Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 320, 2004 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

1. Специальный класс неоднородных функционалов. В работе рассматривается задача о вычислении распределений неоднородных функционалов специального вида от броуновского процесса. Пусть $W(s)$ – процесс броуновского движения. Функционал

$$\int_0^t f(s, W(s))ds \tag{1.1}$$

является неоднородным интегральным функционалом от броуновского движения W. Классический метод вычисления распределний таких функционалов базируется на решениях дифференциальных уравнений в частных производных. В явном виде такие задачи, как правило, не решаются. Это обстоятельство является принципиальным, и как то избежать его в сколь-нибудь общих случаях невозможно.

Основы метода вычисления математических ожиданий функций от значений диффузионных процессов были заложены в работе А. Н. Колмогорова [1]. М. Кац в работах [2] и [3] распространил этот метод на вычисления преобразований Лапласа неотрицательных интегральных функционалов от броуновского движения. Результат, позволяющий вычислять распределения функционалов от диффузионных процессов, остановленных в момент выходы на границу интервала, был получен Р. З. Хасьминским [4].

Для некоторых частных случаев функции $f(s, x)$ решение задачи о распределении функционалов (1.1) может быть основано на решениях обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, что позволяет получать явные решения. Это будет

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ-ННИО 04-01-04000, РФФИ 02-01-00265, INTAS 03-51-5018 и НШ 2258.2003.1.

справедливо, например, для специального класса таких функционалов, когда $f(s,x)$ является ступенчатой функцией переменной s с конечным числом интервалов постоянства. В работе рассматривается лишь случай двухступенчатой функции, поскольку он уже в полной мере отражает суть предлагаемого подхода. Положим

$$\bar{f}_r(t,x) = \mathbb{I}_{[0,r)}(t) f_1(x) + \mathbb{I}_{[r,\infty)}(t) f_2(x).$$

Функционал (1.1) нами будет рассматриваться только для таких функций. Обозначим этот функционал

$$A_r(t) := \int_0^t \bar{f}_r(s, W(s))ds \tag{1.2}$$

Он зависит от двух параметров, r – момента, характеризующего границу неоднородности по времени, и t – момента времени, до которого рассматриваются траектории процесса.

Для таких функционалов возникает целый круг задач. Для того, чтобы вычислить распределения в фиксированные моменты r и t, сначала нужно рассмотреть независимые экспоненциально распределенные моменты вместо фиксированных, а затем обратить преобразования Лапласа, отвечающие таким моментам. Пусть τ_1 и τ – независимые друг от друга и от броуновского движения $\{W(s),\ s \ge 0\}$ случайные моменты остановки с показательными распределениями с параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda > 0$, соответственно, т. е. $\mathbf{P}(\tau_1 \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$, $\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}$.

Вместо фиксированных моментов времени r и t можно взять различные случайные моменты остановки. В качестве таких моментов можно выбрать $H_{a,b} = \min\{s : W(s) \notin (a,b)\}$ – момент первого выхода на границу интервала, и

$$\nu(t) := \min\Big\{s : \int_0^s g(W(v))dv > t\Big\}$$

– момент, обратный к неотрицательному интегральному функционалу. Кроме того, с помощью операций минимума и максимума можно из уже упомянутых моментов образовывать новые моменты. В работе представлены результаты, позволяющие вычислять распределения специальных неоднородных функционалов, характеризуемых двумя интервалами постоянства со случайными концами. Рассмотрены примеры применения полученных результатов для вычисления конкретных распределений.

Для произвольных случайной величины μ и события Q обозначение $\mathbf{E}\{\mu; Q\}$ служит компактной записью для $\mathbf{E}\{\mu 1\!\!\mathrm{I}_Q\}$. Будем для краткости обозначать $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожедание по броуновскому движению $W(\cdot)$ при условии $W(0) = x$.

Замечание 1.1. Решение дифференциальные уравнения вида

$$U''(x) - h(x)U(x) = -q(x), \quad x \in (a, b), \tag{1.3}$$

где $h(x)$ и $q(x)$ – кусочно непрерывные функции понимается следующим образом: на интервалах непрерывности функций h и q оно удовлетворяет (1.3), а в точках разрыва функций h и q решение и его первая производная полагаются непрерывными.

Замечание 1.2. Если в дополнение к уравнению (1.3) накладывается условие на скачок первой производной вида

$$U'(z+) - U'(z-) = -2\lambda, \qquad z \in (a, b), \tag{1.4}$$

то при $x \neq z$ решение понимается согласно замечанию 1.1, а в точке z наряду с (1.4) налагается условие непрерывности решения.

Замечание 1.3. Если a и b конечны, то задаются граничные условия в этих точках, а если, либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$, то соответствующее граничное условие заменяется на условие ограниченности функции $U(x)$ при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Для неотрицательных функций $h(x)$ и ограниченных $q(x)$ удовлетворяющие этим требованиям решения являются единственными.

2. Показательно распределенные моменты времени. Пусть $f_l(x)$, $l = 1, 2$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции.

Так как рассматриваются лишь неотрицательные интегральные функционалы A, то особое значение в вычислении распределений имеют преобразования Лапласа распределений A. Следующий результат позволяет вычислять распределение функционала $A_r(t)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $F_l(x)$, $f_l(x)$, $l = 1, 2$, *– кусочно непрерывные функции. Пусть* $F_l(x)$ *– ограничены, а* $f_l(x)$ *– неотрицательны. Положим* $\bar F_r(t,x) = 1\!\!\mathrm{I}_{[0,r)}(t)F_1(x) + 1\!\!\mathrm{I}_{[r,\infty)}(t)F_2(x)$. *Тогда*

$$M(x) := \mathbf{E}_x\left\{\bar F_{\tau_1}(\tau, W(\tau))e^{-A_{\tau_1}(\tau)}\right\} = M_1(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_2(z)G_x(z)dz, \tag{2.1}$$

где функция $G_x(z)$ *является единственным ограниченным решением задачи*

$$\frac{1}{2}G''(z) - (\lambda_1 + \lambda + f_1(z))G(z) = 0, \qquad z \neq x, \tag{2.2}$$

$$G'(x+0) - G'(x-0) = -2\lambda_1, \tag{2.3}$$

а функции $M_l(x)$, $l = 1, 2$, *являются единственными ограниченными решениями уравнений*

$$\frac{1}{2}M_1''(x) - (\lambda_1 + \lambda + f_1(x))M_1(x) = -\lambda F_1(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2}M_2''(x) - (\lambda + f_2(x))M_2(x) = -\lambda F_2(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. Функция $M(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}M''(x) - (\lambda_1 + \lambda + f_1(x))M(x) = -\lambda_1 M_2(x) - \lambda F_1(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

где $M_2(x)$ – единственное ограниченное решение уравнения (2.5).

