Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, IV

Введение

Настоящая работа продолжает цикл работ [1–10], в которых были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального или полудиэдрального типа из классификации К. Эрдман [11]. В некоторых из этих работ (см. [1–3, 7, 10]) используется диаграммный метод Бенсона–Карлсона [12] вместе с его техническими усовершенствованиями, развитыми в [1, 2]. В этом случае существенно используется возможность описания сизигий простых модулей с помощью так называемых диаграмм. Такая возможность имеется не всегда, и в связи с этим в [6] был предложен иной подход. Его существо составляет то, что на основе некоторых эмпирических наблюдений мы выдвигаем гипотезы о строении минимальных проективных резольвент простых модулей, и после их обоснования считываем "когомологическую информацию" с найденных резольвент, что приводит к описанию алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр.

В настоящей работе мы, используя технику работы [6], даем описание в терминах колчанов с соотношениями алгебр Йонеды для алгебр из серий $SD(2\mathcal{A})_1$, $SD(2\mathcal{A})_2$ и $SD(3\mathcal{A})_2$ (в обозначениях из [11]). Кроме того, описываются Ext-алгебры простых модулей над рассматриваемыми алгебрами, и потому полученные результаты могут быть применены к описанию кольца когомологий тех конечных групп, у которых главный блок Морита-эквивалентен какой-либо из алгебр указанных трех серий (см., например, таблицы в книге [11]).

Мы будем использовать основные понятия и обозначения, введенные в работах [1, 3]. Все рассматриваемые модули – левые.

1. Формулировка основных результатов

Пусть K – произвольное поле. Для произвольной конечномерной K-алгебры Λ через

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \operatorname{Ext}^m_\Lambda(M, M)$$

обозначим Ext-алгебру Λ-модуля M. Если Λ – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(\Lambda)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(\Lambda/J(\Lambda))$ называется алгеброй Йонеды алгебры Λ и обозначается через $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

В дальнейшем предполагаем, что поле K алгебраически замкнуто. Для любой конечномерной K-алгебры R, заданной с помощью колчана $Q = (V(Q),\ \mathrm{Arr}(Q))$ с соотношениями, через e_i, $i \in V(Q)$, обозначим идемпотенты, соответствующие вершинам колчана Q, а через $P_i = Re_i$ и $S_i = P_i/J(R)P_i$, $i \in V(Q)$, обозначим соответствующие этим вершинам неразложимые проективные R-модули и простые R-модули соответственно. Умножение справа на элемент $x \in e_iRe_j$ индуцирует гомоморфизм, действующий из P_i в P_j, и мы будем обозначать его также через x.

1.1. Серия $SD(2\mathcal{A})_1$**.** Алгебры, составляющие серию $SD(2\mathcal{A})_1$, определяются следующим колчаном с соотношениями (композиция путей записывается справа налево):

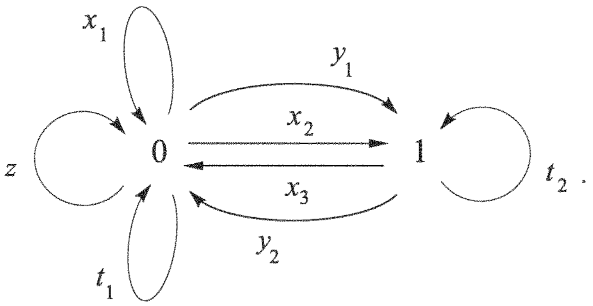
$$Q^{(2\mathcal{A})}: \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd} \ ,$$

$$\beta\gamma\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1}, \quad \gamma\beta\gamma = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},$$
$$\alpha^2 = c\cdot(\gamma\beta\alpha)^k, \quad \alpha(\gamma\beta\alpha)^k = 0,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $c \in K$. Алгебры этой серии обозначаем через $SD(2\mathcal{A})_1^{k,c}$, а также более кратко через $SD(2\mathcal{A})_1$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(SD(2\mathcal{A})_1^{k,c})$ рассмотрим колчан:

$\Re_1$:



На алгебре путей $K[\Re_1]$ этого колчана введем градуировку такую, что

$$\deg(x_i) = 1\,(i = 1, 2, 3),\ \deg(y_j) = 2\,(j = 1, 2),$$
$$\deg(z) = 3,\ \deg(t_j) = 4\,(j = 1, 2).$$

Рассмотрим на колчане $\Re_1$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = x_2x_1 = x_3x_2 = x_1x_3 = x_2x_3, \\ 0 = x_3y_1 = y_1x_1 = y_2x_2 = x_1y_2, \quad y_1x_3 = x_2y_2, \\ 0 = y_2y_1 = y_1y_2 = x_2z = zx_3, \\ zx_1 + x_1z = -c \cdot x_1^4, \\ 0 = y_1z = zy_2, \quad x_1t_1 = t_1x_1, \quad t_2x_2 = x_2t_1, \quad x_3t_2 = t_1x_3, \\ t_2y_1 = y_1t_1, \quad t_1y_2 = y_2t_2, \\ x_1^2t_1 = z^2, \quad t_1z = zt_1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Через $\mathcal{E}_1$ обозначим K-алгебру, определяемую колчаном $\Re_1$ с соотношениями (1.1). Так как эти соотношения однородны, то алгебра $\mathcal{E}_1$ наследует естественную градуировку с алгебры $K[\Re_1]$.

Теорема 1.1. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1^{k,c}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $c \in K$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}_1$.*

1.2. Серия $SD(2\mathcal{A})_2$. Алгебры

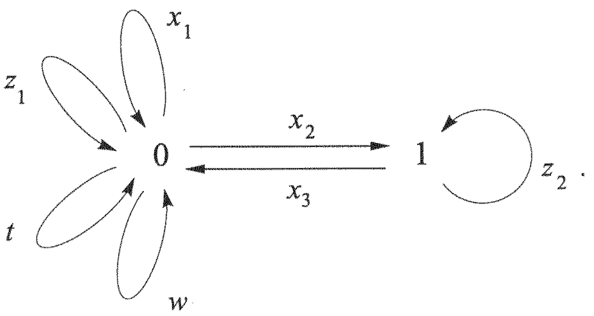
$$SD(2\mathcal{A})_2 = SD(2\mathcal{A})_2^{k,c}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, c \in K,$$

составляющие серию $SD(2\mathcal{A})_2$, определяются колчаном $Q^{(2\mathcal{A})}$, приведенным выше, и следующими соотношениями:

$$\beta\gamma = 0, \quad (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k, \quad \alpha^2 = \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c\cdot(\gamma\beta\alpha)^k.$$

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(SD(2\mathcal{A})_2^{k,c})$ рассмотрим колчан:

$\Re_2$:



На алгебре путей $K[\Re_2]$ этого колчана введем градуировку такую, что

$$\deg(x_i) = 1\,(i = 1, 2, 3),\ \deg(z_j) = 3\,(j = 1, 2),$$
$$\deg(t) = 4,\ \deg(w) = 5.$$

Рассмотрим на колчане $\Re_2$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = x_2x_1 = x_3x_2 = x_1x_3, \quad x_1^3 = 0, \\ 0 = x_1z_1 = z_1x_1, \quad z_2x_2 = -x_2z_1, \quad x_3z_2 = -z_1x_3, \\ x_1t = tx_1, \quad z_1t = tz_1, \quad 0 = x_2t = tx_3, \\ 0 = x_1w = wx_1 = wx_3 = x_2w, \\ wz_1 = -z_1w, \quad tw = wt, \quad w^2 = z_1^2t. \end{cases} \tag{1.2}$$

Через $\mathcal{E}_2$ обозначим K-алгебру, определяемую колчаном $\Re_2$ с соотношениями (1.2), и с градуировкой, наследуемой с алгебры $K[\Re_2]$.

Теорема 1.2. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2^{k,c}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $c \in K$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}_2$.*

1.3. Серия $SD(3\mathcal{A})_2$. Алгебры

$$SD(3\mathcal{A})_2 = SD(3\mathcal{A})_2^k,\, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

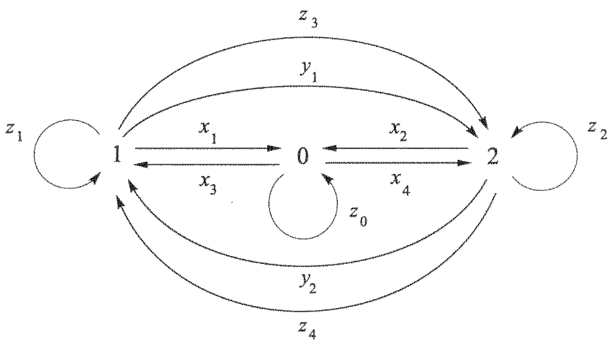
составляющие серию $SD(3\mathcal{A})_2$, определяются следующим колчаном с соотношениями:

$$Q^{(3\mathcal{A})}: \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\beta"] & 0 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd},$$

$$\delta\beta(\gamma\beta)^{k-1} = 0 = \gamma\eta(\delta\eta)^{k-1}, \quad \beta\gamma = \eta\delta. \tag{1.3}$$

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(SD(3\mathcal{A})_2^k)$ рассмотрим колчан:

$\Re_3$:



На алгебре путей $K[\Re_3]$ этого колчана введем градуировку такую, что

$$\deg(x_i) = 1\,(i = 1,2,3,4), \quad \deg(y_j) = 2\,(j = 1,2),$$
$$\deg(z_j) = 3\,(j = 0,1,2,3,4).$$

Рассмотрим на колчане $\Re_3$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = x_3x_1 = x_3x_2 = x_4x_1 = x_4x_2,\, x_1x_3 = -x_2x_4, \\ 0 = x_2y_1 = x_1y_2 = y_1x_3 = y_2x_4, \\ z_0x_1 = x_1z_1 = -x_2z_3,\, z_0x_2 = x_1z_4 = -x_2z_2, \\ x_3z_0 = z_1x_3 = -z_4x_4,\, x_4z_0 = z_3x_3 = -z_2x_4, \\ y_1z_4 = z_3y_2,\, y_2z_3 = z_4y_1,\, y_1z_1 = z_2y_1,\, y_2z_2 = z_1y_2, \\ z_4z_3 = -z_1^2,\, z_3z_4 = -z_2^2, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$z_3z_1 + z_2z_3 = \begin{cases} y_1y_2y_1, & \text{если } k = 2, \\ 0, & \text{если } k > 2; \end{cases} \tag{1.5}$$

$$z_4z_2 + z_1z_4 = \begin{cases} y_2y_1y_2, & \text{если } k = 2, \\ 0, & \text{если } k > 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Через $\mathcal{E}_3$ обозначим K-алгебру, определяемую колчаном $\Re_3$ с соотношениями (1.4)–(1.6), и с градуировкой, наследуемой с алгебры $K[\Re_3]$.

