Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

А. Л. Смирнов

ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ K-ТЕОРИИ

Введение

В препринте Панина и автора [1] введены аксиомы для теорий когомологий алгебраических многообразий, аналогичные аксиомам Стинрода–Эйленберга для топологических теорий (разумеется, без нормализации когомологий точки), и соответствующие аксиомы для кольцевых теорий. При проверке того, что алгебраическая K-теория удовлетворяет этим аксиомам, выявилось следующее обстоятельство: в известных источниках не удалось обнаружить доказательства правила Лейбница (см. 1.3.1), описывающего взаимодействие умножения с дифференциалом. Цель этой статьи состоит в том, чтобы привести доказательство этого правила.

Дифференциал $K(U) \to K(X,U)$, как и относительная K-группа $K(X,U)$, введены Томасоном и Тробо [2]. Однако приведенные в [2] сведения не позволили автору однозначно идентифицировать дифференциал, и пришлось выписать его явное определение. Более того, поскольку проверка правила Лейбница требует аккуратной работы с умножениями, было решено (используя симметрические спектры, как более приспособленные для решения мультипликативных проблем) заново переопределить K-теорию и сравнить результат с теорией из [2]. Основной результат статьи, включающий как результат сравнения, так и правило Лейбница, сформулирован в теореме 2.1.1.

План проверки правила Лейбница состоит в том, чтобы естественным образом определить дифференциал в терминах подходящей моноидальной структуры. При условии, что и умножения естественно определены в тех же терминах, свойства их взаимодействия с дифференциалом не должны вызывать трудностей.

Для осуществления этого плана прежде всего следует выбрать

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00633а).

категорию, которая, помимо удобных гомотопических средств, обладала бы и соответствующими мультипликативными свойствами. В качестве таковой выбрана гомотопическая категория модельной категории симметрических спектров пунктированых симплициальных множеств.

Следующий шаг состоит в построении K-функтора со значениями в выбранной гомотопической категории, описании умножения на нем и описании дифференциала в терминах моноидальной структуры. Симметрический спектр K-теории и соответствующее умножение описаны в статье Гейссера и Хессельхольта [3], где, однако, вместо симплициальных множеств рассматриваются компактно-порожденные пространства. Дифференциал возникает из отождествления спектра $K(U)$ с конусом морфизма $K(X,U) \to K(X)$ и естественного дифференциала из этого конуса в надстройку $\Sigma K(X,U)$ (возможность такого отождествления – содержательный факт, доказанный в [2]). При этом конус и надстройка определены в терминах правого действия гомотопической категории симплициальных множеств на гомотопической категории симплициальных симметрических спектров.

Заключительный шаг проверки свойств K-теории опирается на формализм моноидальных модельных категорий, представленный в книге Хови [4], и не содержит особых трудностей. Для применения этого формализма, однако, следует отождествить гомотопические группы симметрических спектров K-теории с Hom'ами в гомотопической категории и установить необходимые моноидальные и модельные свойства используемых категорий и функторов. Отождествление опирается на содержательный факт, а именно на то, что конструкция Вальдхаузена приводит почти к Ω-спектру (см. 3.5.7). Необходимые модельные и моноидальные свойства в основном установлены в препринте Хови, Шипли и Смита [5], хотя пришлось уточнить ряд формулировок и проверить некоторые утверждения.

Автор благодарит И. Панина за полезные обсуждения и М. Хови за предоставленные сведения о модельных категориях.

1. Предварительные сведения

Здесь напоминаются аксиомы для теории когомологий алгебраических многообразий и кольцевой теории когомологий, первичные версии которых представлены в [1].

1.1. Основные категории.

Термин “многообразие” используется для произвольного, в том числе и особого, квазипроективного многообразия над фиксированным полем k.

Категория гладких квазипроективных многообразий обозначена $\mathcal{S}m$; стрелки $\mathcal{S}m$, как правило, называются отображениями. Категория гладких открытых пар обозначается $\mathcal{S}m\mathcal{O}p$. Объекты $\mathcal{S}m\mathcal{O}p$ – это пары (X,U), где X – гладкое многообразие, а U открыто в X. Морфизмом $(X,U)\to(Y,V)$ называется отображение $f:X\to Y$, для которого $f(U)\subset V$. Считаем, что $\mathcal{S}m\subset\mathcal{S}m\mathcal{O}p$, отождествляя X с $(X,\emptyset)$.

Для пары $P\in\mathcal{S}m\mathcal{O}p$ пусть X_P и U_P ее первый и второй элемент, а

$$j_P:U_P\hookrightarrow X_P \quad \text{и} \quad i_P:(X_P,\emptyset)\hookrightarrow(X_P,U_P) \tag{1}$$

естественные вложения.

На категории $\mathcal{S}m\mathcal{O}p$ имеется симметрическая моноидальная структура: $P\times Q=(X\times Y, X\times V\cup U\times Y)$ для $P=(X,U), Q=(Y,V)$; ее единицей является $pt=\mathrm{Spec}(k)$, а изоморфизмом перестановки – $t:(x,y)\to(y,x)$.

Категория абелевых групп обозначена $\mathcal{A}b$; ее стрелки называются операторами.

1.2. Теории когомологий.

Приводимые ниже аксиомы для теории когомологий алгебраических многообразий аналогичны аксиомам Стинрода–Уайтхеда для топологических теорий. Единственная аксиома, нетривиально переносящаяся в алгебраическую геометрию, это аксиома вырезания. Необходимая для успешной гомотопической теории “гибкость” алгебраических многообразий обеспечена именно этой аксиомой и особенно тем, что используется этальное вырезание, а не, к примеру, вырезание по Зарисскому.

1.2.1. Определение. *Теория когомологий состоит из контравариантного функтора $A:\mathcal{S}m\mathcal{O}p\to\mathcal{A}b$ и морфизма функторов (дифференциала) $\partial_P:A(U_P)\to A(P)$, для которых выполнены нижеперечисленные свойства.*

- *Локализация: последовательность* $\xrightarrow{j_P^A} A(U_P) \xrightarrow{\partial_P} A(P) \xrightarrow{i_P^A} A(X_P) \xrightarrow{j_P^A}$ *точна (здесь использованы обозначения из* (1)*, а ре-*

зультат применения функтора A обозначен с помощью верхнего индекса).

- *Вырезание: оператор $A(X,U) \to A(\widetilde{X},\widetilde{U})$, индуцированный морфизмом $e : (\widetilde{X},\widetilde{U}) \to (X,U)$, является изоморфизмом, если $e : \widetilde{X} \to X$ этален во всех точках $\widetilde{Z} = \widetilde{X} - \widetilde{U}$ и индуцирует изоморфизм $\widetilde{Z}$ и $Z = X - U$.*
- *Гомотопическая инвариантность: оператор $A(X) \to A(X \times \mathbf{A}^1)$, индуцированный проекцией $X \times \mathbf{A}^1 \to X$, является изоморфизмом.*

Предполагается, что A является $\mathbb{Z}$-градуированным функтором, а ∂_P – градуированный оператор степени $(+1)$. Группа $A(X,U)$ может обозначаться $A_Z(X)$, где $Z = X - U$, и называться когомологиями X с носителями в Z.

1.2.2. К-теория. Алгебраическая K-теория укладывается в определение 1.2.1: для пары $P = (X,U)$ рассмотрим спектр $K(P) = K^{naive}(X \text{ on } Z_P)$ [2, 3.1 и 1.5.2], где $Z = X - U$, и положим $A^n(P) = \pi_{-n}K(P)$. Морфизм $K(f)$ определен с помощью функтора f^* [2, 3.14 и 3.16.7]. Отметим, что спектр $K(P)$ является (-1)-связным, то есть $\pi_n K(P) = 0$ для $n < 0$ [2, 1.5.3]. Тем самым, $A^n(P) = 0$ для $n > 0$.

Кроме того, для $n \leq 0$ группа $A^n(X)$ канонически изоморфна [2, 3.10] группе Квиллена $K^Q_{-n}(X)$, что, в частности, показывает гомотопическую инвариантность A для гладких X. Вырезание вытекает из [2, 3.19]. Что касается дифференциала, то его выбор явно не зафиксирован в [2], хотя существование ∂, для которого верна локализация, вытекает из [2, 5.1] и эпиморфности $\pi_0(r_0) : K_0(X) \to K_0(U)$ для гладких X [6, 8.7]. Дифференциал фиксируется в 2.2.4 и 2.5.

В дальнейшем будет использована следующая терминология.

1.2.3. Определение. *Изоморфизм из теории когомологий A в теорию когомологий B – это изоморфизм градуированных функторов $A \to B$, перестановочный с дифференциалом.*

1.3. Кольцевые теории.

Вводимые ниже кольцевые теории когомологий следовало бы называть коммутативными кольцевыми теориями. Рассмотрение только коммутативного случая вызвано желанием упростить текст.