Доказательство теоремы 2.1. Для фиксированного r имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\left\{\bar F_r(\tau, W(\tau))e^{-A_r(\tau)}\right\} = \\
&\quad = \mathbf{E}_x\Big\{F_1(W(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f_1(W(s))ds\Big); \tau \leqslant r\Big\} + \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{F_2(W(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{r} f_1(W(s))ds\Big)\times \\
&\quad \times \exp\Big(-\int\limits_r^{\tau} f_2(W(s))ds\Big); W(r) \in dz, r < \tau\Big\} =
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{F_1(W(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f_1(W(s))ds\Big);\tau\leqslant r\Big\}+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_z\Big\{F_2(\widetilde{W}(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f_2(\widetilde{W}(s))ds\Big)\Big\}\times$$

$$\times\,\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^r(\lambda+f_1(W(s))ds\Big);W(r)\in dz\Big\}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались независимостью момента τ от броуновского движения $W(s)$. Это позволило сделать замену $\tau - r$ на τ. В связи с этим появилось слагаемое λ перед функцией f_1 в показателе первой экспоненты. Процесс $\widetilde{W}(s) = W(s+r) - W(r) + z$ снова является броуновским движением, не зависящим от $W(v)$ до момента r. Домножив правую и левую части полученного соотношения на $\lambda_1 e^{-\lambda_1 r}$, а затем проинтегрировав по r, получим (2.1), где

$$M_1(x) = \mathbf{E}_x\Big\{F_1(W(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau(\lambda_1+f_1(W(s))ds\Big)\Big\},$$

$$M_2(z) = \mathbf{E}_z\Big\{F_2(W(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f_2(W(s))ds\Big)\Big\},$$

$$G_x(z) = \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\tau_1}(\lambda+f_1(W(s))ds\Big);W(\tau_1)<z\Big\}.$$

По теореме 2.3 гл. 2 из [5] функция $G_x(z)$ является единственным решением задачи (2.2), (2.3), а по теореме 2.2 гл. 2 из [5] функции $M_1(x)$и $M_2(z)$ являются единственными ограниченными решениеми уравнений (2.4) и (2.5) соответственно. Теорема доказана.

3. Совместное распределение интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума. Рассмотрим функционал $A_r(t)$, определенный в предыдущем параграфе, при ограничении $r < t$. Обозначим $t = r + u$, где $u > 0$. При таком ограничении, наряду с функционалом $A_r(r + u)$ естественно рассмотреть функционалы инфимума и супремума от броуновского движения.

Этот параграф посвящен результатам, которые позволяют вычислять совместное распределение функционалов

$$A_r(r+u),\quad \inf_{0\le s\le r} W(s),\quad \inf_{r\le s\le r+u} W(s),\quad \sup_{0\le s\le r} W(s),\quad \sup_{r\le s\le r+u} W(s).$$

Как уже отмечалось, вместо фиксированных моментов r, u, нужно сначала рассмотреть показательно распределенные моменты τ_l, $l=1,2$, с параметрами λ_1, λ_2 соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть $f_1(z)$, $z\in[a,b]$, $f_2(z)$, $z\in[c,h]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда при $a<x<b$*

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A_{\tau_1}(\tau_1+\tau_2)}; a<\inf_{0\le s\le\tau_1} W(s), \sup_{0\le s\le\tau_1} W(s)<b, c<\inf_{\tau_1\le s\le\tau_1+\tau_2} W(s),$$

$$\sup_{\tau_1\le s\le\tau_1+\tau_2} W(s)<h\Big\} = \int_{a\vee c}^{b\wedge h} G_x(z)M(z)dz, \tag{3.1}$$

где функция $G_x(z)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(z)-(\lambda_1+f_1(z))G(z)=0, \qquad z\in(a,b)\setminus\{x\}, \tag{3.2}$$

$$G'(x+0)-G'(x-0)=-2\lambda_1, \tag{3.3}$$

$$G(a+0)=0, \qquad G(b-0)=0, \tag{3.4}$$

а $M(z)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}M''(z)-(\lambda_2+f_2(z))M(z)=-\lambda_2, \qquad z\in(c,h), \tag{3.5}$$

$$M(c+0)=0, \qquad M(h-0)=0. \tag{3.6}$$

Замечание 3.1. Для того, чтобы вычислить распределения для фиксированных моментов r, u, достаточно обратить два преобразования Лапласа по параметрам λ_1,λ_2:

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-A_r(r+u)}, a<\inf_{0\le s\le r} W(s), \sup_{0\le s\le r} W(s)<b,$$

$$c<\inf_{r\le s\le r+u} W(s), \sup_{r\le s\le r+u} W(s)<h\Big\} =$$

$$=\mathcal{L}^{-1}_{\lambda_1}\mathcal{L}^{-1}_{\lambda_2}\Big(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\int_{a\vee c}^{b\wedge h} G_x(z)M(z)dz\Big) = \int_{a\vee c}^{b\wedge h}\mathcal{L}^{-1}_{\lambda_1}\Big(\frac{G_x(z)}{\lambda_1}\Big)\mathcal{L}^{-1}_{\lambda_2}\Big(\frac{M(z)}{\lambda_2}\Big)dz.$$

Здесь использовалось обозначение $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ для обратного преобразования Лапласа по параметру λ.

Замечание 3.2. Часто при практических вычислениях проще взять два обратных преобразования Лапласа от вышеприведенного интеграла, чем вычислить интеграл от двух обратных преобразований Лапласа.

Доказательство теоремы 3.1 аналогично доказательству теоремы 2.1.

Пример 3.1. Вычислим распределение положения максимума броуновского движения, т.е. распределение величины $v(t)$, определяемой равенством

$$W(v(t)) = \max_{0\le s\le t} W(s). \tag{3.7}$$

Для броуновского движения и для других диффузий такая величина с вероятностью единица единственна. О результатах, связанных с этой величиной, можно узнать из [7].