Теорема 1.3. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2^k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}_3$.*

2. Резольвенты

2.1. Серия $SD(2\mathcal{A})_1$. Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1^{k,c}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $c \in K$.

Введем сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры путей $K[Q^{(2\mathcal{A})}]$ колчана $Q^{(2\mathcal{A})}$ (а также для их канонических образов в R):

$$a = (\alpha\gamma\beta)^{k-1},\ b = (\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ g = (\gamma\beta\alpha)^{k-1},\quad \widetilde{\alpha} = \alpha - c \cdot g\gamma\beta. \tag{2.1}$$

Как легко видеть, модули P_0 и P_1 имеют следующие K-базисы:

$$\begin{aligned} P_0 = {}_K\langle & e_0, \alpha, \beta\alpha, \gamma\beta\alpha, \alpha(\gamma\beta\alpha), \ldots, \alpha \cdot g, \beta\alpha \cdot g, (\gamma\beta\alpha)^k, \\ & \beta, \gamma\beta, \alpha\gamma\beta, \beta(\alpha\gamma\beta), \ldots, \beta \cdot a, \gamma\beta \cdot a\rangle, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$P_1 = {}_K\langle e_1, \gamma, \alpha\gamma, \beta\alpha\gamma, \gamma(\beta\alpha\gamma), \ldots, \gamma \cdot b, \alpha\gamma \cdot b, (\beta\alpha\gamma)^k, \beta\gamma\rangle;$$

в частности, $\dim_K P_0 = 6k$, $\dim_K P_1 = 3k + 2$.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(1)}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\alpha"'] & \cdots \arrow[d, "\alpha"'] & \cdots \arrow[d, "\alpha"'] & \cdots \arrow[d, "\alpha"'] & \\
P_0 \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\alpha\gamma"'] & \cdots \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] \\
P_0 \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "-g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "-g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\alpha"'] & P_1 \arrow[l, "-b\cdot\beta"'] \arrow[d, "\beta\gamma"'] & \\
P_0 \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] \arrow[d, "\alpha\gamma"'] & P_0 \arrow[l, "g\cdot\gamma\beta"'] & P_1 \arrow[l, "\beta"'] & \\
P_0 \arrow[d, "\alpha"'] & P_1 \arrow[l, "-b\cdot\beta"'] \arrow[d, "\beta\gamma"'] & & & \\
P_0 & P_1 \arrow[l, "\beta"'] & & & .
\end{tikzcd}
\tag{2.3}
$$

Предложение 2.1. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{A})_1$. *Тотализация* $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(B^{(1)}_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B^{(1)}_{\bullet\bullet}$ *из* (2.3) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S_0.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса (см., напр., [13, стр.142]):

$$E^2_{pq} = H^h_p H^v_q (B^{(1)}_{\bullet\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(B^{(1)}_{\bullet\bullet})). \tag{2.4}$$

Мы докажем, что уже второй лист этой спектральной последовательности вырождается.

Сначала рассмотрим строки первого листа этой спектральной последовательности, имеющие (положительные) нечетные номера; такие строки содержат только модули вида $\mathrm{Ker}\,\alpha/\mathrm{Im}\,\widetilde{\alpha}$ и $\mathrm{Ker}(\beta\gamma)/\mathrm{Im}(\alpha\gamma)$. Непосредственно проверяется, что $\mathrm{Im}\,\widetilde{\alpha}$ имеет следующий K-базис:

$$\{\widetilde{\alpha}, \beta\alpha, \gamma\beta\alpha, \ldots, (\gamma\beta\alpha)^k\},$$

и, таким образом,

$$\dim \mathrm{Im}\,\widetilde{\alpha} = 3k = \dim \mathrm{Ker}\,\widetilde{\alpha}.$$

Аналогично получаем, что

$$\dim \operatorname{Im} \alpha = 3k = \dim \operatorname{Ker} \alpha.$$

Так как $\alpha\widetilde{\alpha} = 0$, то $\operatorname{Ker} \alpha / \operatorname{Im} \widetilde{\alpha} = 0$. Также непосредственно получаем, что

$$\operatorname{Ker}(\beta\gamma) = \langle \alpha\gamma, \beta\alpha\gamma, \dots, (\beta\alpha\gamma)^k \rangle = \operatorname{Im}(\alpha\gamma),$$

и, следовательно, строки первого листа с нечетными номерами содержат только нулевые члены.

Так как $\widetilde{\alpha}\alpha = 0$, то $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \widetilde{\alpha}$, и, таким образом, в строках первого листа, имеющих четные положительные номера, ненулевые члены составляют последовательность следующего вида

$$\operatorname{Ker}(\alpha\gamma)/\operatorname{Im} \alpha \xleftarrow{\overline{g\gamma\beta}} \operatorname{Coker} \alpha \xleftarrow{\overline{\beta}} \operatorname{Coker}(\beta\gamma), \tag{2.5}$$

где $\overline{g\gamma\beta}$ и $\overline{\beta}$ – гомоморфизмы, индуцированные гомоморфизмами умножения на $g\gamma\beta$ и β соответственно. Легко проверяется, что члены последовательности (2.5) имеют следующие K-базисы:

$$\begin{aligned} \operatorname{Coker}(\beta\gamma) &= \langle \overline{e}_1, \overline{\gamma}, \overline{\alpha\gamma}, \overline{\beta\alpha\gamma}, \dots, \overline{g\gamma} \rangle, \\ \operatorname{Coker} \alpha &= \langle \overline{e}_0, \overline{\beta}, \overline{\gamma\beta}, \overline{\beta\alpha\gamma}, \dots, \overline{g\gamma\beta} \rangle, \\ \operatorname{Ker}(\alpha\gamma)/\operatorname{Im} \alpha &= \langle \overline{g\gamma\beta} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что последовательность (2.5) (дополненная с концов нулями) представляет собой короткую точную последовательность.

Наконец, строка с номером нуль на первом листе имеет вид

$$\operatorname{Coker} \alpha \xleftarrow{\overline{\beta}} \operatorname{Coker}(\beta\gamma),$$

и из предыдущих рассуждений следует, что $\operatorname{Coker} \overline{\beta} \simeq S_0$.

Таким образом, $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B^{(1)}_{\bullet\bullet})$ является проективной резольвентой модуля S_0, а ее минимальность следует из того, что по построению имеем $\operatorname{Im}(d^Q_m \colon Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. $\square$

Рассмотрим бикомплекс, состоящий из двух первых (ненулевых) столбцов бикомплекса (2.3) с номерами 0 и 1, и через $W_\bullet$ обозначим его тотализацию.

Следствие 2.2. *Имеет место следующая короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \longrightarrow W_\bullet \longrightarrow Q_\bullet \longrightarrow Q_\bullet[-4] \longrightarrow 0,$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает непосредственно из построения бикомплекса (2.3). □

Прямая проверка доказывает следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1$. Модуль S_1 Ω-периодичен с периодом 4 (т.е. $\Omega^4(S_1) \simeq S_1$), а его минимальная проективная резольвента имеет вид*

$$0 \longleftarrow S_1 \longleftarrow P_1 \overset{\gamma}{\longleftarrow} P_0 \overset{g\beta - a\alpha}{\longleftarrow} P_0 \overset{\beta}{\longleftarrow} P_1 \overset{(\beta\alpha\gamma)^k}{\longleftarrow} P_1 \overset{\gamma}{\longleftarrow} P_0 \longleftarrow \dots .$$

Следствие 2.4. *Группы расширений простых R-модулей имеют следующие размерности:*

а)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = 2\left[\frac{m+1}{4}\right] + 1;$$

б)

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_1) &= \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_0)\\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 (\operatorname{mod} 4),\\ 0 & \text{в остальных случаях};\end{cases}\end{aligned}$$

в)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \text{ или } 3 (\operatorname{mod} 4),\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

2.2. Серия $SD(2\mathcal{A})_2$. Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2^{k,c}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $c \in K$.

Для некоторых элементов алгебры R вновь введем сокращенные обозначения из (2.1).