1.3.1. Определение. *Теория когомологий A называется кольцевой, если задан морфизм градуированных функторов (умножение) $A(P) \otimes A(Q) \to A(P \times Q)$ $(a \otimes b \mapsto a \cup b)$, а каждое многообразие X снабжено элементом (единицей) $1_X \in A^0(X)$, функториально зависящим от X, так, что верно следующее:*

1. *нейтральность единицы: $a \cup 1_Y = p_1^A a$, $1_X \cup b = p_2^A b$ для любых $(X, U), (Y, V)$, $a \in A(X, U)$, $b \in A(Y, V)$, где p_1 и p_2 – проекции $X \times Y$ на X и Y;*
2. *ассоциативность: $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ для $a \in A(P)$, $b \in A(Q)$, $c \in A(R)$;*
3. *коммутативность: $t^A(a \cup b) = (-1)^{mn} b \cup a$ для любых $a \in A^n(P)$, $b \in A^m(Q)$, где $t : Q \times P \to P \times Q$ – изоморфизм перестановки;*
4. *правило Лейбница: $\partial_{X \times Q}(a \cup y) = (-1)^n a \cup \partial_Q y$, $\partial_{P \times Y}(x \cup b) = \partial_P x \cup b$ для любых $P = (X, U)$, $Q = (Y, V)$, $a \in A^n(X)$, $x \in A(U)$, $b \in A(Y)$, $y \in A(V)$.*

1.3.2. Внешнее и внутреннее умножение. Наличие умножения $a \cup b$ равносильно наличию внутреннего умножения $A(X, U) \otimes A(X, V) \to A(X, U \cap V)$, заданного формулой $a \otimes b \mapsto ab = \Delta^A(a \cup b)$, где $\Delta : X \to X \times X$ диагональ. При этом свойства $a \cup b$ переписываются очевидным образом в соответствующие свойства умножения ab: (1) $a 1_X = a = 1_X a$ для $a \in A(X, U)$; (2) $(ab)c = a(bc)$ для любых $a \in A(X, U)$, $b \in A(X, V)$, $c \in A(X, W)$; (3) $\partial(ax) = (-1)^n a \partial x$, $\partial(xa) = (\partial x)a$ для любых (X, U), $a \in A^n(X)$, $x \in A(X, U)$. Внутреннее умножение с этими свойствами определяет $\cup$-умножение по формуле $a \cup b = p_1^A(a) p_2^A(b)$, где p_1 и p_2 – проекции $X \times Y$ на X и Y.

1.3.3. K-теория. Этот пример продолжает пример 1.2.2. Внутреннее умножение указано в [2, 3.15.4]. Кроме того, согласно [2, 3.15] $K(X)$ является “гомотопическим” кольцевым спектром, причем [2, 3.15] указанные умножения “ассоциативны с точностью до согласованных гомотопий” [2, 3.15], что влечет ассоциативность K-теории.

Для полного описания теории осталось указать единицы, а также проверить коммутативность умножения и согласованность ∂ и умножения. Это сделано в разделе 2.

В дальнейшем будет использована следующая терминология.

1.3.4. Определение. *Изоморфизм из кольцевой теории когомологий A в кольцевую теорию B – это изоморфизм из теории когомологий A в теорию B (см. 1.2.3), переводящий произведение в произведение и единицу в единицу.*

2. Свойства K-теории

По причине, поясненной во введении, теория из примеров 1.2.2 и 1.3.3 ниже обозначается K^{TT}. Здесь получен основной результат статьи (см. 2.1.1): K^{TT}-теория является кольцевой в смысле 1.3.1, и, в частности, для нее выполняется правило Лейбница.

Основные действия происходят в категории $\mathcal{HS}p$, т.е. в гомотопической категории симметрических спектров, построенной по категории пунктированных симплициальных множеств (см. 3.5). На $\mathcal{HS}p$ задана структура триангулированной категории (см. 3.5.3) с функтором сдвига Σ.

2.1. Формулировка результата.

Основной результат статьи представлен следующей теоремой.

2.1.1. Теорема. *С парами $P, Q \in \mathcal{S}m\mathcal{O}p$ и гладким многообразием X связаны следующие данные: группы $K_n(P)$ (см. 2.2.2), функториально зависящие от P; операторы $\partial_P^l : K_n(U_P) \to K_{n+1}(P)$ (см. 2.4.4); умножение $K_r(P) \times K_s(Q) \to K_{r+s}(P \times Q)$ и элемент $1_X \in K_0(X)$ (см. 2.3.2). Утверждается, что эти данные представляют собой кольцевую теорию когомологий.*

Также имеются следующие данные: группы $K_n^{TT}(P)$ (см. 2.2.2), функториально зависящие от P; операторы $\partial_P : K_n^{TT}(U) \to K_{n+1}^{TT}(P)$; умножение $K_r^{TT}(P) \times K_s^{TT}(Q) \to K_{r+s}^{TT}(P \times Q)$ и элемент $1_X \in K_0^{TT}(X)$. Все эти данные, кроме 1_X и ∂_P, представлены в примерах 1.2.2 и 1.3.3. Оператор $\partial_P : K_n^{TT}(U_P) \to K_{n+1}^{TT}(P)$ определен как $\nu \circ \partial_P^l \circ \nu^{-1}$, где изоморфизм ν определен в 2.5. Элемент 1_X определен как ν-образ $1_X \in K_0(X)$. Утверждается, что эти данные представляют собой кольцевую теорию когомологий.

Кроме того, утверждается, что кольцевая теория когомологий K изоморфна кольцевой теории когомологий K^{TT} с помощью изоморфизма ν.

Доказательство этой теоремы рассредоточено по разным разделам: утверждение про K-теорию проверено в 2.2.2 и 2.3.2; утверждение про K^{TT}-теорию получается из фактов, упомянутых в примерах 1.2.2 и 1.3.3, и доказанных в 2.5 и 2.4.4; утверждение об изоморфизме проверено в 2.5.

2.2. Определение K-теории.

Здесь заново переопределяется K-теория и для вновь построенной версии проверяются все свойства теории когомологий (см. 1.2.1).

2.2.1. Гомотопические данные для K-теории. Эти данные состоят из контравариантного функтора $K : \mathcal{S}m\mathcal{O}p \to \mathcal{HS}p$ и морфизма функторов $\partial_P : K(U_P) \to \Sigma K(P)$ со следующими свойствами:

1. локализация: треугольник $K(P) \stackrel{K(i_P)}{\to} K(X_P) \stackrel{K(j_P)}{\to} K(U_P) \stackrel{\partial_P}{\to} \Sigma K(P)$ выделен в триагулированной категории $\mathcal{HS}p$;
2. вырезание: стрелка $K(X, U) \to K(\widetilde{X}, \widetilde{U})$, индуцированная отображением e из свойства вырезания определения 1.2.1 является изоморфизмом;
3. гомотопическая инвариантность: стрелка $K(X) \to K(X \times \mathbf{A}^1)$, индуцированная проекцией $X \times \mathbf{A}^1 \to X$, является изоморфизмом (X многообразие).

Такие данные построены ниже в 2.2.3 и 2.2.4. При этом свойство локализации проверено в 2.2.4, а свойства вырезания и гомотопической инвариантности вытекают из сравнения K^{TT}-теории и K-теории (см. 2.5) и соответствующих свойств K^{TT}-теории (см. 1.2.2).

2.2.2. Построение K-теории. По данным из 2.2.1 получаем теорию когомологий:

$$K_n(P) = \mathrm{Hom}(\Sigma^n S, K(P)). \qquad (3)$$

Здесь S – сферический симметрический спектр, а для $n < 0$ функтор Σ^n следует понимать как Ω^{-n}, где Ω – функтор петель в $\mathcal{HS}p$ (см. 3.5.3). При этом для построения $\partial_P : K_n(U_P) \to K_{n-1}(P)$ используется отождествление

$$\mathrm{Hom}(\Sigma^{n-1} S, K(P)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Sigma^n S, \Sigma K(P)); \quad f \to \Sigma f, \qquad (3)$$

являющееся изоморфизмом в силу обратимости функтора Σ (см. 3.5.3).

2.2.3. Функтор $K : \mathcal{S}m\mathcal{O}p \to \mathcal{HS}p$**.** На объектах K-функтор определен равенством

$$K(P) = K(\mathcal{P}c(P)), \tag{4}$$

где $K(\mathcal{P}c(P))$ – симметрический спектр K-теории (см. 2.6.3) для категории Вальдхаузена $\mathcal{P}c(P)$. Эта категория состоит из ограниченных комплексов конечномерных векторных расслоений на X_P, ацикличных на U_P, а структура Вальдхаузена такова: корасслоение – это почленно расщепимый мономорфизм, эквивалентность – это квазиизоморфизм. Категория $\mathcal{P}c(P)$ введена в [2], где ограниченные комплексы конечномерных векторных расслоений называются строго совершенными комплексами.

Для определения K-функтора на стрелке $f : P \to Q$ используется функтор обратного образа $f^* : \mathcal{P}c(Q) \to \mathcal{P}c(P)$. Будучи точным функтором категорий Вальдхаузена (комплексы состоят из локально свободных $\mathcal{O}$-модулей !), f^* индуцирует $\mathcal{HS}p$-морфизм симметрических спектров $K(f) : K(Q) \to K(P)$. Отметим, что, хотя $K(P)$ и $K(f)$ определены в (догомотопической) категории спектров $\mathcal{S}p$ (см. 3.1), они не представляют собой функтор в эту категорию, а становятся функтором, только будучи рассмотренными в $\mathcal{HS}p$. Это связано с тем, что для отображений $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R$ функторы $(gf)^*$ и f^*g^* изоморфны, но, вообще говоря, не равны, и, тем самым, композиция индуцированных $\mathcal{S}p$-морфизмов не совпадает с морфизмом, индуцированным композицией. Для проверки равенства $K(gf) = K(f) \circ K(g)$ в гомотопической категории достаточно по изоморфизму $(gf)^* \simeq f^*g^*$ построить гомотопию hw (см. 3.6.2) между $K(gf)$ и $K(f) \circ K(g)$ и воспользоваться тем, что гомотопные морфизмы модельной категории дают один и тот же морфизм гомотопической категории [4, 1.2.10 (iii)].