Для преобразования Лапласа такой величины, когда максимум рассматривается на случайном интервале $[0,\tau]$, $\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x e^{-\gamma v(\tau)} &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\gamma s}\, d\mathbf{P}_x(v(t) < s)dt = \\
&= \lambda\gamma \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\gamma s}\mathbf{P}_x(v(t) < s)dsdt = \\
&= \lambda\gamma \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-\lambda t-\gamma s}dt + \int_s^\infty e^{-\lambda t-\gamma s}\mathbf{P}_x(v(t) < s)dt\right)ds = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} + \lambda\gamma \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\lambda+\gamma)s-\lambda u}\mathbf{P}_x(v(u+s) < s)duds = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda+\gamma}\mathbf{P}_x(v(\tau+\tau_1) < \tau_1).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь τ_1 – независящий от процесса W и от τ, случайный момент с экспоненциальным распределением: $\mathbf{P}_x(\tau_1 \geqslant t) = e^{-(\lambda+\gamma)t}$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$. Вероятность, стоящая в правой части (3.8), может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{P}_x(v(\tau+\tau_1)<\tau_1)=\int\limits_x^\infty \mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\le s\le\tau_1} W(s)\in dh,\sup_{\tau_1\le s\le\tau_1+\tau} W(s)<h\Big). \tag{3.9}$$

Применим теорему 3.1 для $f_l(z)=0$, $l=1,2$, $a=c=-\infty$, $h\leqslant b$. Тогда согласно этому результату

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\le s\le\tau_1} W(s)<b,\sup_{\tau_1\le s\le\tau_1+\tau} W(s)<h\Big)=\int\limits_{-\infty}^h G_x(z)M(z)dz, \tag{3.10}$$

где функция $G_x(z)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(z)-(\lambda+\gamma)G(z)=0, \qquad z\in(-\infty,b)\setminus\{x\}, \tag{3.11}$$

$$G'(x+0)-G'(x-0)=-2(\lambda+\gamma), \tag{3.12}$$

$$G(b-0)=0, \tag{3.13}$$

а функция $M(z)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}M''(z)-\lambda M(z)=-\lambda, \qquad z\in(-\infty,h), \tag{3.14}$$

$$M(h-0)=0. \tag{3.15}$$

Решение задачи (3.14), (3.15) имеет вид

$$M(z)=1-e^{(z-h)\sqrt{2\lambda}}, \qquad z\le h. \tag{3.16}$$

Задача (3.11)–(3.13) также может быть легко решена. Нужно принять во внимание, что условие (3.12) гарантируется наличием слагаемого $\sqrt{2\lambda+2\gamma}\,e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+2\gamma}}$. Тогда несложно получить

$$G_x(z)=\frac{\sqrt{\lambda+\gamma}}{\sqrt{2}}e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+2\gamma}}-\frac{\sqrt{\lambda+\gamma}}{\sqrt{2}}e^{(z+x-2b)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.16), (3.17) в (3.10) и применяя (3.9), получаем

$$\frac{\gamma}{\lambda+\gamma}\mathbf{P}_x(v(\tau+\tau_1)<\tau_1)$$

$$=\gamma\int_0^\infty dh\int_{-\infty}^{h} dz 2e^{(z+x-2h)\sqrt{2\lambda+2\gamma}}\big(1-e^{(z-h)\sqrt{2\lambda}}\big)=$$

$$=\frac{2\gamma}{\sqrt{2\lambda+2\gamma}}\int_{-\infty}^{0} e^{u\sqrt{2\lambda+2\gamma}}\big(1-e^{u\sqrt{2\lambda}}\big)du=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+\gamma}}-\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}.$$

Это совместно с (3.8) влечет

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma v(\tau)}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+\gamma}}. \qquad (3.18)$$

Обращая пребразование Лапласа по γ, имеем

$$\frac{d}{du}\mathbf{P}_x(v(\tau)<u)=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi u}}e^{-\lambda u}, \qquad u>0.$$

Деля обе части этого соотношения на λ и обращая пребразование Лапласа по λ, мы окончательно получаем

$$\mathbf{P}_x(v(t)<u)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{t-u}}\Big), \qquad 0\le u\le t.$$

Понятно, что в силу пространственной инвариантности броуновского движения, распределение положения максимума не должно зависить от начальной точки x.

В силу свойства симметрии броуновского движения, начинающегося из нуля, распределение положения минимума будет иметь точно такой же вид.

В случае, когда решается вопрос о распределении функционала A от броуновского моста, то нужно решить задачу вычисления совместных распределений функционала $A_{\tau_1}(\tau_1+\tau_2)$ и положения броуновского процесса W в момент $\tau_1+\tau_2$. Для этого можно использовать следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть $f_1(z)$, $z\in[a,b]$, $f_2(z)$, $z\in[c,h]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда при $a<x<b$ и $c<y<h$*

$$\frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\{e^{-A_{\tau_1}(\tau_1+\tau_2)}; a<\inf_{0\le s\le\tau_1}W(s), \sup_{0\le s\le\tau_1}W(s)<b, c<\inf_{\tau_1\le s\le\tau_1+\tau_2}W(s),$$

$$\sup_{\tau_1 \le s \le \tau_1+\tau_2} W(s) < h, W(\tau_1+\tau_2) < y\} = \int_{a\vee c}^{b\wedge h} G_x^{(1)}(z) G_z^{(2)}(y)dz,$$

где функция $G_x^{(1)}(z)$, $z \in (a,b)$, *является единственным решением задачи*

$$\frac{1}{2}G''(z) - (\lambda_1 + f_1(z))G(z) = 0, \qquad z \in (a,b)\setminus\{x\}, \tag{3.19}$$

$$G'(x+0) - G'(x-0) = -2\lambda_1, \tag{3.20}$$

$$G(a+0) = 0, \qquad G(b-0) = 0, \tag{3.21}$$

и функция $G_z^{(2)}(y)$, $y \in (c,h)$, *является единственным решением задачи*

$$\frac{1}{2}G_z''(y) - (\lambda_2 + f_2(y))G_z(y) = 0, \qquad y \in (c,h)\setminus\{z\}, \tag{3.22}$$

$$G_z'(z+0) - G_z'(z-0) = -2\lambda_2, \tag{3.23}$$

$$G_z(c+0) = 0, \qquad G_z(h-0) = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теорем 2.1 и 3.1. Нужно воспользоваться марковским свойством броуновского движения, и затем дважды применить теорему 2.3 гл. 2 из [5].

4. Момент первого выхода на границу интервала. Рассмотрим процесс броуновского движения, остановленный в момент первого выхода на границу интервала:

$$H_{a,b} = \min\{s : W(s) \notin (a,b)\}.$$

Тогда

$$A_r(H_{a,b}) = \int_0^{H_{a,b}} (\mathbb{I}_{[0,r)}(s) f_1(W(s)) + \mathbb{I}_{[r,\infty)}(s) f_2(W(s)))ds.$$

Как обычно, τ – момент, независящий от броуновского движения W и имеющий показательное распределение $\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Вместо фиксированного момента r сначала нужно рассмотреть случайный момент τ. Вопрос о распределении для фиксированного r решается с помощью обратного преобразования Лапласа по параметру λ.