Модуль P_0 допускает базис вида, указанного в (2.2), а модуль P_1 имеет следующий базис:

$$P_1 = {}_K\langle e_1, \gamma, \alpha\gamma, \beta\alpha\gamma, \gamma(\beta\alpha\gamma), \dots, \gamma \cdot b, \alpha\gamma \cdot b, (\beta\alpha\gamma)^k\rangle,$$

и таким образом, $\dim_K P_0 = 6k$, $\dim_K P_1 = 3k + 1$.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(2)}$ (вновь строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \cdots \arrow[d, "\gamma\beta"'] & \cdots \arrow[d, "\gamma\beta\alpha"'] \\
 & & P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\cdot\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\cdot\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-g"'] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] \\
 & & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "a\cdot\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "a\cdot\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \\
 & P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-a\cdot\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-g"'] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & & \\
 & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "a\cdot\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & & \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[l, "-g\cdot\gamma"'] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & & & & \\
P_0 & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & & & &
\end{tikzcd}
\qquad (2.6)
$$

Предложение 2.5. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$. Тотализация $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet}^{(2)})$ бикомплекса $B_{\bullet\bullet}^{(2)}$ из (2.6) представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S_0.*

Доказательство. Вновь воспользуемся спектральной последовательностью (2.4) (в которой вместо бикомплекса $B_{\bullet\bullet}^{(1)}$ подставляется бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(2)}$). На первом листе этой спектральной последовательности строка с номером $2l$, $l \geqslant 2$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&0 \leftarrow \mathrm{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}\beta \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \mathrm{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \mathrm{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \cdots \\
&\xleftarrow{\overline{a\alpha}} \mathrm{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \mathrm{Ker}(\gamma\beta\alpha)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \\
&\mathrm{Coker}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{Coker}\,\widetilde{\alpha} \leftarrow 0,
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

где фактормодуль $\mathrm{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta)$ входит $l-2$ раза. Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}\beta = \langle\overline{\beta\alpha\cdot g}\,\rangle,\\
&\operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) = \langle\overline{\beta},\overline{\beta\alpha\cdot g}\rangle,\\
&\operatorname{Ker}(\gamma\beta\alpha)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) = \langle\overline{\beta},\overline{\alpha\cdot g},\overline{\beta\alpha\cdot g}\,\rangle,\\
&\operatorname{Coker}(\gamma\beta) = \langle\overline{e_0},\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\beta\alpha},\overline{\gamma\beta\alpha},\dots,\overline{\beta\alpha\cdot g}\,\rangle,\\
&\operatorname{Coker}(\widetilde{\alpha}) = \langle\overline{e_0},\overline{\beta},\overline{\gamma\beta},\dots,\overline{\beta\cdot a}\,\rangle.
\end{aligned}$$

Отсюда легко следует, что последовательность (2.7) точна во всех членах.

Далее, нечетная строка на первом листе с номером $2l{+}1$, $l>0$, имеет вид

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow \operatorname{Ker}\beta \xleftarrow{\overline{a\alpha\gamma}} \operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{a\alpha}} \cdots\\
\xleftarrow{\overline{a\alpha}} \operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{g}} \operatorname{Ker}\widetilde{\alpha}/\operatorname{Im}(\gamma\beta\alpha) \leftarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где фактормодуль $\operatorname{Ker}(\gamma\beta)/\operatorname{Im}(\gamma\beta)$ входит l раз. При этом

$$\operatorname{Ker}\beta = \langle(\beta\alpha\gamma)^k\,\rangle,\quad \operatorname{Ker}\widetilde{\alpha}/\operatorname{Im}(\gamma\beta\alpha) = \langle\overline{\beta\alpha}\,\rangle,$$

и аналогично предыдущему получаем, что последовательность (2.8) точна.

Наконец, на первом листе рассматриваемой спектральной последовательности строки с номерами 0, 1, 2 имеют следующий вид

$$\operatorname{Coker}\beta \xleftarrow{\overline{\alpha}} \operatorname{Coker}\widetilde{\alpha}, \tag{2.9}$$

$$0 \longleftarrow \operatorname{Ker}\beta \xleftarrow{\overline{g\gamma}} \operatorname{Ker}\widetilde{\alpha}/\operatorname{Im}(\gamma\beta\alpha) \longleftarrow 0, \tag{2.10}$$

$$0 \longleftarrow \operatorname{Ker}(\gamma\beta\alpha)/\operatorname{Im}\beta \xleftarrow{\overline{a\cdot\alpha}} \operatorname{Coker}(\gamma\beta) \xleftarrow{\overline{\alpha}} \operatorname{Coker}\widetilde{\alpha} \longleftarrow 0, \tag{2.11}$$

соответственно. Как и выше, легко доказывается точность последовательностей (2.10) и (2.11), а также то, что в нулевой строке (2.9) $\overline{\alpha}$ – мономорфизм с $\operatorname{Coker}\overline{\alpha} \simeq S_0$. Теперь доказательство завершается аналогично доказательству предложения 2.1. $\square$

Предложение 2.6. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$. R-модуль S_1 Ω-периодичен с периодом 3, а его минимальная проективная резольвента имеет вид*

$$0 \longleftarrow S_1 \longleftarrow P_1 \xleftarrow{\gamma} P_0 \xleftarrow{\beta} P_1 \xleftarrow{(\beta\alpha\gamma)^k} P_1 \xleftarrow{\gamma} P_0 \longleftarrow \dots .$$

Доказательство состоит в прямой проверке, и проделать это предоставляется читателю.

Следствие 2.7. *Для размерностей групп расширений простых R-модулей выполняются следующие соотношения:*
а) *для* $0 \leqslant m \leqslant 4$

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = 1;$$

при $m > 4$

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) - \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-4}(S_0, S_0)\\ = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 1, 4, 7 \text{ или } 10 \pmod{12},\\ 1 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_1) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_0)\\ = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod 3,\\ 0 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}\end{aligned}$$

в)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 1 \pmod 3,\\ 1 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

2.3. Серия $SD(3\mathcal{A})_2$**.** Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2^k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Введем сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры R:

$$g = (\gamma\beta)^{k-1}, d = (\delta\eta)^{k-1}.$$

R-модули P_i, $i = 0, 1, 2$, допускают следующие K-базисы:

$$\begin{aligned}P_0 = {}_K\langle e_0, \gamma, \delta, \beta\gamma, \gamma\beta\gamma, \delta\beta\gamma, (\beta\gamma)^2, \gamma(\beta\gamma)^2, \delta(\beta\gamma)^2, \dots,\\ (\beta\gamma)^{k-1}, \gamma(\beta\gamma)^{k-1}, \delta(\beta\gamma)^{k-1}, (\beta\gamma)^k\rangle,\\ P_1 = {}_K\langle e_1, \beta, \gamma\beta, \delta\beta, \beta\gamma\beta, (\gamma\beta)^2, \delta\beta\cdot\gamma\beta, \beta(\gamma\beta)^2, \dots,\\ (\gamma\beta)^{k-1}, \delta\beta(\gamma\beta)^{k-2}, \beta(\gamma\beta)^{k-1}, (\gamma\beta)^k\rangle,\\ P_2 = {}_K\langle e_2, \eta, \delta\eta, \gamma\eta, \eta\delta\eta, (\delta\eta)^2, \gamma\eta\cdot\delta\eta, \eta(\delta\eta)^2, \dots,\\ (\delta\eta)^{k-1}, \gamma\eta(\delta\eta)^{k-2}, \eta(\delta\eta)^{k-1}, (\delta\eta)^k\rangle;\end{aligned}$$

в частности, $\dim_K P_0 = 3k + 1$, $\dim_K P_1 = 3k = \dim_K P_2$.

Для построения минимальной проективной резольвенты простого R-модуля S_1 введем в рассмотрение следующие гомоморфизмы между проективными R-модулями:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ -\eta \end{pmatrix} : P_0 \to P_1 \oplus P_2,$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \gamma\beta & \delta\beta \\ -\gamma\eta & -\delta\eta \end{pmatrix} : P_1 \oplus P_2 \to P_1 \oplus P_2,$$

$$\rho_1 = (\gamma\beta \quad \delta\beta)\colon P_1 \oplus P_2 \to P_1, \qquad \rho_2 = (\gamma\eta \quad \delta\eta)\colon P_1 \oplus P_2 \to P_2,$$

$$\sigma_0 = (-g\gamma \quad 0)\colon P_1 \oplus P_2 \to P_0, \quad \sigma_0' = (0 \quad -d\delta)\colon P_1 \oplus P_2 \to P_0,$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} : P_1 \to P_1 \oplus P_2, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} : P_2 \to P_1 \oplus P_2,$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : P_1 \oplus P_2 \to P_1 \oplus P_2,$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : P_1 \oplus P_2 \to P_1 \oplus P_2.$$

Введем также сокращенное обозначение $L = P_1 \oplus P_2$.

Теперь построим бикомплекс $B^{(3)}_{\bullet\bullet}$ из (2.13); вновь строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$ (на рисунке бикомплекс “разрезан” по вертикали правее столбца с номером 5). Как и в предыдущих случаях, легко проверяется, что диаграмма (2.13) действительно представляет собой бикомплекс (в частности, это означает антикоммутативность всех квадратов этой диаграммы).