2.2.4. Построение дифференциала. Рассмотрим пару $P = (X, U)$ и отображения $j = j_P$ и $i = i_P$ (см. 1.1). Для построения дифференциала ∂_P в последовательности

$$K(P) \xrightarrow{K(i)} K(X) \xrightarrow{K(j)} K(U) \xrightarrow{\partial_P} \Sigma K(P) \tag{5}$$

дополним (см. 3.5.5) стрелку $K(i)$ до выделенного треугольника в $\mathcal{HS}p$

$$K(P) \xrightarrow{K(i)} K(X) \xrightarrow{b} \operatorname{Cone} K(i) \xrightarrow{\partial} \Sigma K(P) \tag{6}$$

и определим ∂_P с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} K(X) & \xrightarrow{b} & \operatorname{Cone} K(i) & \xrightarrow{\partial} & \Sigma K(P) \\ \Big\downarrow{=} & & \Big\downarrow{\varphi} & & \\ K(X) & \xrightarrow{K(j)} & K(U), & & \end{array} \qquad \partial_P = \partial \circ \varphi^{-1} \qquad (7)$$

где осталось указать φ и проверить его обратимость. Учитывая (см. 3.5.5), что конус $\operatorname{Cone} K(i)$ – копредел диаграммы $K(P) \otimes^L \Delta[1]_* \xleftarrow{\partial_1} K(P) \xrightarrow{K(i)} K(X)$, определим φ согласованными морфизмами из ее концов: $K(j) : K(X) \to K(U)$ и

$$h : K(P) \otimes^L \Delta[1]_* \to K(U). \qquad (8)$$

Здесь h – это в сущности нуль-гомотопия для $(ji)^*$, а точнее, h – сквозной морфизм последовательности $K(P) \otimes^L \Delta[1]_* \xrightarrow{q} K(P) \otimes \Delta[1]_* \xrightarrow{hw^0(f)} K(U)$, где $f : 0 \to (ji)^*$ – единственный морфизм этих функторов, действующих из $\mathcal{P}c(P)$ в $\mathcal{P}c(U)$. Морфизм f является слабой эквивалентностью, и $hw^0(f)$ – его нуль-гомотопия (см. 3.6.2). Стрелка q – это морфизм сравнения $\otimes^L$- и $\otimes$- произведений из 3.5.2.

Обратимость φ является содержательным фактом, по существу доказанным в [2,5.1 и 5.2]. Для построения φ^{-1} используется кодекартовость квадрата

$$\begin{array}{ccc} K(P) & \xrightarrow{K(i)} & K(X) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{K(j)} \\ * & \longrightarrow & K(U) \end{array}$$

и согласованные морфизмы $b : K(X) \to \operatorname{Cone} K(i)$ и $* \to \operatorname{Cone} K(i)$ из его углов. Для проверки кодекартовости применимы рассуждения из [2, 5.1 и 5.2] с учетом эпиморфности $K_0(X) \to K_0(U)$ для гладких X. При этом вместо теоремы [2, 1.8], использующей не определенное в [2] понятие корасслоенной последовательности, лучше использовать непосредственно теорему [7, 1.6.4].

Наконец, отметим коммутативность диаграммы (7): она вытекает из определения φ на $K(X)$-части $\operatorname{Cone} K(i)$. Тем самым треугольник (5) выделен, будучи изоморфным треугольнику (6). Это доказывает свойство локализации из 2.2.1.

2.3. Умножение в K-теории.

Как и саму K-теорию, умножения удобно строить на уровне гомотопической категории спектров. Необходимые для этого данные описаны в 2.3.1 и предъявлены в 2.3.3. Умножения непосредственно в K-группах указаны в 2.3.2.

2.3.1. Гомотопические данные для умножения. Умножение в K-теории удобно представить с помощью тройки (K, m, α), включающей, помимо кофунктора $K\colon \mathcal{S}m\mathcal{O}p \to \mathcal{HS}p$, морфизм бифункторов

$$m : K(P) \otimes^L K(Q) \to K(P \times Q) \tag{9}$$

и стрелку $\alpha : S \to K(pt)$, где S – сферический спектр (см. 3.3.4), а $\otimes^L$ – умножение на $\mathcal{HS}p$ (см. 3.5.1). При этом данные (K, m, α) должны удовлетворять свойствам согласованности структуры моноидального функтора [4, 4.1.2], за исключением того, что не требуется обратимости m и α. Точнее говоря, должны быть коммутативны три диаграммы: одна из них сравнивает два перехода от $K(P) \otimes^L K(Q) \otimes^L K(R)$ к $K(P \times Q \times R)$, вторая сравнивает два перехода от $S \otimes^L K(P)$ к $K(P)$, третья сравнивает два перехода от $K(P) \otimes^L S$ к $K(P)$.

Умножение m коммутативно, если выполнено свойство симметрической моноидальности (27) кофунктора K: $m \circ t = K(t) \circ m$, где левое t – перестановка симметрической структуры $\mathcal{HS}p$, а правое t – перестановка в $\mathcal{S}m\mathcal{O}p$.

2.3.2. Умножение в K-группах. Предполагая, что данные (K, m, α) из 2.3.1 уже построены, получаем единицу $1_X = p^*(\alpha \circ id_S) \in K_0(X)$, где p – проекция $X \to pt$, и умножение

$$K_r(P) \times K_s(Q) \to K_{r+s}(P \times Q),$$

используя определение (2) и моноидальный формализм. Точнее говоря, пусть $a : \Sigma^r S \to K(P)$ – элемент $K_r(P)$ и $b : \Sigma^s S \to K(Q)$ – элемент $K_s(Q)$. Произведение $a \cup b$ определяется как композиция

$$\Sigma^{r+s} S \to \Sigma^r S \otimes^L \Sigma^s S \xrightarrow{a \otimes^L b} K(P) \otimes^L K(Q) \xrightarrow{m} K(P \times Q),$$

где левая стрелка указана в 3.5.4.

Нейтральность 1_X и ассоциативность $\cup$-умножения вытекают из указанных в 2.3.1 свойств тройки (K, m, α), а коммутативность m влечет соотношение $a \cup b = \varepsilon^{rs} b \cup a$, где ε – автоморфизм тождественного функтора $\mathcal{HS}p$, возникающий, вследствие обратимости

$\Sigma^\infty S^1$, из перестановки $t : X \otimes^L Y \to Y \otimes^L X$ для $X = Y = \Sigma^\infty S^1$. Известно, что $\varepsilon = -1$.

2.3.3. Построение умножения K-спектров. Данные α и m по существу описаны в [3, 6.1]: все конструкции оттуда без труда переносятся в симплициальную область заменой геометрической реализации на диагональный функтор (см. 2.6.1). Тем самым имеются $\mathcal{S}p$-морфизмы $\alpha : S \to K(pt)$ и $\mu : K(P) \otimes K(Q) \to K(P \times Q)$, где μ индуцировано точным по каждому аргументу бифунктором $\mathcal{P}s(P) \times \mathcal{P}s(Q) \to \mathcal{P}s(P \times Q)$, переводящим (E, F) в $E \otimes F$ (тензорное произведение обратных образов). Для данных (K, μ, α) в категории $\mathcal{S}p$ все свойства умножения (включая коммутативность) из 2.3.1 верны с точностью до гомотопии, что можно увидеть с помощью изоморфизмов соответствующих функторов и гомотопий из 3.6.

Перейдем к гомотопической категории и определим m композицией

$$m : K(P) \otimes^L K(Q) \xrightarrow{q} K(P) \otimes K(Q) \xrightarrow{\mu} K(P \times Q), \qquad (10)$$

где q определено в 3.5.2. Данные (K, m, α) представляют собой коммутативное умножение в смысле 2.3.1.

2.4. Взаимодействие дифференциала и умножения.

Пусть $P = (X, U) \in \mathcal{S}m\mathcal{O}p$, а $Y \in \mathcal{S}m$. Правило Лейбница (см. 1.3.1) следует (см. 2.4.4) из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} K(Y) \otimes^L K(U) \arrow[r, "1 \otimes^L \partial_P"] \arrow[d, "m"'] & K(Y) \otimes^L K(P) \otimes^L S^1, \arrow[d, "m \otimes^L 1"] \\ K(Y \times U) \arrow[r, "\partial_{Y \times P}"] & K(Y \times P) \otimes^L S^1, \end{tikzcd} \qquad (11)$$

где горизонтальные стрелки используют равенство $\Sigma A = A \otimes^L S^1$ (см. 3.5.3). По определению дифференциала (7) это сводится к коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} K(Y) \otimes^L K(U) \arrow[d] & K(Y) \otimes^L \mathrm{Cone}\, K(i_P) \arrow[l, "1 \otimes^L \partial_P"'] \arrow[r, "1 \otimes^L b_P"] \arrow[d, "\gamma"] & K(Y) \otimes^L K(P) \otimes^L S^1 \arrow[d] \\ K(Y \times U) & \mathrm{Cone}\, K(i_{Y \times P}) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "b_{Y \times P}"] & K(Y \times P) \otimes^L S^1, \end{tikzcd} \qquad (12)$$

где b_P и $b_{Y \times P}$ – это морфизм b из (6) для пар P и $Y \times P$, а стрелка γ указана ниже.

2.4.1. Построение γ. Пользуясь 3.5.6, отождествим $K(Y)\otimes^L \operatorname{Cone} K(i_P)$ с конусом $\operatorname{Cone}(K(Y)\otimes^L i_P)$ и определим γ морфизмом диаграммы копредела, определяющего этот конус, в диаграмму, определяющую конус $\operatorname{Cone} K(i_{Y\times P})$. Этот морфизм получается применением умножения m в каждой вершине.