Теорема 4.1. *Пусть $f_l(x)$, $x \in [a,b]$, $l = 1,2$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда*

$$\mathbf{E}_x\{e^{-A_r(H_{a,b})};\ W(H_{a,b}) = b\} = H_1(x) + \int\limits_a^b G_x(z) H_2(z)\,dz, \tag{4.1}$$

где функции $H_l(x)$, $l = 1,2$, являются единственными решениями задач

$$\frac{1}{2}H_1''(x) - (\lambda + f_1(x))H_1(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{4.2}$$

$$H_1(a+0) = 0, \qquad H_1(b-0) = 1, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2}H_2''(x) - f_2(x)H_2(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{4.4}$$

$$H_2(a+0) = 0, \qquad H_2(b-0) = 1, \tag{4.5}$$

и функция $G_x(z)$ для любого фиксированного $x \in (a,b)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G_x''(z) - (\lambda + f_1(z))G_x(z) = 0, \qquad z \in (a,b) \setminus \{x\}, \tag{4.6}$$

$$G_x'(x+0) - G_x'(x-0) = -2\lambda, \tag{4.7}$$

$$G_x(a+0) = 0, \qquad G_x(b-0) = 0. \tag{4.8}$$

Замечание 4.1. В левой части соотношения (4.1) вместо множества $W(H_{a,b}) = b$ можно взять множество $W(H_{a,b}) = a$, тогда граничные условия в (4.3), (4.5) будут следующими $H_l(a+0) = 1$ и $H_l(b-0) = 0$, $l = 1,2$. Если рассмотреть аналогичный результат без условий на конец траектории, то граничные условия в (4.3), (4.5) будут иметь вид $H_l(a+0) = 1$, $H_l(b-0) = 1$, $l = 1,2$.

Замечание 4.2. Для того, чтобы вычислить математическое ожидание

$$\mathbf{E}_x\{e^{-A_r(H_{a,b})}; W(H_{a,b}) = b\}$$

нужно обратить обратное преобразование Лапласа по параметру λ от правой части (4.1), деленной на λ.

Доказательство теоремы 4.1. Для того, чтобы не загромождать изложение, докажем вариант теоремы 4.1, когда условие $W(H_{a,b}) = b$ отсутствует. Этот случай указан в замечании 4.1.

Используя однородность и марковость броуновского движения, получим

$$\mathbf{E}_x e^{-A_\tau(H_{a,b})} = \mathbf{E}_x\{e^{-A_\tau(H_{a,b})}; H_{a,b} \leqslant \tau\} + \mathbf{E}_x\{e^{-A_\tau(H_{a,b})}; H_{a,b} > \tau\} =$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{H_{a,b}} f_1(W(s))ds\Big); H_{a,b} \leqslant \tau\Big\} + \int_a^b \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f_1(W(s))ds\Big);$$

$$a < \inf_{0\le s\le\tau} W(s), \sup_{0\le s\le\tau} W(s) < b, W(\tau)\in dz\Big\}\mathbf{E}_z \exp\Big(-\int_0^{H_{a,b}} f_2(W(s))ds\Big) =$$

$$= \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int_0^{H_{a,b}} (\lambda + f_1(W(s)))ds\Big) + \int_a^b G_x(z)H_2(z)\,dz.$$

По теореме 2.3 гл. 2 из [5] функция $G_x(z)$ является единственным решением задачи (4.6)–(4.8), а по теореме 2.4 гл. 2 из [5] первое слагаемое в правой части, обозначенное $H_1(x)$, и функция $H_2(z)$ являются единственными решениеми уравнений (4.2), (4.4) с условиями $H_l(a+0) = 1$ и $H_l(b-0) = 1$, $l = 1, 2$. Теорема доказана.

5. Моменты обратные к интегральным функционалам. Рассмотрим неоднородный функционал $A_r(t)$ при $r < t$. В этом случае

$$A_r(t) = \int_0^r f_1(W(s))ds + \int_r^t f_2(W(s))ds,$$

где $f_l(x)$, $l = 1, 2$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Пусть

$$\nu_l(t) := \min\Big\{s : \int_0^s g_l(W(v))dv > t\Big\}, \qquad l = 1, 2,$$

– моменты, обратные к неотрицательному интегральному функционалу. Предполагается, что $g_l(x), l = 1, 2,$ – неотрицательные кусочно непрерывные функции.

Рассмотрим задачу о совместном распределении величины $A_{\nu_1(t_1)\wedge\nu_2(t_2)}(\nu_1(t_1) \vee \nu_2(t_2))$, инфимума и супремума броуновского движения на интервалах $[0,\nu_1(t_1)\wedge\nu_2(t_2)]$, $[\nu_1(t_1)\wedge\nu_2(t_2),\nu_1(t_1)\vee\nu_2(t_2)]$.

Для того, чтобы вычислить распределения в фиксированные моменты t_1 и t_2 сначала нужно рассмотреть независимые экспоненциально распределенные моменты τ_l, $l=1,2$, вместо фиксированных моментов, а затем обратить преобразования Лапласа, отвечающие таким моментам.

Для краткости будем писать ν_l вместо $\nu_l(\tau_l)$, $l=1,2$. Минимум из двух случайных моментов может реализоваться на каждом из этих моментов, т. е. все исходы разбиваются на два дизъюнктных события $\nu_1\wedge\nu_2=\nu_1$ и $\nu_1\wedge\nu_2=\nu_2$. Вероятность того, что моменты ν_1 и ν_2 совпадают, как будет установлено далее, равна нулю. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_1\wedge\nu_2=\nu_1$, т. е. когда $\nu_1\leqslant\nu_2$.

Теорема 5.1. *Пусть $f_l(x)$, $g_l(x)$, $x\in[a\wedge c,b\vee h]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда при $a<x<b$*

$$\mathbf{E}_x\{e^{-A_{\nu_1}(\nu_2)};a<\inf_{0\le s\le\nu_1}W(s),\ \sup_{0\le s\le\nu_1}W(s)<b,c<\inf_{\nu_1\le s\le\nu_2}W(s),$$

$$\sup_{\nu_1\le s\le\nu_2}W(s)<h,\nu_1\leqslant\nu_2\}=\int\limits_{a\vee c}^{b\wedge h}G_z^{(1)}(x)U^{(2)}(z)dz,$$

где функция $G_z^{(1)}(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x)-(\lambda_1g_1(x)+\lambda_2g_2(x)+f_1(x))G(x)=0,\quad x\in(a,b)\setminus\{z\},\tag{5.1}$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\lambda_1g_1(z),\tag{5.2}$$

$$G(a+0)=0,\qquad G(b-0)=0,\tag{5.3}$$

и функция $U^{(2)}(z)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}U''(z)-(\lambda_2g_2(z)+f_2(z))U(z)=-\lambda_2g_2(z),\qquad z\in(c,h),\tag{5.4}$$

$$U(c+0)=0,\qquad U(h-0)=0.\tag{5.5}$$

Замечание 5.1. В случае, когда $\nu_2\leqslant\nu_1$ справедлив такой же результат. Нужно просто индексы 1 и 2 поменять местами.