Предложение 2.8. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. Тотализация $\mathrm{Tot}(B^{(3)}_{\bullet\bullet})$ бикомплекса $B^{(3)}_{\bullet\bullet}$ из* (2.13) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S_1.*

Доказательство. Рассмотрим другой вариант спектральной последовательности бикомплекса (ср. (2.4)):

$$E^2_{pq} = H^v_p H^h_q(B^{(3)}_{\bullet\bullet}) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(B^{(3)}_{\bullet\bullet})) \tag{2.12}$$

и докажем, что вырождается второй лист этой спектральной последовательности. На сей раз мы должны исследовать последовательности, которые образуют столбцы ее первого листа.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \arrow[d, "\sigma_2"'] & \\
 & & & P_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "-\tau_1"'] & \cdots \arrow[l, "\rho"'] \\
 & B^{(3)}_{6,6} \arrow[d, equal] & P_2 \arrow[d, "\sigma_2"'] & L \arrow[l, "\rho_2"'] \arrow[d, "\tau_2"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "-\tau_2"'] & \cdots \arrow[l, "\rho"'] \\
 & P_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "-\tau_1"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\tau_1"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "-\tau_1"'] & \cdots \arrow[l, "\rho"'] \\
{} & L \arrow[l, "\rho_2"'] \arrow[d, "\tau_2"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "-\tau_2"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\tau_2"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\sigma_0'"'] & \cdots \arrow[l, "\rho"'] \\
{} & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\tau_1"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\sigma_0"'] & L \arrow[l, "\rho"'] & P_0 \arrow[l, "\rho_0"'] & \\
{} & L \arrow[l, "\rho"'] & P_0 \arrow[l, "\rho_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\tag{2.13}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & P_2 \arrow[d, "\sigma_2"'] \\
 & & & & P_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "-\tau_1"'] \\
 & & & P_2 \arrow[d, "\sigma_2"'] & L \arrow[l, "\rho_2"'] \arrow[d, "\tau_2"'] & L \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\sigma_0'"'] \\
 & & P_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "\sigma_0"'] & L \arrow[l, "\rho"'] & P_0 \arrow[l, "\rho_0"'] \arrow[d, equal] \\
 & P_2 \arrow[d, "d\delta"'] & L \arrow[l, "\rho_2"'] & P_0 \arrow[l, "\rho_0"'] & & B^{(3)}_{5,2} \\
P_1 & P_0 \arrow[l, "\beta"'] & & & & .
\end{tikzcd}
$$

Столбцы с номерами $4l$, $l > 0$, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
0 \leftarrow \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho_0 \xleftarrow{\overline{\tau_2}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{\overline{\tau_1}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{\overline{\tau_2}} \dots \\
\xleftarrow{\overline{\tau_1}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{\overline{\tau_2}} \operatorname{Ker}\rho_2/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{\overline{\sigma_1}} \operatorname{Coker}\rho_1 \leftarrow 0,
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

где модуль $\operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho$ входит $2l-2$ раза. Члены этой последовательности допускают следующие K-базисы:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho_0 = \langle\,\overline{(0,\eta d)}\,\rangle,\\
&\operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho = \langle\,\overline{(\beta,-\eta)},\overline{(\beta g,0)}\,\rangle,\\
&\operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho_2 = \langle\,\overline{(\beta,-\eta)},\overline{(g,0)},\overline{(\beta g,0)}\,\rangle,\quad \operatorname{Coker}\rho_1 = \langle\,\overline{e}_1,\overline{\beta}\,\rangle.
\end{aligned}
$$

и теперь легко получаем, что последовательность (2.14) точна.

Аналогично доказывается точность столбцов с номерами $4l+2$, $l>0$.

Столбцы с номерами $4l+1$, $l>0$, имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
0\leftarrow \operatorname{Ker}\rho_0 \xleftarrow{\overline{\sigma_0'}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{-\overline{\tau_1}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{-\overline{\tau_2}} \dots\\
\xleftarrow{-\overline{\tau_2}} \operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{-\overline{\tau_1}} \operatorname{Ker}\rho_1/\operatorname{Im}\rho \xleftarrow{\overline{\sigma_2}} \operatorname{Coker}\rho_2 \leftarrow 0,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

где модуль $\operatorname{Ker}\rho/\operatorname{Im}\rho$ входит $2l-1$ раз. Здесь

$$
\operatorname{Ker}\rho_0 = \langle(\beta\gamma)^k\,\rangle,\quad \operatorname{Ker}\rho_1/\operatorname{Im}\rho = \langle\overline{(\beta,-\eta)},\overline{(0,d)},\overline{(0,\eta d)}\,\rangle,
$$

и аналогично предыдущему получаем, что последовательность (2.15) точна. С помощью таких же рассуждений доказывается точность столбцов с номерами $4l+3$, $l\geqslant 0$.

Наконец, для столбцов с номерами 0, 1 и 2 необходимые утверждения с учетом предыдущих вычислений получаются непосредственно. $\square$

Замечание 2.9. Исходя из симметрии в описании алгебр $SD(3\mathcal{A})_2$ (см. соотношения (1.3)), можно построить бикомплекс, тотализация которого приводит к минимальной проективной резольвенте R-модуля S_2. Мы не будем выписывать этот бикомплекс явно, хотя он будет использоваться в последующих вычислениях.

Предложение 2.10. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. R-модуль S_0 Ω-периодичен с периодом 3, а его минимальная проективная резольвента имеет вид*

$$
0\longleftarrow S_0 \longleftarrow P_0 \xleftarrow{(\gamma,\delta)} P_1\oplus P_2 \xleftarrow{\rho_0} P_0 \xleftarrow{(\beta\gamma)^k} P_0 \xleftarrow{(\gamma,\delta)} P_0 \longleftarrow \dots .
$$

Доказательство этого утверждения состоит в прямой проверке.

Следствие 2.11. *Для размерностей групп расширений простых R-модулей выполняются следующие соотношения:*
а) *для $m \geqslant 3$ и $i = 1, 2$*

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_i) - \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-3}(S_i, S_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \text{ или } 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

б) *для $m \geqslant 3$*

$$\begin{aligned} \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_2) - \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-3}(S_1, S_2) \\ = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_2, S_1) - \dim_K \operatorname{Ext}_R^{m-3}(S_2, S_1) \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \end{aligned}$$

в) *для $i = 1, 2$*

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_i) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_0) \begin{cases} 1 & \text{если } m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

г)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. а) Из строения бикомплекса (2.13) усматриваем, что для $m \geqslant 12$

$$Q_m \simeq Q_{m-12} \oplus L^2.$$

Поэтому достаточно проверить требуемое утверждение при $m < 12$, а это делается непосредственно.

Остальные утверждения следствия доказываются аналогично. $\square$

Замечание 2.12. Пусть $B_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс вида (2.3) или аналогичный ему бикомплекс. В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении m-го члена минимальной проективной резольвенты $Q_m(S_k) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ простого модуля S_k по возрастанию второго индекса j (ср. [1]). Через $d_m^{(k)}\colon Q_{m+1}(S_k) \to Q_m(S_k)$ обозначаем дифференциал в резольвенте $Q_\bullet(S_k)$.

3. Образующие для алгебр Йонеды

В этом разделе мы укажем (конечные) множества образующих алгебр Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \bigoplus_{i,j\in V(Q)} \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$$

для алгебр из рассматриваемых серий (здесь $V(Q)$ – множество вершин колчана Q алгебры R).

Напомним следующую интерпретацию произведения Йонеды в $\mathcal{Y}(R)$ (ср. [1]). Пусть $Q_\bullet(S_i)$ – минимальная проективная резольвента простого R-модуля S_i. Ввиду изоморфизма

$$\mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \mathrm{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$$

любой элемент $f \in \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ можно представить соответствующим гомоморфизмом $\widetilde{f}\colon \Omega^m(S_i) \to S_j$. При этом $\widetilde{f}$ продолжается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_l\colon Q_{m+l}(S_i) \to Q_l(S_j)\}_{l\geqslant 0}$. В свою очередь $\widehat{f} = \varphi_0$ однозначно определяет гомоморфизм $\widetilde{f}$. Гомоморфизм φ_l назовем l-ой трансляцией элемента f и будем обозначать через $\mathrm{T}^i(f)$ или $\mathrm{T}^i(\widehat{f})$. Тогда произведение Йонеды элементов $f \in \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ и $g \in \mathrm{Ext}_R^n(S_j, S_t)$ определяется отображением $(g \cdot f)\widehat{} = \widehat{g} \cdot \mathrm{T}^n(\widehat{f})$.

3.1. Серия $SD(2\mathcal{A})_1$. Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1^{k,c}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $c \in K$. Введем в рассмотрение следующие гомоморфизмы, представляющие соответствующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_1 = (0\,,\,1)\colon Q_1(S_0) = P_1 \oplus P_0 \to P_0, && x_1 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_0);\\
&\widehat{x}_2 = (1\,,\,0)\colon Q_1(S_0) = P_1 \oplus P_0 \to P_1, && x_2 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_1);\\
&\widehat{x}_3 = \mathrm{id}\colon Q_1(S_1) = P_0 \to P_0, && x_3 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_1, S_0);\\
&\widehat{y}_1 = (1\,,\,0)\colon Q_2(S_0) = P_1 \oplus P_0 \to P_1, && y_1 \in \mathrm{Ext}_R^2(S_0, S_1);\\
&\widehat{y}_2 = \mathrm{id}\colon Q_2(S_1) = P_0 \to P_0, && y_2 \in \mathrm{Ext}_R^2(S_1, S_0);\\
&\widehat{z}\ = (1\,,\,0)\colon Q_3(S_0) = P_0^2 \to P_0, && z\ \in \mathrm{Ext}_R^3(S_0, S_0);\\
&\widehat{t}_1 = (1,0,0)\colon Q_4(S_0) = P_0^3 \to P_0, && t_1 \in \mathrm{Ext}_R^4(S_0, S_0);\\
&\widehat{t}_2 = \mathrm{id}\colon Q_4(S_1) = P_1 \to P_1, && t_2 \in \mathrm{Ext}_R^4(S_1, S_1).
\end{aligned}$$

Предложение 3.1. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1$. Для множества элементов алгебры $\mathcal{Y}(R)$*

$$\mathcal{X}_1 = \{x_i \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{y_j, t_j \mid j = 1, 2\} \cup \{z\} \tag{3.1}$$

выполняются соотношения (1.1).