2.4.2. Коммутативность левого квадрата из (12). Коммутативность на "основании" конуса $\operatorname{Cone}(K(Y)\otimes^L i_P)$ сводится (по определению γ) к функториальности умножения m. Коммутативность на "конусной" части, то есть на $K(Y)\otimes^L K(P)\otimes^L \Delta[1]_*$, сводится (по определению φ и γ) к естественности взаимодействия нуль-гомотопии и умножения, т.е. к коммутативности квадрата

$$\begin{array}{ccc} K(Y)\otimes^L K(U) & \xleftarrow{h\otimes^L 1} & K(Y)\otimes^L K(P)\otimes^L \Delta[1]_*, \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m\otimes^L 1} \\ K(Y\times U) & \xleftarrow{h} & K(Y\times P)\otimes^L \Delta[1]_*, \end{array} \tag{13}$$

где h – гомотопия из (8). Коммутативность этого квадрата сводим, используя слабую моноидальность функтора локализации (см. 3.5.2), к коммутативности квадрата (45) в гомотопической категории. Вот необходимые для построения (45) данные: $\mathcal{A} = \mathcal{P}s(Y)$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}s(P)$, $\mathcal{D} = \mathcal{P}s(U)$, $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{P}s(Y\times P)$, $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{P}s(Y\times U)$, $\mu = \otimes$, $F_0 = 0$, $\widetilde{F}_0 = 0$, $F_1 = j^*i^*$, $\widetilde{F}_1 = (Y\times j^*)(Y\times j^*)$, $f = 0$, $\widetilde{f} = 0$, $\mu_0 = 0$, $\mu_1 : A\otimes(j^*i^*C)\to j_Y^*i_Y^*(A\otimes C)$ – изоморфизм замены базы.

2.4.3. Коммутативность правого квадрата из (12). На "конусной" части конуса $\operatorname{Cone}(K(Y)\otimes^L i_P)$, т.е. на $K(Y)\otimes^L K(P)\otimes^L\Delta[1]_*$, коммутативность следует из функториальности $\otimes^L$, примененной к умножению m и проекции $\Delta[1]_*\to S^1$.

На "основании" $\operatorname{Cone}(K(Y)\otimes^L i_P)$, то есть на $K(Y)\otimes^L K(X)$, коммутативность очевидна (обе композиции равны нулю за счет горизонтальных стрелок).

2.4.4. Вывод правила Лейбница из коммутативности (11). Пора указать, что дифференциал ∂_P из 2.2.4 является правым дифференциалом. Это означает, что

$$\partial_{Y\times P}(a\cup u) = a\cup\partial_P u \tag{14}$$

для любых $a\in K(Y)$, $u\in K(U)$. Действительно, в силу $\mathbb{Z}$-градуированности можно считать a и u однородными: $a\in$

$\mathrm{Hom}(\Sigma^r S, K(Y))$, $u \in \mathrm{Hom}(\Sigma^s S, K(U))$. Рассматривая композицию (см. определение умножения 2.3.2) морфизма $\Sigma^{r+s} S \to \Sigma^r S \otimes^L \Sigma^s S \xrightarrow{a \otimes^L u} K(Y) \otimes^L K(U)$ с двумя обходами диаграммы (11), получаем в точности соотношение (14).

Определим, наконец, тот дифференциал, для которого выполняется правило Лейбница из 1.3.1 (левый дифференциал), положив

$$\partial^l_P(u) = (-1)^s \partial_P(u), \quad u \in K_s(U). \tag{15}$$

Из (14) получаем

$$\partial^l_{Y \times P}(a \cup u) = (-1)^r a \cup \partial^l_P u, \tag{16}$$

где r – градуировка a. Воспользовавшись коммутативностью умножения (см. 2.3.2), получим отсюда

$$\partial^l_{P \times Y}(u \cup a) = \partial^l_P u \cup a. \tag{17}$$

Поясним причины введения искомого (левого) дифференциала с помощью правого: в [4] хорошо описано правое действие $\mathcal{S}_*$ на $\mathcal{S}p$ и надстройка определена в его терминах. Для прямого определения левого дифференциала можно выписать аналогичные левые структуры, что разумно для случая некоммутативного умножения. Однако K-умножение коммутативно, и автор предпочел воспользоваться этим.

2.5. Сравнение с теорией Томасона–Тробо.

В [2] не указано, какая из многочисленных (и более или менее эквивалентных) версий понятия спектра имеется в виду. Будем считать, что $K^{TT}(P) = K^N_t(\mathcal{P}c(P))$, где категория $\mathcal{P}c(P)$ со структурой Вальдхаузена описана в 2.2.3, а спектр $K^N_t(\mathcal{C})$ категории Вальдхаузена $\mathcal{C}$ описан в 2.6.2.

Укажем изоморфизм функторов

$$\nu : K_n(P) \to K^{TT}_n(P), \tag{18}$$

согласованный с умножением. Это позволит явно определить ∂ в примере 1.2.2 и единицы $1_X \in K^{TT}(X)$ в примере 1.3.3.

Прямо из определений видно, что функтор забывания симметрической структуры $\mathcal{S}p \to \mathcal{S}p^{\mathbb{N}}$ переводит симметрический спектр $K(P)$ в несимметрический спектр $K^N(\mathcal{P}c(P))$ (2.6.1). Тем самым $\pi_n K(P) = \pi_n K^N(\mathcal{P}c(P))$, так как обе группы определены как копредел покомпонентных гомотопических групп [5, 3.1.9], а $\pi_n K(P) = \mathrm{Hom}(\Sigma^n S, K(P))$ (здесь рассматриваются морфизмы категории $\mathcal{HS}p$) (см. 3.5.7). Учитывая отождествление гомотопических групп симплициального и топологического спектров $\pi_n K^N(\mathcal{P}c(P)) = \pi_n K_t^N(\mathcal{P}c(P))$ (2.6.4), получаем изоморфизм ν.

Умножение в [2, 3.15] указано не с большей степенью определенности, чем категория спектров. Тем не менее имеющаяся при введении умножения ссылка на [7, ниже 1.5.3], привела к предположению, что на K^2-теории умножение задано следующим образом.

Согласно [7, 1.5] пространство $|N.wS^n_{\cdot}\mathcal{C}|$ гомотопически эквивалентно пространству петель от $|N.wS^{n+1}_{\cdot}\mathcal{C}|$ при $n \geq 1$. Тем самым отображение из индуктивной системы, определяющей $K^2_r(P)$,

$$\pi_{r+n}(|N.wS^n_{\cdot}\mathcal{C}|) \to K^2_r(P), \quad \mathcal{C} = \mathcal{P}c(P) \tag{19}$$

является изоморфизмом при $n \geq 1$. Поэтому для определения умножения на K^2-группах достаточно для $\mathcal{D} = \mathcal{P}c(Q)$ и $\mathcal{E} = \mathcal{P}c(P \times Q)$ определить спаривание

$$\pi_{r+1}(|N.wS.\mathcal{C}|) \times \pi_{s+1}(|N.wS.\mathcal{D}|) \to \pi_{r+s+2}(|N.wS^2_{\cdot}\mathcal{E}|). \tag{20}$$

Биточный функтор $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ (2.3.3) индуцирует [7, 1.5] спаривание

$$|N.wS.\mathcal{C}| \otimes |N.wS.\mathcal{D}| \to |N.wS^2_{\cdot}\mathcal{E}|, \tag{21}$$

которое и определяет умножение (20).

Именно с этим умножением и сравнивается умножение из 2.3.2. Утверждается, что для $a \in K_r(P)$ и $b \in K_s(Q)$ произведение $a \cup b$ переходит при изоморфизме сравнения ν в произведение νa и νb, определенное с помощью (20) и (19).

Это сводится к коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{r+1}(KP_1) \times \pi_{s+1}(KQ_1) & \longrightarrow & \pi_r(KP) \times \pi_s(KQ) & \longrightarrow & K_r(P) \times K_s(Q), \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \pi_{r+s+2}K(P \times Q)_2 & \longrightarrow & \pi_{r+s}K(P \times Q) & \longrightarrow & K_{r+s}(P \times Q), \end{array} \tag{22}$$

где первые (горизонтальные) стрелки – морфизмы индуктивных систем, вторые стрелки заданы с помощью изоморфизмов из 3.5.7, а вертикальные стрелки – умножение (20) и умножение из 2.3.2. Проверка коммутативности этой диаграммы опущена.

2.6. Спектры K-теории категории Вальдхаузена.

Здесь фиксируется понятие спектра K-теории для категории Вальдхаузена $\mathcal{C}$. Точнее говоря, с категорией $\mathcal{C}$ связаны четыре спектра: $K(\mathcal{C})$, $K_t(\mathcal{C})$, $K^N(\mathcal{C})$ и $K_t^N(\mathcal{C})$, где t – признак того, что компоненты спектра – топологические пространства (а не симплициальные множества), а N указывает на то, что это не симметрический спектр.

Поясним причины рассмотрения этих спектров. Симметрический симплициальный спектр $K(\mathcal{C})$ наиболее удобен как для мультипликативных задач (в силу его симметричности), так и для гомотопических задач (конструкции конуса и надстройки по существу симплициальны). Несимметрический топологический спектр $K_t^N(\mathcal{C})$ необходим для сравнения с теорией [2]. Симметрический топологический спектр $K_t(\mathcal{C})$ хорош тем, что как он, так и умножения для него явно описаны в [3]. Наконец, несимметрический симплициальный спектр $K^N(\mathcal{C})$ – это естественный мостик между $K(\mathcal{C})$ и $K_t^N(\mathcal{C})$. Перейдем к описанию этих спектров.

2.6.1. Спектр $K^N(\mathcal{C})$. Симплициальный спектр $K^N(\mathcal{C})$ лежит в категории $\mathcal{S}p^{\mathbb{N}}$ [5, 1.2.1], т.е. в категории спектров, построенной по категории симплициальных множеств $\mathcal{S}_*$. Он получается заменой геометрической реализации в исходной конструкции Вальдхаузена на диагональный функтор $D_.$, превращающий (пунктированные) полисимплициальные множества в (пунктированные) симплициальные.