Замечание 5.2. Для того, чтобы получить результат без ограничения на реализацию момента $\nu_1\wedge\nu_2$, нужно просто сложить результаты, отвечающие случаям, когда минимум реализуется на каждом из моментов. В результате имеем

$$\mathbf{E}_x\{\exp(-A_{\nu_1\wedge\nu_2}(\nu_1\vee\nu_2));\ a<\inf_{0\le s\le\nu_1\wedge\nu_2}W(s),\ \sup_{0\le s\le\nu_1\wedge\nu_2}W(s)<b,$$

$$c<\inf_{\nu_1\wedge\nu_2\le s\le\nu_1\vee\nu_2}W(s),\ \sup_{\nu_1\wedge\nu_2\le s\le\nu_1\vee\nu_2}W(s)<h\}=$$

$$=\int\limits_{a\vee c}^{b\wedge h}G_z^{(1)}(x)U^{(2)}(z)dz+\int\limits_{a\vee c}^{b\wedge h}G_z^{(2)}(x)U^{(1)}(z)dz.$$

Доказательство теоремы 5.1. Для того, чтобы не загромождать изложения, докажем теорему 5.1 для случая $a=-\infty$, $b=\infty$, $c=-\infty$ и $h=\infty$ (см. замечание 1.3). Это принципиального значения не имеет и сказывается лишь на граничных условиях (5.3), (5.5). Определим $\mathcal{F}_{\nu_1}$ – σ-алгебру событий, порожденную броуновским движением W до момента времени ν_1. В силу строго марковского свойства броуновского движения, процесс $\widetilde{W}(s)=W(s+\nu_1)-W(\nu_1)+z$, $s\geqslant 0$, снова будет броуновским движением, начинающимся в точке z, и не зависящим от $\mathcal{F}_{\nu_1}$. Математическое ожидание по такому броуновскому движению будем обозначать $\widetilde{\mathbf{E}}_z$ вместо обычного обозначения $\mathbf{E}$.

Положим

$$\tilde\nu_2(t):=\min\Big\{s:\int\limits_0^s g_2(\widetilde{W}(v))dv>t\Big\}.$$

Определение момента $\tilde\nu_2(t)$ совпадает с определением $\nu_2(t)$, только вместо W берется броуновское движение $\widetilde{W}$.

Событие $\nu_1\leqslant\nu_2$ запишем в следующем виде $\int\limits_0^{\nu_1}g_2(W(v))\,dv\leqslant\tau_2$. Для исходов этого события полагаем

$$\tilde\nu_2:=\tilde\nu_2\Big(\tau_2-\int\limits_0^{\nu_1}g_2(W(v))\,dv\Big).$$

Тогда

$$\mathbf{E}_x\{e^{-A_{\nu_1}(\nu_2)}; \nu_1 \leqslant \nu_2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\nu_1} f_1(W(v))\,dv\Big)\times$$

$$\times\, \mathbb{I}_{[0,\tau_2]}\Big(\int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big)\exp\Big(-\int\limits_0^{\nu_2-\nu_1} f_2(\widetilde{W}(v))\,dv\Big); W(\nu_1)\in dz\Big\}.$$

На множестве исходов $\{\nu_1 \leqslant \nu_2\}$ при условии $W(\nu_1) = z$ справедливо

$$\nu_2 = \min\Big\{s : \int\limits_{\nu_1}^{s} g_2(W(v))dv > \tau_2 - \int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big\} =$$

$$= \nu_1 + \min\Big\{s : \int\limits_0^{s} g_2(\widetilde{W}(v))dv > \tau_2 - \int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big\} = \nu_1 + \tilde{\nu}_2,$$

т. е. $\nu_2 - \nu_1 = \tilde{\nu}_2$.

Момент τ_2 входит в определение $\tilde{\nu}_2$ и в функцию индикатора, и не зависит от других случайных величин. Используя теорему Фубини, по τ_2 можно отдельно вычислить математическое ожидание, а затем взять математическое ожидание по остальным случайным величинам. В $\tilde{\nu}_2$ момент τ_2 входит только через разность $\tau_2 - \int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv$, поэтому математическое ожидание по τ_2 можно вычислить следующим образом: для произвольной ограниченной измеримой функции $Q(x)$

$$\lambda_2\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t_2}\,\mathbb{I}_{[0,t_2]}\Big(\int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big)Q\Big(t_2 - \int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big)\,dt_2 =$$

$$= \exp\Big(-\lambda_2\int\limits_0^{\nu_1} g_2(W(v))\,dv\Big)\lambda_2\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t}Q(t)\,dt.$$

Используя однородность и строго марковское свойство броуновского движения, получим

$$\mathbf{E}_x\{e^{-A_{\nu_1}(\nu_2)};\nu_1\leqslant\nu_2\}=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\nu_1}(f_1(W(v))+\lambda_2g_2(W(v)))\,dv\Big);W(\nu_1)\in dz\Big\}\times$$
$$\times\,\widetilde{\mathbf{E}}_z\exp\Big(-\int\limits_0^{\tilde\nu_2(\tau_2)}f_2(\widetilde{W}(v))\,dv\Big)=:\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_z^{(1)}(x)U^{(2)}(z)dz. \qquad (5.6)$$

Согласно теореме 2.1 из [6], при $F(x)=1$, функция $U^{(2)}(z)$, входящая в правую часть (5.6), является единственным ограниченным решением уравнения (5.4), а по теореме 5.1 из [6], при $a=-\infty$ и $b=\infty$, функция $G_z^{(1)}(x)$ является единственным ограниченным решением задачи (5.1), (5.2). Теорема доказана.

Вернемся к вопросу об утверждении, что справедливо равенство $\mathbf{P}_x(\nu_1=\nu_2)=0$. Согласно теореме 5.1 и замечанию 1.3, при $f_1=0$, $f_2=0$, $a=c=-\infty$ и $b=h=\infty$,

$$\mathbf{P}_x(\nu_1\leqslant\nu_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_z^{(1)}(x)U^{(2)}(z)dz, \qquad (5.7)$$

где функции $G_z^{(1)}(x)$, $U^{(2)}(z)$ являются единственными ограниченными решениеми задач

$$\frac{1}{2}G''(x)-(\lambda_1g_1(x)+\lambda_2g_2(x))G(x)=0, \qquad x\neq z, \qquad (5.8)$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\lambda_1g_1(z), \qquad (5.9)$$

и

$$\frac{1}{2}U''(z)-\lambda_2g_2(z)U(z)=-\lambda_2g_2(z). \qquad (5.10)$$

Единственным ограниченным решением уравнения (5.10) на всей прямой является функция тождественно равная единице, т. е. $U^{(2)}(z)=1$. Поскольку функция $G_z^{(1)}(x)$ является функцией Грина соответствующей неоднородной задачи, то (5.7)–(5.9) превращается в следующее утверждение. Функция $U_1(x):=\mathbf{P}_x(\nu_1\leqslant\nu_2)$ являются единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}U_1''(x)-(\lambda_1g_1(x)+\lambda_2g_2(x))U_1(x)=-\lambda_1g_1(x). \qquad (5.11)$$

Аналогично функция $U_2(x) := \mathbf{P}_x(\nu_2 \leqslant \nu_1)$ являются единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}U_2''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x))U_2(x) = -\lambda_2 g_2(x). \tag{5.12}$$

Складывая уравнения (5.11) и (5.12), мы приходим к уравнению, для которого единственным ограниченным решением на всей прямой является функция тождественно равная единице, т. е. $\mathbf{P}_x(\nu_1 \leqslant \nu_2) + \mathbf{P}_x(\nu_2 \leqslant \nu_1) = 1$, а это влечет $\mathbf{P}_x(\nu_1 = \nu_2) = 0$.