Доказательство. Мы докажем только соотношение

$$zx_1 + x_1 z = -c \cdot x_1^4.$$

Остальные соотношения проверяются аналогично, и мы предоставляем читателю проделать соответствующие вычисления. Поскольку

$$(zx_1)\widehat{\ } = \widehat{z} \cdot \mathrm{T}^3(\widehat{x}_1), \tag{3.2}$$

$$(x_1 z)\widehat{\ } = \widehat{x}_1 \cdot \mathrm{T}^1(\widehat{z}), \tag{3.3}$$

$$(x_1^4)\widehat{\ } = \widehat{x}_1 \cdot \mathrm{T}^1(\widehat{x}_1) \cdot \mathrm{T}^2(\widehat{x}_1) \cdot \mathrm{T}^3(\widehat{x}_1), \tag{3.4}$$

то нам необходимо вычислить трансляции указанных выше отображений. Последовательный подъём этих отображений вдоль найденных ранее минимальных проективных резольвент простых R-модулей (см. предложения 2.1 и 2.3) даёт

$$\mathrm{T}^1(\widehat{x}_1) = \begin{pmatrix} -b & -c \cdot g\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Q_2(S_0) \to Q_1(S_0),$$

$$\mathrm{T}^2(\widehat{x}_1) = \begin{pmatrix} -\gamma & -c \cdot \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Q_3(S_0) \to Q_2(S_0),$$

$$\mathrm{T}^3(\widehat{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -c \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : Q_4(S_0) \to Q_3(S_0),$$

$$\mathrm{T}^1(\widehat{z}) = \begin{pmatrix} g\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : Q_4(S_0) \to Q_1(S_0);$$

напомним, что мы описываем приведенные выше отображения с помощью матриц, соответствующих фиксированным прямым разложениям модулей $Q_m(S_i)$ (см. замечание 2.12). Отсюда следует, что композиции из (3.2), (3.3) и (3.4) описываются матрицами $(0\ \ -1\ \ -c \cdot 1)$, $(0\,1\,0)$ и $(0\,0\,1)$ соответственно, и требуемое соотношение получается непосредственно. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1$. Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext-*группы имеют следующие базисы:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_0) = \langle x_1\rangle, && \mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_1) = \langle x_2\rangle,\\ &\mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_0) = \langle x_3\rangle, && \mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0) = \langle x_1^2\rangle,\\ &\mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_1) = \langle y_1\rangle, && \mathrm{Ext}^2_R(S_1,S_0) = \langle y_2\rangle,\\ &\mathrm{Ext}^3_R(S_0,S_0) = \langle z, x_1^3\rangle, && \mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_1) = \langle y_1x_3\rangle,\\ &\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_0) = \langle t_1, x_1z, x_1^4\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_1,S_1) = \langle t_2\rangle,\\ &\mathrm{Ext}^5_R(S_0,S_0) = \langle x_1t_1, x_1^2z, x_1^5\rangle. && \end{aligned}$$

Доказательство. В некоторых случаях требуемые равенства следуют непосредственно из определения элементов множества $\mathcal{X}_1$ из (3.1). В других случаях это делается с помощью вычислений, использующих подходящие трансляции отображений (ср. доказательство предложения 3.1). Мы проиллюстрируем это, проверив равенство, включающее группу $\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_0)$. Детали остальных вычислений мы предоставляем провести читателю.

Используя некоторые трансляции, вычисленные в доказательстве предложения 3.1, получаем:

$$\widehat{t_1} = (1,0,0), \quad (x_1z)\widehat{\ } = (0,1,0), \quad (x_1^4)\widehat{\ } = (0,0,1),$$

и, таким образом, $\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_0) = \langle t_1, x_1z, x_1^4\rangle$. □

Предложение 3.3. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1$. Множество $\mathcal{X}_1$ из* (3.1) *порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Ввиду минимальности проективной резольвенты $Q_\bullet(S_i)$ имеем

$$\mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q_m(S_i),S_j),$$

и потому любому однородному элементу алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ соответствует некоторое отображение $f\colon Q_m(S_i)\to S_j$, $i,j\in\{0,1\}$. Используя предложение 3.2 и следствие 2.4, можем считать, что $m>4$. Индукцией по m докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней. Кроме того, достаточно рассмотреть случай, когда $f(B^{(1)}_{n,m-n})\neq 0$ ровно для одного значения n.

Если $j = 1$, то умножение на t_2 задает изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_R^{m-4}(S_i, S_1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_1),$$

и мы можем применить индуктивное предположение. Аналогичное рассуждение применимо к случаю, когда $i = 1$.

Теперь предположим, что $i = j = 0$, и упростим обозначения, полагая

$$Q_l = Q_l(S_0),\ d_l = d_l^{(0)} \quad (l \geqslant 0). \tag{3.5}$$

Используя последнее соотношение из предложения 3.2, можем считать, что сейчас $m > 5$. Ввиду следствия 2.2 имеем $Q_m = Q_{m-4} \oplus W_m$, где $W_m = P_0^2$.

В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса (2.3), в которую включается модуль $B_{n,m-n}^{(1)}$, мы будем строить коммутативные квадраты вида

$$\begin{tikzcd} Q_{m+1} \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & Q_m \arrow[d, "\varphi_0"'] \\ Q_{l+1} \arrow[r, "d_l"] & Q_l\,, \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

такие, что $l < m$ и $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subset \operatorname{Ker} f$. Тогда найдется гомоморфизм $f'\colon Q_l \longrightarrow S_0$, для которого $f'\varphi_0 = f$. Так как R – QF-алгебра, то $\varphi_0 = \mathrm{T}^l(\tilde\varphi)$ для некоторого $\tilde\varphi\colon Q_{m-l} \longrightarrow S_0$. Применяя индуктивное предположение к f' и $\tilde\varphi$, получаем требуемое утверждение.

Случай 1. Предположим, что f обращается в нуль на W_m (т.е. $f(B_{n,m-n}^{(1)}) \neq 0$ для $n > 1$). Из следствия 2.2 вытекает, что имеется коммутативный квадрат вида (3.6), в котором $l = m - 4$, а $\varphi_i = \pi_{m+i}$ $(i \in \{0, 1\})$. Поскольку при этом $\operatorname{Ker}\pi_m = W_m \subset \operatorname{Ker} f$, то доказательство завершается с помощью приведенного выше рассуждения.

Случай 2. Предположим, что $f(B_{0,m}^{(1)}) \neq 0$.

а) Пусть, кроме того, m нечетно. В этом случае строим диаграмму (3.6), в которой $l = 1$, в качестве φ_0 берем композицию проекции на последние два прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_m и отображения из $B_{1,m-1}^{(1)} \oplus B_{0,m}^{(1)} \simeq P_0^2$ в $Q_1 \simeq P_1 \oplus P_0$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} g\gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве φ_1 берем композицию проекции на последние два прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_{m+1} и отображения из $B_{1,m}^{(1)} \oplus B_{0,m+1}^{(1)} \simeq P_0^2$ в $Q_2 \simeq P_1 \oplus P_0$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

б) Пусть теперь m четно. Тогда строим диаграмму (3.6) с $l = 2$, в которой в качестве φ_0 берем композицию проекции на последние два прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_m и отображения из $B_{1,m-1}^{(1)} \oplus B_{0,m}^{(1)} \simeq P_0^2$ в $Q_2 = P_1 \oplus P_0$, определяемого матрицей из (3.7), а в качестве φ_1 – проекцию на последние два прямых слагаемых $B_{1,m}^{(1)} \oplus B_{0,m+1}^{(1)} \simeq P_0^2 = Q_3$ из канонического разложения модуля Q_{m+1}.

Случай 3. Пусть $f(B_{1,m-1}^{(1)}) \neq 0$. Если m четно, то поступаем аналогично случаю 2 а), заменяя лишь проекцию модуля Q_m на $B_{1,m-1}^{(1)} \oplus B_{0,m}^{(1)}$ проекцией $Q_m \to B_{2,m-2}^{(1)} \oplus B_{1,m-1}^{(1)}$, а проекцию модуля Q_{m+1} на $B_{1,m}^{(0)} \oplus B_{0,m+1}^{(0)}$ – проекцией $Q_{m+1} \to B_{2,m-1}^{(1)} \oplus B_{1,m}^{(1)}$. Если же m нечетно, то поступаем аналогично случаю 2 б), "сдвигая", как и выше, область значений проекций на одну компоненту. □

3.2. Серия $SD(2\mathcal{A})_2$. Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2^{k,c}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $c \in K$. Введем в рассмотрение следующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_1 = (1\,,\,0)\colon Q_1(S_0) = P_0 \oplus P_1 \to P_0, && x_1 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_0);\\
&\widehat{x}_2 = (0\,,\,1)\colon Q_1(S_0) = P_0 \oplus P_1 \to P_1, && x_2 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_1);\\
&\widehat{x}_3 = \mathrm{id}\colon Q_1(S_1) = P_0 \to P_0, && x_3 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_1, S_0);\\
&\widehat{z}_1 = \mathrm{id}\colon Q_3(S_0) = P_0 \to P_0, && z_1 \in \mathrm{Ext}_R^3(S_0, S_0);\\
&\widehat{z}_2 = \mathrm{id}\colon Q_3(S_1) = P_1 \to P_1, && z_2 \in \mathrm{Ext}_R^3(S_1, S_1);\\
&\widehat{t}\ = (1\,,\,0)\colon Q_4(S_0) = P_0 \oplus P_1 \to P_0, && t \in \mathrm{Ext}_R^4(S_0, S_0);\\
&\widehat{w}\ = (0\,,\,1)\colon Q_5(S_0) = P_0^2 \to P_0, && w \in \mathrm{Ext}_R^5(S_0, S_0).
\end{aligned}$$

Предложение 3.4. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$. Для множества элементов алгебры $\mathcal{Y}(R)$*

$$\mathcal{X}_2 = \{x_i \mid i = 1,2,3\} \cup \{z_j \mid j = 1,2\} \cup \{t, w\} \tag{3.8}$$

выполняются соотношения (1.2).

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 3.1.

Доказательство следующего утверждения также аналогично случаю $R = SD(2\mathcal{A})_1$ (ср. предложение 3.2).

