) \Big)^{p/2},$$

где $C'_{p,\varphi,z,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Заметим далее, что при $y \leqslant z$

$$\zeta_1(z_1, y_2) - \zeta_1(y_1, y_2) = \int\limits_0^{(y_1,y_2)} \Big(\beta'((z_1, x_2), (y_1, x_2), x)\mu((z_1, x_2), dx) +$$

$$+ \beta((y_1, x_2), x)\mu'((z_1, x_2), (y_1, x_2), dx)\Big) +$$

$$+ \int\limits_{(y_1,0)}^{(z_1,y_2)} \Big(\beta'((z_1, x_2), x, x)\mu((z_1, x_2), dx) + \beta(x, x)\mu'((z_1, x_2), x, dx)\Big).$$

Поэтому

$$\mathrm{E}|\zeta_1(z_1, y_2) - \zeta_1(y_1, y_2)|^p \leqslant$$

$$\leqslant 4^{p-1} C_p \mathrm{E}\bigg\{\bigg(\int\limits_0^{(y_1,y_2)} |\beta'((z_1, x_2), (y_1, x_2), x)|^2 \overline{\mu}((z_1, x_2), dx)\bigg)^{p/2} +$$

$$+ \bigg(\int\limits_0^{(y_1,y_2)} |\beta((y_1, x_2), x)|^2 \widehat{\mu}((z_1, x_2), (y_1, x_2), dx)\bigg)^{p/2} +$$

$$+ \bigg(\int\limits_{(y_1,0)}^{(z_1,y_2)} |\beta'((z_1, x_2), x, x)|^2 \overline{\mu}((z_1, x_2), dx)\bigg)^{p/2} +$$

$$+ \bigg(\int\limits_{(y_1,0)}^{(z_1,y_2)} |\beta(x, x)|^2 \widehat{\mu}((z_1, x_2), x, dx)\bigg)^{p/2}\bigg\} \leqslant 4^p C_p \varphi^p(|z_1 - y_1|) B_p(z),$$

и, следовательно, $\Phi_{z_1}(p, s, \zeta_1(\cdot, z_2)) \leqslant C'_p \varphi(s)\big(B_p(z)\big)^{1/p}$. Кроме того, $\mathrm{E}|\zeta_1(z)|^p \leqslant C''_p B_p(z)$. Применяя лемму 3.1 получаем, что

$$\Big(\mathrm{E} \sup_{y_1 \in [0, z_1]} |\zeta_1(y_1, z_2)|^p\Big)^{1/p} \leqslant C'_{p,\varphi,z} \mathrm{E}\bigg(\int\limits_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z, x)\lambda(z, dx)\bigg)^{p/2}, \quad (10)$$

$$\Big(\mathrm{E}\Delta^p(z_1, \zeta_1(\cdot, z_2), \varepsilon)\Big)^{1/p} \leqslant C'_{p,\varphi,z,\varepsilon} \mathrm{E}\bigg(\int\limits_0^z \overline{\beta}^{\,2}(z, x)\lambda(z, dx)\bigg)^{p/2},$$

где $C'_{p,\varphi,z,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для каждого $z_1 \geqslant 0$ процесс $\Big(\zeta_1(z_1, y_2) - \zeta_1(y_1, y_2)\Big)_{y_2 \geqslant 0}$ является непрерывным справа однопараметрическим квадратично интегрируемым $(\mathfrak{F}_{(z_1,y_2)})_{y_2\geqslant 0}$-мартингалом. Применяя условие Каироли–Уолша получаем, что $\Big(\Delta(z_1, \zeta_1(\cdot, y_2), \varepsilon)\Big)_{y_2\geqslant 0}$ – $(\mathfrak{F}_{(z_1,y_2)})_{y_2\geqslant 0}$-субмартингал.