Для решения задачи вычисления совместных распределений функционала $A_{\nu_1\wedge\nu_2}(\nu_1 \vee \nu_2)$ и положения броуновского процесса W в момент $\nu_1 \vee \nu_2$ можно использовать следующий результат. Рассмотрим случай, когда момент $\nu_1 \wedge \nu_2$ реализуется на моменте ν_1, т. е. когда $\nu_1 \leqslant \nu_2$.

Теорема 5.2. *Пусть $f_l(x)$, $g_l(x)$, $x \in [a\wedge c, b\vee h]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда при $a < x < b$, $c < y < h$*

$$\frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\{\exp(-A_{\nu_1}(\nu_2));\ \nu_1 \leqslant \nu_2, a < \inf_{0\le s\le \nu_1} W(s),\ \sup_{0\le s\le\nu_1} W(s) < b,$$

$$c < \inf_{\nu_1\le s\le\nu_2} W(s),\ \sup_{\nu_1\le s\le \nu_2} W(s) < h, W(\nu_2) < y\} = \int_{a\vee c}^{b\wedge h} G_z^{(1)}(x)G_y^{(2)}(z)dz,$$

где функция $G_z^{(1)}(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + f_1(x))G(x) = 0, \quad x \in (a,b)\setminus\{z\}, \tag{5.13}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1 g_1(z), \tag{5.14}$$

$$G(a+0) = 0, \qquad G(b-0) = 0, \tag{5.15}$$

и функция $G_y^{(2)}(z)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(z) - (\lambda_2 g_2(z) + f_2(z))G(z) = 0, \qquad z \in (c,h)\setminus\{z\}, \tag{5.16}$$

$$G'(y+0) - G'(y-0) = -2\lambda_2 g_2(y), \tag{5.17}$$

$$G(c+0) = 0, \qquad G(h-0) = 0, \tag{5.18}$$

Этот результат доказывается аналогично доказательству теоремы 5.1.

Справедливы замечания аналогичные приведенным выше. Для того, чтобы получить результат без ограничения на реализацию момента $\nu_1 \wedge \nu_2$ нужно просто сложить результаты, отвечающие случаям, когда минимум реализуется на каждом из моментов.

6. Момент первого выхода и момент, обратный к интегральному функционалу. Получим аналог теоремы 5.2, когда вместо моментов ν_1 и ν_2 выступают момент первого выхода $H_{a,b} = \min\{s : W(s) \notin (a,b)\}$ и момент, обратный к интегральному функционалу:

$$\nu := \nu(\tau) = \min\Big\{s : \int\limits_0^s g(W(v))dv > \tau\Big\}.$$

Рассмотрим ситуацию, когда момент $H_{a,b} \wedge \nu$ реализуется на моменте $H_{a,b}$. Пусть, кроме того, сам $H_{a,b}$ реализуется на $H_b = \min\{s : W(s) = b\}$ – моменте первого достижения уровня b снизу. В этом случае $W(H_{a,b}) = b$.

Теорема 6.1. *Пусть $f_l(x)$, $g(x)$, $x \in [a\wedge c, b\vee h]$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции. Тогда при $a < x < b$ и $c < b < h$*

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\{e^{-A_{H_{a,b}\wedge\nu}(H_{a,b}\vee\nu)}; H_{a,b}\wedge\nu = H_b, c < \inf_{H_{a,b}\wedge\nu\le s\le H_{a,b}\vee\nu} W(s),$$

$$\sup_{H_{a,b}\wedge\nu\le s\le H_{a,b}\vee\nu} W(s) < h, W(\nu) < z\} = H(x)G_z^\nu(b), \tag{6.1}$$

где функция $H(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}H''(x) - (\lambda g(x) + f_1(x))H(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{6.2}$$

$$H(a+0) = 0, \qquad H(b-0) = 1, \tag{6.3}$$

и функция $G_z^\nu(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - (\lambda g(x) + f_2(x))G(x) = 0, \qquad x \in (c,h)\setminus\{z\}, \tag{6.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda g(z), \tag{6.5}$$

$$G(c+0) = 0, \qquad G(h-0) = 0, \tag{6.6}$$

Замечание 6.1. При $a \to -\infty$ момент $H_{a,b}$ для $x < b$ превращается в H_b. При этом теорема 6.1 остается в силе, нужно лишь левое граничное условие в (6.3) заменить условием, что функция $H(x)$ ограничена при x стремящимся к $-\infty$.

Доказательство теоремы 6.1. Событие $H_{a,b} \wedge \nu = H_{a,b}$ совпадает с событием $H_{a,b} \leqslant \nu$ и, следовательно, при дополнительном условии $W(H_{a,b}) = b$, совпадает с событием $\int\limits_0^{H_b} g(W(v))\,dv \leqslant \tau$. Как и при доказательстве теоремы 5.1 используем однородность и строго марковское свойство броуновского движения.

Процесс $\widetilde{W}(s) = W(s+H_b) - W(H_b) + b$, $s \geqslant 0$, снова будет броуновским движением, начинающимся в точке b, и не зависящим от $\mathcal{F}_{H_b}$ – σ-алгебры событий, порожденной броуновским движением W до момента времени H_b. Математическое ожидание по такому броуновскому движению будем обозначать $\widetilde{\mathbf{E}}_b$.

Положим

$$\tilde{\nu}(t) := \min\Big\{s : \int\limits_0^s g(\widetilde{W}(v))dv > t\Big\}.$$

Определение момента $\tilde{\nu}(t)$ совпадает с определением $\nu(t)$, только вместо W берется броуновское движение $\widetilde{W}$.