Предложение 3.5. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{A})_2$. *Как* K*-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_0)=\langle x_1\rangle, && \mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_1)=\langle x_2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_0)=\langle x_3\rangle, && \mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0)=\langle x_1^2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^2_R(S_1,S_1)=\langle x_2x_3\rangle, && \mathrm{Ext}^3_R(S_0,S_0)=\langle z_1\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_1)=\langle z_2\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_0)=\langle t\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_1)=\langle x_2z_1\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_1,S_0)=\langle x_3z_2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^5_R(S_0,S_0)=\langle x_1t,w\rangle, && \mathrm{Ext}^5_R(S_1,S_1)=\langle x_2x_3z_2\rangle.
\end{aligned}$$

Предложение 3.6. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{A})_2$. *Множество* $\mathcal{X}_2$ *из* (3.8) *порождает алгебру Йонеды* $\mathcal{Y}(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $f\colon Q_m(S_i)\to S_j$, $i,j\in\{0,1\}$, представляющий некоторый элемент из $\mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j)$. Ввиду предложения 3.5 и следствия 2.7 можно считать, что $m>5$. Индукцией по m докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней.

Если $i=1$ или $j=1$, то, используя Ω-периодичность R-модуля S_1 (см. предложение 2.6), легко получаем требуемое утверждение (ср. доказательство предложения 3.3).

Пусть теперь $i=j=0$. Можно считать, что $f(B^{(2)}_{n,m-n})\neq 0$ ровно для одного значения n. Вновь используем сокращенные обозначения (3.5) и, как и в доказательстве предложения 3.3, будем строить коммутативные квадраты вида (3.6), в которых $l<m$ и $\operatorname{Ker}\varphi_0\subset\operatorname{Ker} f$. В зависимости от положения модуля $B^{(2)}_{n,m-n}$ в бикомплексе (2.6) могут встретиться следующие конфигурации:

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{ccc} P_0 & & \\ \big\downarrow{\scriptstyle\gamma\beta} & & \\ P_0 & \xleftarrow{\pm a\alpha} & P_0\,; \end{array} \qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{ccc} P_1 & & \\ \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\ P_0 & \xleftarrow{a\alpha} & P_0\,; \end{array} \qquad \text{(III)}\quad \begin{array}{c} P_0 \\ \big\downarrow{\scriptstyle\gamma\beta\alpha} \\ P_0\,; \end{array}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{array}{ccc} P_0 & & \\ {\scriptstyle\gamma\beta}\big\downarrow & & \\ P_0 & \xleftarrow{\ \alpha\ } & P_0\,; \end{array} \qquad \text{(V)}\quad \begin{array}{ccc} P_1 & & \\ {\scriptstyle\gamma\beta}\big\downarrow & & \\ P_0 & \xleftarrow{\ -g\ } & P_0\,; \end{array} \qquad \text{(VI)}\quad \begin{array}{c} P_0 \\ {\scriptstyle\widetilde{\alpha}}\big\downarrow \\ P_0\,. \end{array}$$

(на диаграммах изображаются все стрелки, входящие в соответствующий модуль $B^{(2)}_{n,m-n}$).

а) В случае конфигурации I мы строим диаграмму вида (3.6) в которой $l = 3$, в качестве φ_0 берем проекцию на прямое слагаемое $B^{(2)}_{n,m-n} \simeq Q_3$, а в качестве φ_1 берем композицию проекции модуля Q_{m+1} на прямые слагаемые $B^{(2)}_{n+1,m-n} \oplus B^{(2)}_{n,m+1-n} \simeq P_0^2$ и отображения, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

б) В случае конфигурации II (заметим, что сейчас $m = 3n$, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$) строим квадрат (3.6) с $l = 3$ и φ_0, построенным в части а) доказательства, а в качестве φ_1 берем проекцию $Q_{3n+1} \to B^{(2)}_{n+1,2n} \oplus B^{(2)}_{n,2n+1} \simeq Q_4$.

в) Рассмотрим конфигурацию III; заметим, что тогда $m = 4t+2, n = 2t+1$, где $t \in \mathbb{N}$. В этом случае строим квадрат (3.6), в котором $l = 2$ и φ_0 (соответственно φ_1) – проекция на прямое слагаемое $Q_{4t+2} \to B^{(2)}_{2t+1,2t+1} \simeq Q_2$ (соответственно $Q_{4t+3} \to B^{(2)}_{2t+1,2t+2} \simeq Q_3$).

г) В случае конфигурации IV имеем $m = 4t$, $n = 2t$, где $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2$. Тогда строим квадрат (3.6) с $l = 4$, а в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем композицию проекции на прямые слагаемые $Q_{4t} \to B^{(2)}_{2t,2t} \oplus B^{(2)}_{2t-1,2t+1}$ и отображения, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

(соответственно проекцию $Q_{4t+1} \to B^{(2)}_{2t+1,2t} \oplus B^{(2)}_{2t,2t+1} \simeq Q_5$).

д) Наконец, в случае конфигураций V и VI имеем $m = 4t+1$, где $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2$, а $n = 2t+1$ или $n = 2t$ соответственно. Тогда строим квадрат (3.6) с $l = 5$, а в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем проекцию на прямые слагаемые $Q_{4t+1} \to B^{(2)}_{2t+1,2t} \oplus B^{(2)}_{2t,2t+1} \simeq Q_5$ (соответственно проекцию $Q_{4t+2} \to B^{(2)}_{2t+1,2t+1} \oplus B^{(2)}_{2t,2t+2} \simeq Q_6$). $\square$

3.3. Серия $SD(3\mathcal{A})_2$. Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2^k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Введем в рассмотрение следующие гомоморфизмы, представляющие некоторые однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_1 = \mathrm{id}\colon Q_1(S_1) = P_0 \to P_0, && x_1 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_1, S_0);\\
&\widehat{x}_2 = \mathrm{id}\colon Q_1(S_2) = P_0 \to P_0, && x_2 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_2, S_0);\\
&\widehat{x}_3 = (1\,,\,0)\colon Q_1(S_0) = P_1 \oplus P_2 \to P_1, && x_3 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_0, S_1);\\
&\widehat{x}_4 = (0\,,\,1)\colon Q_1(S_0) = P_1 \oplus P_2 \to P_2, && x_4 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_0, S_2);\\
&\widehat{y}_1 = \mathrm{id}\colon Q_2(S_1) = P_2 \to P_2, && y_1 \in \mathrm{Ext}^2_R(S_1, S_2);\\
&\widehat{y}_2 = \mathrm{id}\colon Q_2(S_2) = P_1 \to P_1, && y_2 \in \mathrm{Ext}^2_R(S_2, S_1);\\
&\widehat{z}_0 = \mathrm{id}\colon Q_3(S_0) = P_0 \to P_0, && z_0 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_0, S_0);\\
&\widehat{z}_1 = (1\,,\,0)\colon Q_3(S_1) = P_1 \oplus P_2 \to P_1, && z_1 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_1, S_1);\\
&\widehat{z}_2 = (1\,,\,0)\colon Q_3(S_2) = P_2 \oplus P_1 \to P_2, && z_2 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_2, S_2);\\
&\widehat{z}_3 = (0\,,\,1)\colon Q_3(S_1) = P_1 \oplus P_2 \to P_2, && z_3 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_1, S_2);\\
&\widehat{z}_4 = (0\,,\,1)\colon Q_3(S_2) = P_2 \oplus P_1 \to P_1, && z_4 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_2, S_1).
\end{aligned}$$

Следующие два утверждения доказываются аналогично случаю алгебр серии $SD(2\mathcal{A})_1$ (ср. предложения 3.1 и 3.2).

Предложение 3.7. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. Для множества элементов алгебры $\mathcal{Y}(R)$*

$$\mathcal{X}_3 = \{x_i \mid i = 1, 2, 3\} \cup \{y_j \mid j = 1, 2\} \cup \{z_l \mid l = 0, 1, 2, 3, 4\} \tag{3.9}$$

выполняются соотношения (1.4)–(1.6).

Предложение 3.8. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие бази-*

сы:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_0)=\langle x_1\rangle, && \mathrm{Ext}^1_R(S_2,S_0)=\langle x_2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_1)=\langle x_3\rangle, && \mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_2)=\langle x_4\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^2_R(S_1,S_2)=\langle y_1\rangle, && \mathrm{Ext}^2_R(S_2,S_1)=\langle y_2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0)=\langle x_1x_3\rangle, && \mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_1)=\langle z_1\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^3_R(S_2,S_2)=\langle z_2\rangle, && \mathrm{Ext}^3_R(S_0,S_0)=\langle z_0\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_2)=\langle z_3\rangle, && \mathrm{Ext}^3_R(S_2,S_1)=\langle z_4\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^4_R(S_1,S_1)=\langle y_2y_1\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_2,S_2)=\langle y_1y_2\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_1)=\langle x_3z_0\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_1,S_0)=\langle z_0x_1\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^4_R(S_2,S_0)=\langle z_0x_2\rangle, && \mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_2)=\langle x_4z_0\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^5_R(S_1,S_1)=\langle y_2z_3\rangle, && \mathrm{Ext}^5_R(S_1,S_2)=\langle y_1z_1\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^5_R(S_0,S_0)=\langle x_1x_3z_0\rangle, && \mathrm{Ext}^5_R(S_2,S_2)=\langle y_1z_4\rangle,\\
&\mathrm{Ext}^5_R(S_2,S_1)=\langle y_2z_2\rangle.
\end{aligned}
$$

Предложение 3.9. *Пусть* $R=SD(3\mathcal{A})_2$. *Множество* $\mathcal{X}_3$ *из* (3.9) *порождает алгебру Йонеды* $\mathcal{Y}(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $f\colon Q_m(S_i)\to S_j$, $i,j\in\{0,1,2\}$, представляющий некоторый элемент из $\mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j)$. Ввиду предложения 3.8 можно считать, что $m>5$. Индукцией по m докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней.

Используя Ω-периодичность R-модуля S_0 (см. предложение 2.10), можем предполагать, что $i,j\in\{1,2\}$. Кроме того, ввиду симметрии в описании алгебр $SD(3\mathcal{A})_2$ (см. соотношения (1.3)) можем дополнительно считать, что $i=1$. Предполагаем также, что $f(B^{(3)}_{n,m-n})\neq 0$ ровно для одного значения n, где $B^{(3)}_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс из (2.13).