Поэтому для сепарабельной модификации случайного поля $\zeta_1(\cdot)$ имеем соотношение

$$\mathrm{E}\sup_{y_2\leqslant z_2} \Delta^p(z_1, \zeta_1(\cdot, y_2), \varepsilon) \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathrm{E}\Delta^p(z_1, \zeta_1(\cdot, z_2), \varepsilon).$$

Так как для каждого $z_1 \geqslant 0$ процесс $\Big(\zeta_1(z_1, y_2)\Big)_{y_2\geqslant 0}$ п.н. непрерывен, то $(\zeta_1(z),\ z \in \mathrm{R}^2_+)$ имеет модификацию с траекториями в $\mathbb{D}_0$.

Так как $\Big(\sup\limits_{y_1\leqslant z_1} |\zeta_1(y_1, y_2)|\Big)_{y_2\geqslant 0}$ – $(\mathfrak{F}_{(z_1,y_2)})_{y_2\geqslant 0}$-субмартингал, то

$$\mathrm{E}\sup_{y\in]0,z]} |\zeta_1(y)|^p = \mathrm{E}\sup_{y_2\leqslant z_2}\Big(\sup_{y_1\leqslant z_1} |\zeta_1(y_1, y_2)|\Big)^p \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathrm{E}\sup_{y_1\leqslant z_1} |\zeta_1(y_1, z_2)|^p,$$

что вместе с неравенством (10) влечет неравенство (9) с заменой буквы ξ на ζ_1.

Используя равенство

$$\zeta_2(y_1, z_2) - \zeta_2(y_1, y_2) = \int\limits_0^{(y_1,y_2)} \Big(\beta'((x_1, z_2), (x_1, y_2), x)\mu((x_1, z_2), dx) +$$
$$+\beta((x_1, y_2), x)\mu'((x_1, z_2), (x_1, y_2), dx)\Big) +$$
$$+ \int\limits_{(0,y_2)}^{(y_1,z_2)} \Big(\beta'((x_1, z_2), x, x)\mu((x_1, z_2), dx) + \beta(x, x)\mu'((x_1, z_2), x, dx)\Big)$$

для $y \leqslant z$, и проводя рассуждения, аналогичные тем, что применялись при исследовании поля ζ_1, получаем утверждения теоремы для поля ζ_2.

Учитывая очевидное равенство $\eta(z) = \vartheta(z) + \xi(z) + \zeta_1(z) + \zeta_2(z)$, убеждаемся в справедливости всех утверждений теоремы. Теорема доказана.

Литература

1. А. А. Гущин, *К общей теории случайных полей на плоскости.* — Усп. мат. наук **372**, вып. 6 (1982), 53–74.
2. А. А. Гущин, Ю. С. Мишура, *Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов.* 1. — Теор. вероятн. и матем. стат. вып. 42 (1990), 27–35.
3. И. А. Ибрагимов, *Об условиях гладкости траекторий случайных функций.* — Теор. вероятн. и ее примен., **28**, вып. 2 (1983), 229–250.
4. M. Dozzi, *Twoparameter stochastic processes.* — Mathematical Research **61** (1991), 17–43.
5. A. M. Kolodii, *On existence of continuous modifications of random processes.* — Theory of Stochastic Processes **6(22)**, Nos. 1–2 (2000), 54–57.
6. N. A. Kolodii, *Existence theorems and limit theorems for stochastic Volterra equations on the plane.* — Abstracts of Communications of Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics," Moscow (2003), 473–474.
7. C. Stricker, M. Yor, *Calcul stochastique d'ependant d'un parametre.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **45** (1978), 109–133.
8. J. B. Walsh, *Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane.* — Lect. Notes Math. **1215** (1986), 329–491.

Kolodii N. A. Some properties of random fields connected with stochastic integrals with respect to strong martingales.

We investigate properties of the random fields connected with stochastic intergals with respect to a two-parameter strong square-integrable martingale in the case where the martingale and integrands depend on bounds of integration. We prove inequalities for the moments of uniform norm and modulus of continuity of trajectories of modifications of such fields.

Волгоградский
государственный университет
E-mail: nkolodii@mail.ru

Поступило 25 июня 2004 г.