Для более точного описания напомним [7, с. 330], что $S_.$-конструкция Вальдхаузена по n-симплициальной категории Вальдхаузена $\mathcal{E}$ строит $(n+1)$-симплициальную категорию Вальдхаузена $S_.\mathcal{E}$. Определим n-ое пространство спектра $K^N(\mathcal{C})$ как

$$K^N(\mathcal{C})_n = D_.N_.wS_.^n\mathcal{C} \in \mathcal{S}_*, \tag{23}$$

где $S_.^n\mathcal{C} = S_.(S_.(\dots S_.C)))$, а $N_.$ – функтор нерва, превращающий пунктированные n-симплициальные категории в пунктированные n-симплициальные множества. В частности, $K(\mathcal{C})_0 = N_.w\mathcal{C}$.

Для определения структурных морфизмов спектра

$$S^1 \otimes K^N(\mathcal{C})_n \to K^N(\mathcal{C})_{n+1} \tag{24}$$

рассмотрим морфизм $(1+n)$-симплициальных категорий

$$[1] \times wS_.^n\mathcal{C} \to wS_.(S_.^n\mathcal{C}), \tag{25}$$

описываемый так (неформально левая часть – это 1-остов правой части [7, с. 329]): объект $X \times Y$ отправим в Z, где $Z_{i,j} = Y$, если $X_i \neq X_j$ и $Z_{i,j} = 0$, если $X_i = X_j$. Так как морфизм (25) после перехода к нервам пропускается через $S^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$, то применение $D.$ дает структурные морфизмы (24).

2.6.2. Спектр $K_t^N(\mathcal{C})$. Топологический спектр $K_t^N(\mathcal{C})$ лежит в категории спектров, построенной по категории пунктированных компактно-порожденных пространств $\mathcal{T}_*$. Эта категория спектров указана в [5, 6.2.1] и обозначена $\mathcal{S}p^{\mathbb{N}}_{\mathcal{T}_*}$.

Спектр $K_t^N(\mathcal{C})$ строится точно так же, как и спектр $K^N(\mathcal{C})$ за исключением того, что вместо диагонального функтора используется функтор геометрической реализации $|\cdot|$, превращающий пунктированные полисимплициальные множества в пунктированные компактно-порожденные пространства.

Точнее говоря, $K_t^N(\mathcal{C})_n = |N.wS^n_.\mathcal{C}| \in \mathcal{T}_*$, а структурные морфизмы спектра $S^1_t \otimes K_t^N(\mathcal{C})_n \to K_t^N(\mathcal{C})_{n+1}$ получаются из (25) переходом к нервам, геометрическим реализациям и учетом раз и навсегда зафиксированного изоморфизма $|S^1| \simeq S^1_t$ (где S^1_t – евклидова окружность из [5, 6.2]).

2.6.3. Спектры $K_t(\mathcal{C})$ и $K(\mathcal{C})$. Симметрический спектр $K_t(\mathcal{C})$-теории в категории $\mathcal{S}p_{\mathcal{T}_*}$ указан в [3, 6.1]. Здесь $\mathcal{S}p_{\mathcal{T}_*}$ – категория симметрических спектров, построенная по категории пунктированных компактно-порожденных топологических пространств. Эта категория указана в [5, 6.2.2] и обозначена там $\mathcal{S}p^{\Sigma}_{\mathcal{T}_*}$.

Симплициальная версия этого спектра

$$K(\mathcal{C}) \in \mathcal{S}p$$

принадлежит категории симплициальных симметрических спектров (см. 3.1) и получается при замене в конструкции [3, 6.1] геометрической реализации на диагональный функтор $D.$, превращающий (пунктированные) полисимплициальные множества в (пунктированные) симплициальные. Тем самым его n-тая компонента – это

$$K(\mathcal{C})_n = D.N.wS.\mathcal{C}^Q,$$

где $Q = \{1, \ldots, n\}$, полисимплициальная категория $wS.\mathcal{C}^Q$ описана в [3, 6.1], а действие Σ_n на $D.N.wS.\mathcal{C}^Q$ происходит из действия на Q.

2.6.4. Сравнение $K_t^N(\mathcal{C})$ и $K^N(\mathcal{C})$. Симплициальный спектр $K^N(\mathcal{C})$ позволяет вообще избежать использования топологического спектра $K_t^N(\mathcal{C})$. Действительно, теорема Эйленберга–Зильбера позволяет отождествить $|K^N(\mathcal{C})|$ и $K_t^N(\mathcal{C})$, где $|\cdot|$: $\mathcal{S}p^{\mathbb{N}} \to \mathcal{S}p^{\mathbb{N}}_{\mathcal{T}_*}$ – функтор геометрической реализации, заданный покомпонентно. Отсюда, в свою очередь, возникает отождествление $\pi_n(K^N(\mathcal{C})) \simeq \pi_n(K_t^N(\mathcal{C}))$, поскольку гомотопические группы симплициального множества определены как гомотопические группы его геометрической реализации.

3. Используемые гомотопические структуры

3.1. Основные категории.

Потребуются следующие категории:

- $\mathcal{S}_*$ – категория пунктированных симплициальных множеств;
- $\mathcal{S}p$ – категория симметрических спектров, построенная по категории пунктированных симплициальных множеств [5, 1.2.2].

3.2. Модельные структуры.

Здесь фиксируются модельные структуры [4, 1.1] на категориях $\mathcal{S}_*$ и $\mathcal{S}p$.

Для $\mathcal{S}_*$ модельная структура описана в [5, 3.4.4], для $\mathcal{S}p$ – в [5, 3.4.4]. Поскольку требования к модельной категории [5, 3.2.3] менее жесткие, чем в [4] (не требуется ни выбора, ни существования функториальной факторизации), то следует убедиться, что $\mathcal{S}p$ может быть снабжена такой структурой. Для $\mathcal{S}p$ наличие функториальной факторизации по существу доказано в [5, 3.4.6;3.4.8]. Хотя функториальность и не заявлена в формулировках, она ясна из доказательства, которое опирается на лемму [5, 3.2.11], используемую для построения факторизации.

3.3. Замкнутые моноидальные структуры.

Здесь фиксируются следующие структуры:

- структура замкнутой симметрической моноидальной категории на $\mathcal{S}_*$;
- структура замкнутого правого $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$;
- структура замкнутой симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры на $\mathcal{S}p$.

При этом используется терминология из [4, 4.1]. Произведение во всех случаях обозначается $X \otimes Y$ (хотя в некоторых источниках оно может обозначаться $X \wedge Y$).

3.3.1. Терминологические предупреждения. Выражение вида $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ для моноидальных структур (категорий, модулей и т.д.) понимается как результат фиксированной расстановки скобок; результат иной расстановки отождествляется с этим неявным использованием соответствующих изоморфизмов ассоциативности (изоморфизмы перестановки, происходящие из "симметрической" части данных симметрических моноидальных структур всегда указаны явно).

При работе с замкнутыми моноидальными структурами используются замены $\mathrm{Hom}_l(X,Y) = \mathcal{H}om(X,Y)$ и $\mathrm{Hom}_r(X,Y) = Y^X$ [4, ниже 4.1.14]; в симметрических случаях считается, что $Y^X = \mathcal{H}om(X,Y)$, а изоморфизмы сопряженности $\varphi_l : \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om(X,Z))$ и $\varphi_r : \mathrm{Hom}(Y \otimes X, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om(X,Z))$ связаны с помощью перестановки $X \otimes Y \to Y \otimes X$ из симметрической структуры.

3.3.2. Замкнутая симметрическая моноидальная структура на $\mathcal{S}_*$. Эта структура стандартна [5, 1.1]; ее единица – это $S^0 = \Delta[0]_+$. Уточним обозначения: $S^1 = \Delta[1]/\partial\Delta[1]$, $S^n = S^1 \otimes \cdots \otimes S^1$.

3.3.3. Структура замкнутого $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$. Структура замкнутого (правого) $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$ описана в [5, 1.3]. В частности, для симметрических спектров $X, Y \in \mathcal{S}p$ и $K \in \mathcal{S}_*$ определены $X \otimes K \in \mathcal{S}p$, $X^K \in \mathcal{S}p$, $\mathcal{H}om(X,Y) \in \mathcal{S}_*$.

3.3.4. Структура замкнутой симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры на $\mathcal{S}p$. Для структуры $\mathcal{S}p$ как замкнутой симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры нужны [4, 4.1.9; 4.1.14 и ниже] замкнутая симметрическая моноидальная структура на $\mathcal{S}p$ и замкнутый моноидальный функтор $i : \mathcal{S}_* \to \mathcal{S}p$, являющийся симметрическим.

Симметрическая моноидальная структура на $\mathcal{S}p$ указана в [5, 2.2]; ее единица – это сферический спектр S. Для указания замкнутой структуры в силу симметричности достаточно (см. 3.3.1) указать $\mathcal{H}om(X,Y)$ и изоморфизм сопряженности

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om(X,Z))$$

Это сделано в [5, 2.2.9; 2.2.10].

Для указания i надо задать [4, 4.1.5, 4.1.2] тройку (F, m, α). В качестве F возьмем функтор ∞-надстройки [5, 1.2.4]:

$$\Sigma^\infty : \mathcal{S}_* \to \mathcal{S}p, \tag{26}$$

в качестве α – тождественный морфизм $\Sigma^\infty S^0 = S$. Осталось ввести $m : F(K) \otimes F(L) \to F(K \otimes L)$ и проверить симметричность, т.е. коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(K) \otimes F(L) & \xrightarrow{m} & F(K \otimes L) \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(t)} \\ F(L) \otimes F(K) & \xrightarrow{m} & F(L \otimes K), \end{array} \tag{27}$$

где t – изоморфизм перестановки симметрических моноидальных структур. Так как существование “естественных” m лишь заявлено в [5, 2.2.6(1)]), то придется их предъявить (без этого трудно говорить о коммутативности (27)).