"Локальные" конфигурации в бикомплексе (2.13), в которые может быть включен модуль $B^{(3)}_{n,m-n}$, таковы (напомним, что $L=$

$P_1 \oplus P_2$):

$$\text{(I)}\quad P_1 \xleftarrow{\rho_1} L\,; \qquad \text{(II)}\quad P_2 \xleftarrow{\rho_2} L\,;$$

$$\text{(III)}\quad \begin{array}{ccc} P_1 & & \\ {\scriptstyle\sigma_1}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho} & L\,; \end{array} \qquad \text{(IV)}\quad \begin{array}{ccc} P_2 & & \\ {\scriptstyle\sigma_2}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho} & L\,; \end{array}$$

$$\text{(V)}\quad \begin{array}{ccc} L & & \\ {\scriptstyle\tau_1}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho_0} & P_0\,; \end{array} \qquad \text{(VI)}\quad \begin{array}{ccc} L & & \\ {\scriptstyle\tau_2}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho_0} & P_0\,; \end{array}$$

$$\text{(VII)}\quad \begin{array}{ccc} L & & \\ {\scriptstyle\pm\tau_1}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho} & L\,; \end{array} \qquad \text{(VIII)}\quad \begin{array}{ccc} L & & \\ {\scriptstyle\pm\tau_2}\big\downarrow & & \\ L & \xleftarrow{\rho} & L\,, \end{array}$$

(на диаграммах изображаются все стрелки, входящие в соответствующий модуль $B^{(3)}_{n,m-n}$).

Аналогично доказательству предложения 3.3 мы будем строить коммутативные квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} Q_{m+1}(S_1) & \xrightarrow{d^{(1)}_m} & Q_m(S_1) \\ {\scriptstyle\varphi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\big\downarrow \\ Q_{l+1}(S_r) & \xrightarrow{d^{(r)}_l} & Q_l(S_r)\,, \end{array} \tag{3.10}$$

$r \in \{1,2\}$, такие, что $l < m$ и $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subset \operatorname{Ker} f$.

а) Рассмотрим конфигурацию I; заметим, что тогда $m = 4t$, $n = 2t$, где $t \in \mathbb{N}, t \geqslant 2$. В этом случае мы строим диаграмму вида (3.10), в которой $l = 2$, $r = 2$, в качестве φ_0 берем проекцию на прямое слагаемое $Q_{4t}(S_1) \to B^{(3)}_{2t,2t} \simeq Q_2(S_2)$, а в качестве φ_1 берем композицию проекции на прямое слагаемое $Q_{4t+1}(S_1) \to B^{(3)}_{2t+1,2t}$ и отображения, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

б) В случае конфигурации II (заметим, что сейчас $m = 4t+2$, $n = 2t+1$, где $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2$) строим квадрат (3.10), в котором

$l=2$, $r=1$, а в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем проекцию на прямое слагаемое $Q_{4t+2}(S_1) \to B^{(3)}_{2t+1,2t+1} \simeq Q_2(S_1)$ (соответственно $Q_{4t+3}(S_1) \to B^{(3)}_{2t+2,2t+1} \simeq Q_3(S_1)$).

в) Рассмотрим конфигурацию III; заметим, что тогда $m = 4k+3, n = 2k+2$, где $k \in \mathbb{N}$. В этом случае строим квадрат (3.10), в котором $l=5$, $r=2$, φ_0 – композиция проекции на прямое слагаемое $Q_{4k+3}(S_1) \to B^{(3)}_{2k+2,2k+1}$ и отображения $B^{(3)}_{2k+2,2k+1} = P_1 \oplus P_2 \to Q_5(S_2) = P_2 \oplus P_1$, определяемого матрицей (3.11), а φ_1 – композиция проекции на прямые слагаемые $Q_{4k+4}(S_1) \to B^{(3)}_{2k+3,2k+1} \oplus B^{(3)}_{2k+2,2k+2}$ и отображения $B^{(3)}_{2k+3,2k+1} \oplus B^{(3)}_{2k+2,2k+2} = P_1 \oplus P_2 \oplus P_1 \to Q_6(S_2) = P_2 \oplus P_1 \oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

г) В случае конфигурации IV имеем $m = 4k+1$, $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Тогда строим квадрат (3.10), в котором $l=5$, $r=1$, а φ_0 (соответственно φ_1) – проекция на прямое слагаемое $Q_{4k+1}(S_1) \to B^{(3)}_{2k+1,2k} \simeq Q_5(S_1)$ (соответственно проекция на прямые слагаемые $Q_{4k+2}(S_1) \to B^{(3)}_{2k+2,2k} \oplus B^{(3)}_{2k+1,2k+1} \simeq Q_6(S_1)$).

д) В случае конфигурации V имеем $m = 6t+3$, $n = 4t+2$, где $t \in \mathbb{N}$. Тогда строим квадрат (3.10) с $l=3$, $r=1$, где в качестве φ_0 берем проекцию на прямое слагаемое $Q_{6t+3}(S_1) \to B^{(3)}_{4t+2,2k+1} \simeq Q_3(S_1)$, а в качестве φ_1 – композицию проекции $Q_{6t+4}(S_1) \to B^{(2)}_{4t+3,2t+1} \oplus B^{(2)}_{4t+2,2t+2}$ и отображения $B^{(2)}_{4t+3,2t+1} \oplus B^{(2)}_{4t+2,2t+2} = P_0 \oplus P_1 \oplus P_2 \to Q_4(S_1) = P_0 \oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

е) Рассмотрим конфигурацию VI; здесь $m = 6t$, $n = 4t$, где $t \in \mathbb{N}$. В этом случае строим квадрат (3.10), в котором $l=3$, $r=2$, φ_0 – композиция проекции $Q_{6t}(S_1) \to B^{(3)}_{4t,2t}$ и отображения $B^{(3)}_{4t,2t} = P_1 \oplus P_2 \to Q_3(S_2) = P_2 \oplus P_1$, определяемого матрицей (3.11), а φ_1 – композиция проекции $Q_{6t+1}(S_1) \to B^{(3)}_{4t+1,2t} \oplus B^{(3)}_{4t,2t+1}$

и отображения $B^{(3)}_{4t+1,2t}\oplus B^{(3)}_{4t,2t+1}=P_0\oplus P_1\oplus P_2\to Q_4(S_2)=P_0\oplus P_2$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

ж) В случае конфигурации VII строим квадрат (3.10), в котором $l=5$, $r=2$, φ_0 – композиция проекции $Q_m(S_1)\to B^{(3)}_{n,m-n}$ и отображения $B^{(3)}_{n,m-n}=P_1\oplus P_2\to Q_5(S_2)=P_2\oplus P_1$, определяемого матрицей (3.11), φ_1 – композиция проекции $Q_{m+1}(S_1)\to B^{(3)}_{n+1,m-n}\oplus B^{(3)}_{n,m-n+1}$ и отображения $B^{(3)}_{n+1,m-n}\oplus B^{(3)}_{n,m-n+1}=P_1\oplus P_2\oplus P_1\oplus P_2\to Q_6(S_2)=P_2\oplus P_1\oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&\pm1&0\end{pmatrix}.$$

з) Наконец, в случае конфигурации VIII строим квадрат (3.10) с $l=5$ и $r=1$, в качестве φ_0 берем проекцию $Q_m(S_1)\to B^{(3)}_{n,m-n}\simeq Q_5(S_1)$, а в качестве φ_1 – композицию проекции $Q_{m+1}(S_1)\to B^{(3)}_{n+1,m-n}\oplus B^{(3)}_{n,m-n+1}$ и отображения $B^{(3)}_{n+1,m-n}\oplus B^{(3)}_{n,m-n+1}=P_1\oplus P_2\oplus P_1\oplus P_2\to Q_6(S_1)=P_1\oplus P_2\oplus P_2$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&\pm1\end{pmatrix}.$$

$\square$

4. Завершение доказательств основных теорем

4.1. Серия $SD(2\mathcal{A})_1$**.** Пусть $R=SD(2\mathcal{A})_1$, и пусть $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_1=K[\Re_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1.1, где I_1 – идеал алгебры путей колчана $\Re_1$, соответствующий соотношениям (1.1). Через ε_i, $i=0,1$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\Re_1]$, соответствующие вершинам колчана $\Re_1$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Из предложений 3.1 и 3.3 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие стрелкам колчана $\Re_1$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале раздела 3.1. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.

Предложение 4.1. *Для любых* $i, j \in \{0, 1\}$ *и* $m \geqslant 0$

$$\dim_K(\varepsilon_i\mathcal{E}^m\varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i). \tag{4.1}$$

Доказательство. Поскольку для $m = 0$ соотношение (4.1) очевидно, то далее предполагаем, что $m > 0$.

а) Пусть $i = j = 0$. Из соотношений (1.1) следует, что $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ – K-алгебра, порожденная элементами

$$x = x_1,\ z,\ t = t_1,$$

при этом они удовлетворяют соотношениям:

$$xt = tx, \quad xz + zx = -cx^4, \quad zt = tz, \quad x^2t = z^2.$$

Отсюда легко получаем, что элементы

$$x^lt^r\ (l + 4r = m),\ x^lt^rz\ (l + 4r + 3 = m) \tag{4.2}$$

составляют K-базис пространства $\Lambda_m = \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Пусть $d_m = \dim_K \Lambda_m$. Докажем, что при $m \geqslant 4$ имеем:

$$d_m - d_{m-4} = 2. \tag{4.3}$$

Действительно, одночлены из (4.2), у которых $r > 0$, находятся в биективном соответствии с аналогичным K-базисом пространства Λ_{m-4} (достаточно опустить один множитель t). При этом для любого $m \geqslant 3$ имеется два одночлена из (4.2), у которых $r = 0$, а именно x^m и $x^{m-3}z$. Ввиду следствия 2.4 а) последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.3), и теперь соотношение (4.1) получается с помощью индукции по m, поскольку для $m \leqslant 3$ оно очевидно.