На событии, определенном в начале доказательства, полагаем

$$\tilde{\nu} := \tilde{\nu}\Big(\tau - \int\limits_0^{H_b} g(W(v))\,dv\Big).$$

Как и при доказательстве теоремы 5.1 проверяем, что $\nu = H_b + \tilde{\nu}$, и, вычисляя сначала математическое ожидание по τ, а затем по остальным случайным величинам, убеждаемся, что справедливо равенство (6.1), где

$$H(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} (f_1(W(v)) + \lambda g(W(v)))\,dv\Big); W(H_{a,b}) = b\Big\},$$

$$G_z^{\nu}(b) = \frac{d}{dz}\widetilde{\mathbf{E}}_b\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tilde{\nu}(\tau)} f_2(\widetilde{W}(v))\,dv\Big); c < \inf_{0\le s\le\tilde{\nu}(\tau)} \widetilde{W}(s),$$
$$\sup_{0\le s\le\tilde{\nu}(\tau)} \widetilde{W}(s) < h, \widetilde{W}(\tilde{\nu}(\tau)) < z\Big\}.$$

По теореме 2.4 гл. 2 из [5] функция $H(x)$ является единственным решением задачи (6.2), (6.3), а по теореме 5.1 из [6] функция $G_z^{\nu}(x)$ является единственным решением задачи (6.4)–(6.6).

Пример 6.1. Исследуем вопрос о распределении момента первого достижения уровня для процесса броуновского моста

$$W_{t,z}(s) := W(s) - \frac{s}{t}(W(t) - z), \qquad s \in [0,t].$$

Рассмотрим момент первого достижения уровня b снизу, т.е. момент $H_b^\circ = \min\{s : W_{t,z}(s) = b\}$. Через H_b обозначаем аналогичный момент для броуновского движения. При $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W_{t,z}(s) < b$ считаем, что момент первого достижения уровня для броуновского моста не наступает, полагаем его равным ∞. Вероятность такого события известна (см., например, формулу 1.1.1.8 справочника [7])

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} W_{t,z}(s) < b\Big) = 1 - \exp\Big(-\frac{(2b-z-x)^2}{2t} + \frac{(x-z)^2}{2t}\Big).$$

Преобразование Лапласа момента первого достижения уровня для броуновского моста может быть трансформировано к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x e^{-\beta H_b^\circ} &= \mathbf{E}_x\big\{e^{-\beta H_b^\circ}; \sup_{0\leqslant s\leqslant t} W_{t,z}(s) \geqslant b\big\} = \\ &= \mathbf{E}_x\big\{e^{-\beta H_b}; \sup_{0\leqslant s\leqslant t} W(s) \geqslant b \big| W(t) = z\big\} = \\ &= \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-\beta H_b}; H_b \leqslant t, W(t) < z\big\} \Big/ \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\big(W(t) < z\big).\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, вместо фиксированного момента t нужно сначала рассмотреть момент τ. Применим теорему 6.1 с учетом замечания 6.1. Положим $f_1(x) = \beta$, $f_2(x) = 0$ и $g(x) = 1$. Тогда согласно этому результату

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\big\{e^{-\beta H_b}; H_b \leqslant \tau, W(\tau) < z\big\} = H(x) G_z^\tau(b), \tag{6.7}$$

где функция $H(x)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}H''(x) - (\lambda + \beta)H(x) = 0, \qquad x \in (-\infty, b), \tag{6.8}$$

$$H(b-0) = 1, \tag{6.9}$$

и функция $G_z^\tau(x)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - \lambda G(x) = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty) \setminus \{z\}, \tag{6.10}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \tag{6.11}$$

Несложно убедиться, что решения этих задач имеют вид $H(x) = e^{-(b-x)\sqrt{2\lambda+2\beta}}$, $G_z^\tau(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda}}$. Поделив (6.7) на λ и обратив преобразования Лапласа по λ и β (см., формулу j приложения 3 из [7]), поличим, что при $y \in [0,t]$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}_x\big(H_b < y, W(t) < z\big) = \frac{b-x}{2\pi y^{3/2}(t-y)^{1/2}} e^{-(b-x)^2/2y} e^{-(b-z)^2/2(t-y)}.$$

Поделив это соотношение на плотность распределения величины $W(t)$, окончательно получим, что при $y \in [0,t]$ для момента первого достижения уровня для броуновского моста справедлива формула

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(H_b^\circ < y\big) = \frac{(b-x)t^{1/2}}{\sqrt{2\pi} y^{3/2}(t-y)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{(b-x)^2}{2y} - \frac{(b-z)^2}{2(t-y)} + \frac{(x-z)^2}{2t}\Big).$$

7. Момент, обратный к неоднородному интегральному функционалу В этом параграфе рассматриваются методы нахождения распределений функционалов от процесса броуновского движения, остановленного в момент, обратный к неоднородному интегральному функционалу специального типа.

Этот момент определяется по формуле

$$\nu_r(t) := \min\Big\{s : \int\limits_0^s \bar g_r(v, W(v))dv > t\Big\},$$

где

$$\bar g_r(t,x) = \mathbb{I}_{[0,r)}(t) g_1(x) + \mathbb{I}_{[r,\infty)}(t) g_2(x).$$

Теорема 7.1. *Пусть $F(x)$, $f_l(x)$, $g_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1,2,$– кусочно непрерывные функции, $f_l(x) \geqslant 0$, $g_l(x) \geqslant 0$, а $F(x)$ ограничена. Тогда*

$$U_\nu(x) := \mathbf{E}_x\big\{F(W(\nu_{\tau_1}(\tau)))e^{-A_{\tau_1}(\nu_{\tau_1}(\tau))}\big\} = V_1(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_x(z)V_2(z)dz, \tag{7.1}$$

где функция $G_x(z)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(z) - (\lambda_1 + \lambda g_1(z) + f_1(z))G(z) = 0, \qquad z \neq x, \tag{7.2}$$

$$G'(x+0) - G'(x-0) = -2\lambda_1, \tag{7.3}$$

функции $V_l(x)$, $l = 1, 2$, являются единственными ограниченными решениями уравнений

$$\frac{1}{2}V_1''(x) - (\lambda_1 + \lambda g_1(x) + f_1(x))V_1(x) = -\lambda g_1(x)F(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{2}V_2''(x) - (\lambda g_2(x) + f_2(x))V_2(x) = -\lambda g_2(x)F(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (7.5)$$

Замечание 7.1. Функция $U_\nu(x)$ является единственным ограниченными решением уравнения

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 + \lambda g_1(x) + f_1(x))U(x) = -\lambda_1 V_2(x) - \lambda g_1(x)F(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

где $V_2(x)$ – единственное ограниченное решение уравнения (7.5).

Замечание 7.2. При $g_1(x) = g_2(x) = 1$ этот результат превращается в теорему 2.1 для $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $F(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными.