Так как $F(K) \otimes F(L)$ – копредел диаграммы $F(K) \otimes F(L) \overset{m\otimes 1}{\leftarrow} F(K) \otimes S \otimes F(L) \overset{1\otimes m}{\to} F(K) \otimes F(L)$ [5, с. 16] (где $\otimes$ – произведение соответствующих симметрических последовательностей [5, 2.1]), а m – структурный морфизм S-модуля, происходящий из структуры соответствующего симметрического спектра), то достаточно построить согласованные морфизмы из ее концов. Пользуясь [5, 2.1.14], для этого достаточно указать $(\Sigma_p \times \Sigma_q)$-эквивариантные отображения $S^p \otimes K \otimes S^q \otimes L \to S^{p+q} \otimes K \otimes L$, где действие группы на правой части определено стандартным вложением $\Sigma_p \times \Sigma_q \subset \Sigma_{p+q}$. Как для левого, так и для правого конца диаграммы это одно и то же отображение: $s_p \otimes k \otimes s_q \otimes l \to (s_p \otimes s_q) \otimes k \otimes l$. Легко проверить (также используя [5, 2.1.14]), что так определенные морфизмы из концов диаграммы согласованы и, тем самым получить определение m из структуры симметрического моноидального функтора i. Также легко проверить коммутативность (27), имея в виду, что в $\mathcal{S}p$ и в категории симметрических последовательностей $t(x \otimes y) = \rho_{q,p}(y \otimes x)$, где $x \otimes y \in X_p \otimes Y_q$, а $\rho_{q,p} \in \Sigma_{p+q}$ переставляет, сохраняя порядок, начальные p чисел с q заключительными числами [5, ниже 2.1.4]. Тем самым описание структуры симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры на $\mathcal{S}p$ завершено.

Осталось дополнить моноидальный функтор $i = (F, m, \alpha)$ до замкнутого моноидального функтора [4, 4.1.14] $(F, m, \alpha, U, \varphi)$, где $\mathcal{S}_* \leftarrow \mathcal{S}p : U$ – функтор, сопряженный справа к $F = \Sigma^\infty$, а φ – изоморфизм соряженности

$$\mathrm{Hom}(\Sigma^\infty K, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K, UX).$$

Подходят $U(X) = X_0$ [5, 2.2.5] и $\varphi(f) = f_0$.

3.3.5. Взаимодействие структур $\mathcal{S}_*$-алгебры и правого $\mathcal{S}_*$-модуля. На категории $\mathcal{S}p$ имеется структура замкнутого правого $\mathcal{S}_*$-модуля из 3.3.3 и структура замкнутого правого $\mathcal{S}_*$-модуля, полученная ослаблением структуры замкнутой симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры из 3.3.4. Утверждается, что эти две структуры изоморфны (а не только эквивалентны), т.е. имеется изоморфизм бифункторов

$$X \otimes \Sigma^\infty K \to X \otimes K. \tag{28}$$

Этот изоморфизм указан в [5, ниже 2.2.5].

3.4. Взаимодействие моноидальных и модельных структур.

Теперь рассмотрим взаимодействие моноидальных структур из 3.3 и модельных структур из 3.2: они согласованы, но этому утверждению следует придать смысл.

Во-первых, модельные структуры на категориях $\mathcal{S}_*$, $\mathcal{S}p$ уважаемы моноидальными структурами, т.е. моноидальны [4, 4.2.6]. Для $\mathcal{S}_*$ это доказано в [4, 4.2.10], для $\mathcal{S}p$ – в [5, 5.3.8].

Во-вторых, следует проверить, что модельные структуры уважаются не только моноидальными структурами на самих категориях, но и соответствующими функторами. Точнее говоря, утверждается следующее

1) структура замкнутого правого $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$ является структурой правой $\mathcal{S}_*$-модельной категории на $\mathcal{S}p$ [4, 4.2.18];
2) структура замкнутой симметрической $\mathcal{S}_*$-алгебры на $\mathcal{S}p$ является структурой симметрической моноидальной $\mathcal{S}_*$-модельной категории [4, 4.2.20].

Первый пункт сводится (в силу корасслоенности единицы в $\mathcal{S}_*$) к проверке того, что умножение $\otimes : \mathcal{S}p \times \mathcal{S}_* \to \mathcal{S}p$ является бифунктором Квиллена [4, 4.2.1]. Иными словами, следует убедиться, что "произведение" $f\Box g$ корасслоений – снова корасслоение (причем тривиальное, если либо f, либо g тривиально). Это сводится ко второму пункту с учетом изоморфизма (28).

Второй пункт сводится к проверке того, что Σ^∞ – это моноидальный функтор Квиллена [4, 4.2.16], а в силу корасслоенности единицы $\mathcal{S}_*$ к тому, что он является функтором Квиллена [4, 1.3.1], т.е. сохраняет корасслоения (проверено в [5, 3.4.2(3)]) и тривиальные корасслоения (следует из [5, 3.1.8]).

3.5. Структуры на гомотопических категориях.

Модельные структуры $\mathcal{S}_*$, $\mathcal{S}p$ (см. 3.2) позволяют рассмотреть гомотопические категории $\mathcal{HS}_*$, $\mathcal{HS}p$. Каждая из них имеет те же объекты, что и исходная модельная категория. Кроме того, имеется функтор (локализации) из исходной модельной категории в ее гомотопическую категорию. Этот функтор тождественен на объектах. Перейдем к описанию дополнительных структур на гомотопических категориях.

3.5.1. Гомотопические замкнутые моноидальные структуры. Согласованность модельных и моноидальных структур позволяет перенести последние в гомотопические категории и получить:

- структуру замкнутой симметрической моноидальной категории на $\mathcal{HS}_*$;
- структуру замкнутого правого $\mathcal{HS}_*$-модуля на $\mathcal{HS}p$;
- структуру замкнутой симметрической $\mathcal{HS}_*$-алгебры на $\mathcal{HS}p$.

Все это получается автоматически применением [4, 4.3.4]. Умножение во всех случаях обозначается $\otimes^L$.

Моноидальный функтор $\mathcal{HS}_* \to \mathcal{HS}p$ из структуры соответствующей алгебры обозначается Σ^∞ вместо $L\Sigma^\infty$ (левый производный [4, 1.3.6]), так как корасслоенность всех объектов $\mathcal{S}_*$ влечет равенство $L\Sigma^\infty = \mathrm{Ho}(\Sigma^\infty)$. Иными словами, $L\Sigma^\infty$ – единственное распространение Σ^∞ на все морфизмы $\mathcal{HS}_*$.

С учетом этого из 3.3.5 автоматически получается изоморфизм бифункторов

$$X \otimes^L \Sigma^\infty K \to X \otimes^L K. \tag{29}$$

3.5.2. Связь $\otimes^L$- и $\otimes$-умножений. Для любой моноидальной модельной категории $\mathcal{C}$ имеется естественное преобразование из новых $\otimes^L$-произведений в старые $\otimes$-произведения, т.е. имеется естественный морфизм (в гомотопической категории):

$$\begin{array}{c} X_1 \otimes^L X_2 \cdots \otimes^L X_n \\ \Big\downarrow \\ X_1 \otimes X_2 \cdots \otimes X_n. \end{array} \tag{30}$$

Иными словами, локализация $\mathcal{C} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ – слабо моноидальный функтор, т.е. удовлетворяет всем свойствам моноидального функтора [4, 4.1.2] за исключением того, что морфизм $F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ не обязан быть изоморфизмом. Для построения (30) напомним [4, 4.3], что $\otimes^L$-умножение – производный функтор от $\otimes$ [4, 1.3.2] и тем самым $X \otimes^L Y = QX \otimes QY$, где Q – функтор корасслоенной замены из структуры функториальной факторизации модельной категории. Эта факторизация дает морфизмы $q_i : QX_i \to X_i$, и (30) определен как $q_1 \otimes \cdots \otimes q_n$.

Аналогичная ситуация имеет место и для любого "бифунктора" Квиллена $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ [4, 4.2.1] и его производного "бифунктора" $\otimes^L : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{E})$ [4, 4.3.1], т.е. имеется естественное преобразование из новых $\otimes^L$-произведений в старые $\otimes$-произведения. В частности, такое преобразование имеется для структуры правого $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$.

3.5.3. Триангуляции. Здесь указывается триангуляция $\mathcal{HS}p$ в смысле [4, 7.1.1], что позволяет получить и триангуляцию в стандартном смысле. Для этого надо ввести предтриангуляции [4, 6.5.2] и проверить стабильность $\mathcal{S}p$, т.е. "обратимость" надстройки в $\mathcal{HS}p$.

Предтриангуляция на гомотопической категории возникает автоматически [4, замечание ниже 6.5.2] из пунктированной модельной структуры на исходной (догомотопической) категории. Однако моноидальная $\mathcal{S}_*$-модельная структура на догомотопической категории позволяет [4, 6.6.4] заменить в этой предтриангуляции $\mathcal{HS}_*$-действие "модельного происхождения" изоморфным ему $\mathcal{HS}_*$-действием, происходящим из моноидальной $\mathcal{S}_*$-модельной структуры (поднять действие на догомотопический уровень). В частности, при ссылках на [4] подразумевается, что при упоминании там действия "модельного происхождения" оно заменяется действием "моноидального происхождения".

В частности, надстройка задана как $\Sigma X = X \otimes^L S^1$, а функтор петель как $\Omega Y = R\mathcal{H}om(S^1, Y)$ [4, 6.1.1]. Это сопряженные функторы, и тем самым имеется морфизм функторов $i : X \to \Omega\Sigma X$. Для завершения триангуляции осталось убедиться, что i – изоморфизм. Это следует из [5, 3.1.14(3)] с учетом следующих обстоятельств: (a) можно считать, что X кофибрантен, так как достаточно проверить изоморфичность i на изоморфном ему QX; тем самым $X \otimes^L S^1 = X \otimes S^1$ (S^1 корасслоена [5, с. 26]); (b) пусть Y – симметрический спектр, полученный из ΣX покомпонентным применением расслоенной замены в модельной категории $\mathcal{S}_*$, тогда Y_n – комплекс Кана, и имеется уровневая слабая эквивалентность $\Sigma X \to Y$ (значит, это стабильная эквивалентность и изоморфизм в гомотопической категории). Кроме того, прямо из определения стабильных расслоений и корасслоений следует, что это расслоение. Тем самым $\Omega\Sigma X = \mathcal{H}om(S^1, Y)$.

3.5.4. Надстройка сферического спектра и $\otimes^L$. Для определения умножения в K-группах требуется канонический изоморфизм

$$\Sigma^r S \otimes^L \Sigma^s S \to \Sigma^{r+s} S. \tag{31}$$

Для его построения рассмотрим изоморфизм $\gamma : \Sigma^\infty S^r \otimes^L \Sigma^\infty S^s \to \Sigma^\infty S^{r+s}$, являющийся композицией умножения из структуры Σ^∞, как моноидального функтора $\mathcal{HS}_* \to \mathcal{HS}p$ (см. 3.5.1), и отождествления $S^{r+s} = S^r \otimes S^s = S^r \otimes^L S^s$. Изоморфизм (31) получается из γ с помощью отождествления $\Sigma^\infty S^d \simeq \Sigma^d S$. Это отождествление (изоморфизм) получается из изоморфизма (29) для $X = S$ и $K = S^d$.

3.5.5 Выделенные треугольники. Нам потребуется выделенность некоторых треугольников в $\mathcal{HS}p$, т.е. [4, 7.1.6] корасслоенность некоторых последовательностей. Утверждается, что для любой $\mathcal{S}p$-стрелки $f : A \to B$ последовательность

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\partial} A \otimes^L S^1 \tag{32}$$

корасслоена, где конус $\mathrm{Cone}(f)$ – копредел из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \partial_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A \otimes^L \Delta[1]_* & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f), \end{array} \tag{33}$$

а ∂_1 – это $\otimes^L$-произведение A и стрелки $\Delta[0]_+ \to \Delta[1]_*$, переводящей 0 в 1. Стрелка ∂ определена согласованными стрелками $A \otimes^L (\Delta[1]_* \to S^1)$ и $B \to *$.

Поясним это: корасслоенность – свойство последовательности $A \to B \to C$, снабженной дополнительной структурой [4, 6.2.6]. Для аддитивных категорий эта дополнительная структура сводится [4, 7.1.3] к стрелке $C \to \Sigma A$. Поскольку $\mathcal{HS}p$ аддитивна [4, 7.1.2] вследствие стабильности $\mathcal{S}p$ (см. 3.5.3), то можно говорить о корасслоенности последовательностей вида $A \to B \to C \to \Sigma A$.

Для того чтобы убедиться в корасслоенности (32), надо проверить, что эта последовательность изоморфна стандартной корасслоенной последовательности

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p_f} C(f) \xrightarrow{\partial_f} \Sigma A, \tag{34}$$

где A корасслоен, f – корасслоение, а ко-слой $C(f)$ определен как копредел

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_f} \\ * & \longrightarrow & C(f), \end{array} \tag{35}$$

а ∂_f указан в [4, 6.2.1] как часть кодействия ΣA на $C(f)$.

Сначала проверим корасслоенность (32) в случае, когда спектр A корасслоен, а f корасслоение. Для этого сравним ее с (34) с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p_f} & C(f) & \xrightarrow{\partial_f} & \Sigma A \\ {\scriptstyle =}\uparrow & & {\scriptstyle =}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle =} \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{b} & \mathrm{Cone}(f) & \xrightarrow{\partial} & \Sigma A, \end{array} \tag{36}$$

где $i : \mathrm{Cone}(f) \to C(f)$ определен согласованными стрелками из диаграммы копредела (33), определяющей конус: $p_f : B \to C(f)$ и $A \otimes^L \Delta[1]_* \to *$. Можно проверить (используя моноидальность действия $\mathcal{S}_*$), что i – слабая эквивалентность, а правый квадрат в (36) коммутативен. Таким образом (32) корасслоена, будучи $\mathcal{HS}p$-изоморфной верхней строке в (36).

В общем случае, применяя функтор корасслоенной замены, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{b} & \mathrm{Cone}(f) & \xrightarrow{\partial_f} & \Sigma A \\ {\scriptstyle q}\uparrow & & {\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_q} & & \\ QA & \xrightarrow{i} & B' & \xrightarrow{b'} & \mathrm{Cone}(i) & \xrightarrow{\partial_i} & \Sigma QA, \end{array} \tag{37}$$

где q – морфизм корасслоенной замены. Тем самым, QA корасслоен, а q – тривиальное расслоение. Спектр B' и стрелки i, p возникают из функториальной факторизации морфизма

$fq : QA \to B$. Тем самым, i – корасслоение, а p – тривиальное расслоение. Нижняя строка корасслоена ввиду корасслоенности QA и i. Единственная стрелка $\mathrm{Cone}(i) \to \mathrm{Cone}(f)$, делающая диаграмму коммутативной, это $\mathcal{HS}p$-изоморфизм (т.к. таковы q и p). Итак, строки $\mathcal{HS}p$-изоморфны и верхняя корасслоена.

3.5.6. Конус и $\otimes^L$. Для данных $X \xrightarrow{f} Y$ и Z в категории $\mathcal{HS}p$ следующая диаграмма дает изоморфизм верней и нижней строк

$$\begin{tikzcd}
Z \otimes^L Y \arrow[r, "b_{1\otimes^L f}"] \arrow[d, "="'] & \mathrm{Cone}(Z \otimes^L f) \arrow[r, "\partial_{1\otimes^L f}"] \arrow[d, "c"'] & Z \otimes^L X \otimes^L S^1 \arrow[d, "="] \\
Z \otimes^L Y \arrow[r, "1\otimes^L b_f"] & Z \otimes^L \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "1\otimes^L \partial_f"] & Z \otimes^L X \otimes^L S^1,
\end{tikzcd} \qquad (38)$$

где b_f, $b_{1\otimes^L f}$, ∂_f, $\partial_{1\otimes^L f}$ указаны в (32); c определено согласованными морфизмами из диаграммы копредела (35), определяющего конус, а именно $\otimes^L$-произведениями 1_Z и морфизмов в $\mathrm{Cone}(f)$ из его определения. Обратимость c следует из выделенности треугольника (32) и точности $\otimes^L$ [4, 6.5.1(i)].

3.5.7. Гомотопические группы как Hom **в гомотопической категории.** Для сравнения K-теории из [2], определенной в терминах гомотопических групп спектров, с K-теорией из 2.2, определенной в терминах морфизмов категории $\mathcal{HS}p$, надо уметь отождествлять $\pi_n(X)$ и $\mathrm{Hom}(\Sigma^n S, X)$ по меньшей мере для $X = K(P)$.

Такого отождествления не может быть для всех спектров X, так как $\mathrm{Hom}(\Sigma^n S, X)$ выдерживает слабые эквивалентности $\mathcal{S}p$, а $\pi_n(X)$ нет [5, 3.1.10].

Тем не менее такое отождествление имеется для спектров, “близких” к расслоенным, т.е. полустабильных спектров [5, 5.6.1]. Полустабильность означает, что расслоенная замена $X \to RX$ из модельной структуры на $\mathcal{S}p$ является стабильной гомотопической эквивалентностью, т.е. индуцирует изоморфизм гомотопических групп.

Этот результат применим к симметрическим спектрам $K(P)$, для которых полустабильность вытекает [5, 5.6.4, п. 2] из их квазирасслоенности [3, 2.1, 6.1] (дело в том, что конструкция Вальдхаузена дает почти Ω-спектр).

Для любого спектра X имеется цепочка равенств и изоморфизмов

$$\begin{aligned}&\mathcal{HS}p(\Sigma^n S, X) = \mathcal{HS}p(\Sigma^\infty S^n, X) =\\ =&HSpS(L\Sigma^\infty S^n, X) \xrightarrow{R\varphi} \mathcal{HS}_*(S^n, RU(X)) =\\ =&\mathcal{HS}_*(S^n, (RX)_0) = \pi_n((RX)_0) = \pi_n(RX).\end{aligned} \tag{39}$$

Для полустабильного X, к тому же, $\pi_n(RX) = \pi_n(X)$.

Поясним последовательность (39). Первое равенство – следствие отождествления $(\Sigma^n S)_r = S^1 \otimes \cdots \otimes S^1 \otimes S^n = (\Sigma^\infty S^n)_r$; второе равенство – следствие отождествления Σ^∞ с его левым производным (см. 3.5.1; это следствие корасслоенности симплициальных множеств); $R\varphi$ – изоморфизм сопряженности структуры замкнутой $\mathcal{HS}_*$-алгебры на $\mathcal{HS}p$ (3.5.1); RU – правый производный от функтора $U : Y \to Y_0$ (это правый сопряженный к Σ^∞) из 3.3.4. Первое равенство третьей строки – результат вычисления (прямо по определению) производного функтора RU: здесь RX – расслоенная замена для X. Второе равенство третьей строки – следствие эквивалентности гомотопической категории симплициальных множеств и компактно-порожденных топологических пространств. Заключительное равенство – следствие того, что RX, будучи расслоенным, является Ω-спектром [5, внизу стр. 38].