Для произвольного $\varrho \geqslant 0$ обозначим

$$\eta(s) = F(W(s)) \exp\Big(-\int_0^s \big(\varrho + \bar{f}_{\tau_1}(v, W(v))\big)\,dv\Big).$$

Применяя формулу стохастического дифференцирования Ито, получим

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t \exp\Big(-\int_0^s \big(\varrho + \bar{f}_{\tau_1}(v, W(v))\big)\,dv\Big)\big[F'(W(s))dW(s) +$$

$$+ \frac{1}{2}F''(W(s))ds - \big(\varrho + \bar{f}_{\tau_1}(s, W(s))\big)F(W(s))ds\big]. \quad (7.6)$$

Поскольку $\bar{g}_{\tau_1}(v, x)$ – неотрицательная функция, то $\int_0^s \bar{g}_{\tau_1}(v, W(v))dv$ монотонно возрастает. Это обстоятельство позволяет для момента $\nu_{\tau_1}(t)$ и любого $s \geqslant 0$ написать

$$\mathbb{1}_{[0, \nu_{\tau_1}(t)]}(s) = \mathbb{1}_{[0,t]}\Big(\int_0^s \bar{g}_{\tau_1}(v, W(v))dv\Big).$$

В результате из (7.6) для момента $\nu_{\tau_1}(t)$ получаем

$$\eta(\nu_{\tau_1}(t)) - F(x) =$$
$$= \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}\Big(\int_0^s \bar g_{\tau_1}(v, W(v))dv\Big)\exp\Big(-\int_0^s (\varrho + \bar f_{\tau_1}(v, W(v)))\,dv\Big)\times$$
$$\times\big[F'(W(s))dW(s) + \frac12 F''(W(s))ds - \big(\varrho + \bar f_{\tau_1}(s, W(s))\big)F(W(s))ds\big].$$

Учитывая тот факт, что математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, имеем

$$\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(t)) - F(x) =$$
$$= \mathbf{E}_x\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}\Big(\int_0^s \bar g_{\tau_1}(v, W(v))dv\Big)\exp\Big(-\int_0^s (\varrho + \bar f_{\tau_1}(v, W(v)))\,dv\Big)\times$$
$$\times\big[\frac12 F''(W(s)) - \big(\varrho + \bar f_{\tau_1}(s, W(s))\big)F(W(s))\big]\,ds.$$

Возьмем от обеих частей равенства преобразование Лапласа по переменной t с параметром $\lambda > 0$. Тогда получим

$$\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(\tau)) - F(x) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(t))\,dt - F(x) =$$
$$= \mathbf{E}_x\int_0^\infty e^{-\varrho s}\exp\Big(-\int_0^s \big(\lambda\bar g_{\tau_1}(v, W(v)) + \bar f_{\tau_1}(v, W(v))\big)\,dv\Big)\times$$
$$\times\big[\frac12 F''(W(s)) - \big(\varrho + \bar f_{\tau_1}(s, W(s))\big)F(W(s))\big]\,ds. \tag{7.7}$$

Наряду с моментами τ_1 и τ рассмотрим не зависящий от них и от броуновского движения $W(s)$, экспоненциально распределенный момент $\tilde\tau$, для которого $\mathbf{P}(\tilde\tau \geqslant s) = e^{-\varrho s}$. Тогда, принимая во внимание определение момента $\tilde\tau$, и применяя теорему Фубини, представим равенство (7.7) в виде

$$\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(\tau)) - F(x) = \frac{1}{\varrho}\mathbf{E}_x\Big\{\Big[\frac12 F''(W(\tilde\tau)) - \big(\varrho + \bar f_{\tau_1}(\tilde\tau, W(\tilde\tau))\big)F(W(\tilde\tau))\Big]\times$$
$$\times\exp\Big(-\int_0^{\tilde\tau}\big(\lambda\bar g_{\tau_1}(v, W(v)) + \bar f_{\tau_1}(v, W(v))\big)\,dv\Big)\Big\}.$$

Для математического ожидания, стоящего в правой части этого равенства, применима теорема 2.1. В результате мы имеем

$$\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(\tau)) = F(x) + M_1^{(\varrho)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} M_2^{(\varrho)}(z)G_x^{(\varrho)}(z)dz, \qquad (7.8)$$

где функция $G_x^{(\varrho)}(z)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(z) - (\lambda_1 + \varrho + \lambda g_1(z) + f_1(z))G(z) = 0, \qquad z \neq x,$$
$$G'(x+0) - G'(x-0) = -2\lambda_1,$$

функции $M_l^{(\varrho)}(x)$, $l = 1, 2$, $x \in \mathbf{R}$, являются единственными ограниченными решениями уравнений

$$\frac{1}{2}M_1''(x) - (\lambda_1 + \varrho + \lambda g_1(x) + f_1(x))M_1(x) = -\frac{1}{2}F''(x) + (\varrho + f_1(x))F(x),$$

$$\frac{1}{2}M_2''(x) - (\varrho + \lambda g_2(x) + f_2(x))M_2(x) = -\frac{1}{2}F''(x) + (\varrho + f_2(x))F(x).$$

Функция $\mathbf{E}_x\eta(\nu_{\tau_1}(\tau))$ при $\varrho = 0$ превращается в функцию $U_\nu(x)$.

Положим $U_1(x) = F(x) + M_1^{(0)}(x)$, $V_2(x) = F(x) + M_2^{(0)}(x)$. Тогда

$$U_\nu(x) = U_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(z)G_x(z)\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} V_2(z)G_x(z)\,dz, \qquad (7.9)$$

где $G_x(z) = G_x^{(0)}(z)$ является решением задачи (7.2), (7.3), функция $V_2(z)$ является единственным ограниченным решением уравнения (7.5), а функция $U_1(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda_1 + \lambda g_1(x) + f_1(x))U(x) = -(\lambda_1 + \lambda g_1(x))F(x).$$

Так как по формуле Грина функция $R(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(z)G_x(z)\,dz$ является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}R''(x) - (\lambda_1 + \lambda g_1(x) + f_1(x))R(x) = -\lambda_1 F(x),$$

то функция $V_1(x) = U_1(x) - R(x)$ является единственным ограниченным решением уравнения (7.4).

Тем самым, при предположении, что $F(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными, теорема доказана.

От условия гладкости функции $F(x)$ можно избавиться с помощью аппроксимации кусочно непрерывной функции $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $F_n(x)$. Подробно о таком предельном переходе см. доказательство теоремы 2.2, гл. 2 из [5].

Литература

1. A. N. Kolmogorov, *Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* — Mathemat. Ann. **104** (1931), 415–458, русский перевод: УМН, V (1938), с. 5–41.
2. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** no. 1 (1949), 1–13.
3. M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
4. *Хасьминский Р. З.* Распределение вероятностей для функционалов от траекторий случайного процесса диффузионного типа. Докл. Акад. Наук СССР, — **104**, № 1 (1955), 22–25.
5. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН, Наука, С.Петербург (1994).
6. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент обратный ко времени пребывания.* — Записки научных семинаров ПОМИ, **228** (1996), 39–56.
7. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae. Second Edition.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2002.

Borodin A. N. On distributions of special non-homogenious functionals of Brownian motion.

In the paper we develop some methods for calculations of the distributions of special non-homogenious functionals of Brownian motion. Some interesting examples of applications of these methods are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 24 ноября 2004 г.