3.6. Морфизмы функторов и гомотопии.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории, $F_0, F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функторы, а $F_0 \xrightarrow{f} F_1$ – их морфизм. Известно, что f дает гомотопию $h^f : N\mathcal{C} \times \Delta[1] \to N\mathcal{D}$ между морфизмами NF_0 и NF_1, где N – функтор нерва. Для изучения взаимодействия h^f с различными структурами напомним ее конструкцию.

3.6.1. Гомотопии h^f и h^f_*. Морфизм f дает функтор $\mathcal{C} \times [1] \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, где [1] обозначает категорию $0 \to 1$; $F(X \times 0) = F_0(X)$, $F(X \times 1) = F_1(X)$, а $F(\varphi \times \to) = f \circ F_0(\varphi)$. Тем самым имеется морфизм симплициальных множеств $NF : N\mathcal{C} \times \Delta[1] \to N\mathcal{D}$. Это и есть h^f.

Если категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ пунктированы (выделен финально-инициальный объект), а F_0, F_1 уважают эту структуру, то $h^f(* \times \Delta[1]) = *$ ($*$ обозначает отмеченные точки). Тем самым морфизм пунктированных функторов f дает гомотопию $h^f_* : N.\mathcal{C} \otimes \Delta[1]_+ \to N.\mathcal{D}$, где $\otimes$ – произведение из структуры 3.3.2 (т.е. smash-произведение).

3.6.2. Гомотопия hw^f. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории Вальдхаузена. Для F_i, уважающих эту структуру (т.е. точных), имеются морфизмы симметрических спектров K-теории $K(F_i) : K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{D})$ (2.6.3). Предполагая, что и f уважает структуру Вальдхаузена (является слабой эквивалентностью), укажем гомотопию между $K(F_0)$ и $K(F_1)$:

$$hw^f : K(\mathcal{C}) \otimes \Delta[1]_+ \to K(\mathcal{D}), \tag{40}$$

где $\otimes$ – произведение из структуры правого $\mathcal{S}_*$-модуля на $\mathcal{S}p$ (см. 3.3.3).

Отметим, что hw^f является левой гомотопией между $K(F_0)$ и $K(F_1)$ в смысле [4, 1.2.4(3)]. Это легко следует из согласованности модельной структуры $\mathcal{S}p$ и правого действия $\mathcal{S}_*$, иными словами, из того, что $\mathcal{S}p$ является правой $\mathcal{S}_*$-модельной категорией (см. 3.4).

Зададим hw^f, указав морфизмы $hw^f_n : K(\mathcal{C})_n \otimes \Delta[1]_+ \to K(\mathcal{D})_n$, согласованные со структурой симметрических спектров. По определению, $K(\mathcal{C})_n = D.N.wS.\mathcal{C}^Q$, где $Q = \{1, \ldots, n\}$. Полисимплициальная категория $wS.\mathcal{C}^Q$ сопоставляет каждому стандартному n-симплексу Δ категорию $wS.\mathcal{C}^Q(\Delta)$. Морфизм f дает морфизм функторов $wS.F_i^Q(\Delta) : wS.\mathcal{C}^Q(\Delta) \to wS.\mathcal{D}^Q(\Delta)$, обозначаемый $f(\Delta)$. Тем самым с Δ связана гомотопия $h_*^{f(\Delta)} : N.wS.\mathcal{C}^Q(\Delta) \otimes \Delta[1]_+ \to N.S.\mathcal{D}^Q(\Delta)$. Семейство гомотопий $h_*^{f(\Delta)}$ согласовано со структурой полисимплициального множества и дает морфизм n-симплициальных множеств

$$N.wS.\mathcal{C}^Q \times \Delta[1]_+ \to N.wS.\mathcal{D}^Q, \tag{41}$$

где произведение n-симплициального множества на симплициальное определено покомпонентно (компоненты соответствуют стандартным n-полисимплексам). Пользуясь отождествлением $D.X \times D.Y = D.(X \times Y)$ и гомотопией (41), получаем гомотопию

$$hw^f_n : D.N.wS.\mathcal{C}^Q \otimes \Delta[1]_+ \to D.N.S.\mathcal{D}^Q(\Delta). \tag{42}$$

Согласованность со структурой симметрического спектра очевидна. Например, действие Σ_n на $D.N.wS.\mathcal{C}^Q$ происходит из действия на Q и уважается hw^f_n.

3.6.3. Нуль-гомотопия. В условиях 3.6.2 предположим дополнительно, что F_0 переводит $\mathcal{C}$ в $*$ из пунктированной структуры

$\mathcal{D}$. Тогда hw^f принимает одно и то же значение на левом конце $\Delta[1]$ ($\partial_1^1 : [0] \to [1]$) и отмеченной точке $\Delta[1]_+$. Тем самым она пропускается через $\Delta[1]_*$ и дает нуль-гомотопию

$$hw^0(f) : K(\mathcal{C}) \otimes \Delta[1]_* \to K(\mathcal{D}). \tag{43}$$

3.6.4. Нуль-гомотопия и умножения. В условиях 3.6.3 предположим дополнительно, что имеются категории Вальдхаузена $\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{C}}, \widetilde{\mathcal{D}}$, функторы $\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1 : \widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{\mathcal{D}}$, морфизм функторов $\widetilde{f} : \widetilde{F}_0 \to \widetilde{F}_1$ и умножения (бифункторы) $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ и $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{D} \to \widetilde{\mathcal{D}}$. Предположим также, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{D} & \xleftarrow{1 \times F_i} & \mathcal{A} \times \mathcal{C} \\ {\scriptstyle\mu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} \\ \widetilde{\mathcal{D}} & \xleftarrow{\widetilde{F}_i} & \widetilde{\mathcal{C}} \end{array} \tag{44}$$

“почти коммутативны”, т.е. разные обходы дают изоморфные функторы. Обозначим соответствующие морфизмы функторов как $\mu_i : \mu(1 \times F_i) \to \widetilde{F}_i\mu$. Кроме того, потребуем согласованность f, $\widetilde{f}$ с умножением, т.е. коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mu(1 \times F_0) & \xrightarrow{\mu(1 \times f)} & \mu(1 \times F_1) \\ {\scriptstyle\mu_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu_1} \\ \widetilde{F}_0\mu & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{F}_1\mu. \end{array}$$

Предположим, кроме того, что $\widetilde{F}_i$, $\widetilde{f}$ и μ уважают структуру Вальдхаузена. Это означает, что $\widetilde{F}_i$ точны, $\widetilde{f}$ слабая эквивалентность, а μ удовлетворяет условиям (сравни с [3, с. 40]): для всяких $C \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{A}$ функторы $\mu(C, *)$ и $\mu(*, A)$ сохраняют $*$, корасслоения и слабые эквивалентности; для всякой пары корасслоений $A \to A'$, $C \to C'$ морфизм $\mu(A', C) \oplus_{\mu(A,C)} \mu(A', C) \to \mu(A', C')$ является корасслоением. Следуя 2.3.3 и [3, с. 40], получим умножения m и диаграмму в категории $\mathcal{S}p$:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) \otimes K(\mathcal{D}) & \xleftarrow{1 \otimes hw^0(f)} & K(\mathcal{A}) \otimes K(\mathcal{C}) \otimes \Delta[1] \\ {\scriptstyle m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle m} \\ K(\widetilde{\mathcal{D}}) & \xleftarrow{hw^0(\widetilde{f})} & K(\widetilde{\mathcal{C}}) \otimes \Delta[1]_*. \end{array} \tag{45}$$

Утверждается, что она коммутативна в категории $\mathcal{HS}p$.

Пользуясь тем, что гомотопные морфизмы модельной категории дают один и тот же морфизм гомотопической категории [4, 1.2.10], достаточно построить соответствующую гомотопию $K(\mathcal{A}) \otimes K(\mathcal{D}) \otimes \Delta[1]_* \otimes \Delta[1]_* \to K(\widetilde{\mathcal{D}})$. Ограничимся указанием, что она строится аналогично гомотопии $hw^0(f)$ (см. 3.6.3).

Литература

1. I. Panin, A. Smirnov, *Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties.* — K-theory Preprint Archives **459** (2000).
2. R. Thomason, T. Throbaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories.* — In: The Grothendieck Festschrift **3**, Birkhäuser, Boston (1990), 247–435.
3. Th. Geisser, L. Hesselholt, *Topological cyclic homology of schemes.* K-theory Preprint Archives **231** (1997).
4. M. Hovey, *Model categories.* — AMS, Mathematical Surveys and Monographs **63** (1999), 209 p.
5. M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, *Symmetric spectra.* — K-theory Preprint Archives **265** (1998).
6. A. Borel, J. P. Serre, *Le théorème de Riemann–Roch.* — Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.
7. F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces.* — Lect. Notes Math. **1126** (1985), 318–419.

Smirnov A. L. Leibniz formula in algebraic K-theory.

The paper can be considered as an addendum to a paper of Thomason and Throbaugh where K-theory of algebraic varieties is equipped with relative K-groups. It is proved that this enriched K-theory satisfies the Panin–Smirnov axioms for ring cohomology theories of algebraic varieties. In particular it is proved that the Leibniz formula, describing an interaction between a multiplication and a differential, holds in this case. A language of symmetric spectra and of monoidal model categories is used.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 16 сентября 2004 г.