б) Пусть $i = j = 1$. Вновь из соотношений (1.1) получаем, что K-алгебра $\varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_1$ порождается элементами $\zeta = y_1x_3$ и t_2, удовлетворяющими соотношениям:

$$\zeta t_2 = t_2\zeta, \quad \zeta^2 = 0.$$

Ясно, что

$$\dim_K \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ m \equiv 0 \ \ \text{или} \ \ 3 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.1) вытекает из следствия 2.7в).

в) Пусть $i = 1$, $j = 0$. Любой одночлен f из $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0$ имеет вид

$$f = g \cdot x_2 \cdot h \ \ \text{или} \ \ f = g \cdot y_1 \cdot h, \tag{4.4}$$

где $g \in \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1$, $h \in \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Так как

$$t_2x_2 = x_2t_1, \ t_2y_1 = y_1t_1, \ x_3x_2 = x_3y_1 = 0,$$

то можно считать, что в (4.4) имеем $g = \varepsilon_1$. Кроме того, ввиду соотношений

$$x_2x_1 = x_2z = 0, \ y_1x_1 = y_1z = 0$$

получаем, что любой одночлен f из $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0$ приводится к виду $f = x_2t_1^j$ или $f = y_1t_1^j$, и следовательно,

$$\dim_K \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ m \equiv 1 \ \ \text{или} \ \ 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь соотношение (4.1) вытекает из следствия 2.4 б).

г) Пусть $i = 0$, $j = 1$. Аналогично части в) доказательства получаем, что любой одночлен f из $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0$ приводится к виду

$$f = t_1^j \cdot x_3 \ \ \text{или} \ \ f = t_1^j \cdot y_2.$$

Следовательно,

$$\dim_K \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если ,} \ \ m \equiv 1 \ \ \text{или} \ \ 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.1) вновь вытекает из следствия 2.4 б). □

Из доказательства теоремы 1.1 мы получаем следующее описание Ext-алгебр простых R-модулей.

Следствие 4.2. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_1$. Имеют место следующие изоморфизмы градуированных K-алгебр:*
а) $\mathcal{E}(S_0) \simeq K\langle x, z, t\rangle/(xt - tx, xz + zx + c \cdot x^4, zt - tz, x^2t - z^2)$, *где* $\deg x = 1$, $\deg z = 3$, $\deg t = 4$;
б) $\mathcal{E}(S_1) \simeq K[z, t]/(z^2)$, *где* $\deg z = 3$, $\deg t = 4$.

4.2. Серия $SD(2\mathcal{A})_2$. Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$, и пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_2$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1.2. Через ε_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие вершинам колчана $\Re_2$. Из предложений 3.4 и 3.6 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие стрелкам колчана $\Re_2$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$ (см. начало раздела 3.2). Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые.

Теперь теорема 1.2 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.3. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$. Для любых $i, j \in \{0, 1\}$ и $m \geqslant 0$*

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{E}^m \varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i). \tag{4.5}$$

Доказательство. Поскольку для $m = 0$ соотношение (4.5) очевидно, то далее предполагаем, что $m > 0$.

a) Пусть $i = j = 0$. Из соотношений (1.2) следует, что $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ – K-алгебра, порожденная элементами

$$x = x_1,\ z = z_1,\ t,\ w,$$

которые удовлетворяют соотношениям:

$$x^3 = 0,\quad xz = zx = 0,\quad xt = tx,\quad xw = wx = 0,\quad zt = tz,$$
$$zw = -wz,\quad tw = wt,\quad w^2 = z^2 t.$$

Любой элемент из $\varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$ является линейной комбинацией одночленов вида

$$x^\zeta t^s \quad (m = 4s + \zeta), \qquad z^r t^s w^\sigma \quad (m = 3r + 4s + 5\sigma), \tag{4.6}$$

где $r, s \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \zeta \in \{1, 2\}, \sigma \in \{0, 1\}$; кроме того, легко видеть, что одночлены (4.6) линейно-независимы. Пусть $d_m = \dim_K \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Докажем, что для $m \geqslant 5$

$$d_m - d_{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ m \equiv 1, 4, 7 \ \text{ или } \ 10 \pmod{12}, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Действительно, эта разность равна числу одночленов из (4.6), у которых $s = 0$. Такими одночленами являются z^r (и тогда $m = 3r$)

и $z^r w$ (и тогда $m = 3r + 5$). Отсюда непосредственно получаем соотношение (4.7). Ввиду следствия 2.7а) последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.7). Теперь соотношение (4.5) получается с помощью индукции по m, поскольку для $m \leqslant 4$ оно проверяется непосредственно.

б) Пусть $i = j = 1$. K-алгебра $\varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ порождается элементами $y = x_2 x_3$ и z_2, удовлетворяющими соотношениям:

$$yz_2 = z_2 y, \quad y^2 = 0.$$

Ясно, что

$$\dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \ m \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.5) вытекает из следствия 2.7в).

в) Пусть $i = 1$, $j = 0$. Аналогично части в) доказательства предложения 4.1 получаем, что любой одночлен f из $\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ приводится к виду $f = x_2 z_1^r$. Следовательно,

$$\dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.5) вытекает из следствия 2.7б).

г) Пусть $i = 0$, $j = 1$. Вновь аналогично части в) доказательства предложения 4.1 получаем, что любой одночлен f из $\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ приводится к виду $f = z_1^r x_3$. Следовательно,

$$\dim_K \varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.5) вновь вытекает из следствия 2.7б). □

Из доказательства теоремы 1.2 мы получаем следующее описание Ext-алгебр простых R-модулей.

Следствие 4.4. *Пусть $R = SD(2\mathcal{A})_2$. Имеют место следующие изоморфизмы градуированных K-алгебр:*
а) $\mathcal{E}(S_0) \simeq K\langle x, z, t, w\rangle/(x^3, xz, zx, xw, wx, xt{-}tx, zt{-}tz, zw{+}wz, tw{-}wt, z^2t - w^2)$, *где* $\deg x = 1$, $\deg z = 3$, $\deg t = 4$, $\deg w = 5$;
б) $\mathcal{E}(S_1) \simeq K[y, z]/(y^2)$, *где* $\deg y = 2$, $\deg z = 3$.

4.3. Серия $SD(3\mathcal{A})_2$. Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2^k$, $k \geqslant 2$, и пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$, где $\mathcal{E}_3$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1.3. Через ε_i, $i = 0, 1, 2$, обозначим идемпотенты алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие вершинам колчана $\Re_3$. Ввиду предложений 3.7 и 3.9 имеется сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие стрелкам колчана $\Re_3$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$ (см. начало раздела 3.3). Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые.

Теперь теорема 1.3 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.5. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. Для любых $i, j \in \{0, 1, 2\}$ и $m \geqslant 0$*

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{E}^m \varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i). \tag{4.8}$$

Доказательство. Мы приведем доказательство для случая, когда $k > 2$. Если $k = 2$, то в нашем доказательстве требуются незначительные изменения, и мы предоставляем читателю проделать это. Мы предположим также, что $m > 0$, поскольку для $m = 0$ соотношение (4.8) очевидно.

а) Пусть $i = j = 1$. Из соотношений (1.4)–(1.6) следует, что $\varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ – K-алгебра, порожденная элементами

$$z = z_1, \ t = y_2 y_1, \ w = y_2 z_3,$$

которые удовлетворяют соотношениям:

$$zt = tz, \ zw = -wz, \ tw = wt, \ tz^2 = w^2.$$

(Отметим, что при $k = 2$ соотношение $zw = -wz$ следует заменить на такое $zw + wz = t^2$.) Любой одночлен f из $\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$ представляется единственным образом в виде

$$f = z^r t^s w^\varepsilon, \quad \text{где} \quad r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}. \tag{4.9}$$

Пусть $d_m = \dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$. Тогда для $m \geqslant 4$

$$d_m - d_{m-3} = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ m \equiv 0 \ \ \text{или} \ \ 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Действительно, эта разность равна числу одночленов из (4.9), у которых $r = 0$. Следовательно, $f = t^s$ (и тогда $m = 4s$)

или $f = t^s w$ (и тогда $m = 4s + 5$), откуда и вытекает соотношение (4.10). Ввиду следствия 2.11a) последовательность $\{\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.10). Теперь соотношение (4.8) доказывается индукцией по m, при этом для $m \leqslant 4$ оно проверяется непосредственно.

б) В случае $i = j = 2$ соотношение (4.8) следует из части а) доказательства по симметрии (см. определяющие соотношения (1.4)–(1.6) для алгебр серии $SD(3\mathcal{A})_2$).

в) Пусть $i = 1$, $j = 2$. Любой одночлен f из $\varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_2$ представляется в виде $f = g \cdot y_2 \cdot h$ или $f = g \cdot z_4 \cdot h$, где $g \in \varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_1$, $h \in \varepsilon_2\mathcal{E}\varepsilon_2$. Так как

$$y_2 \cdot z_2 = z_1 \cdot y_2, \quad y_2 \cdot y_1 z_4 = y_2 z_3 \cdot y_2,$$

то можно считать, что $h = \varepsilon_2$. Кроме того, из части а) доказательства следует, что $g = z_1^r (y_2 y_1)^s (y_2 z_3)^\varepsilon$, где $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Из соотношений

$$y_2 z_3 \cdot z_4 = -z_1^2 \cdot y_2, \quad y_2 y_1 \cdot z_4 = y_2 z_3 \cdot y_2$$

следует, что f приводится к виду

$$f = z_1^r (y_2 y_1)^s (y_2 z_3)^\varepsilon \cdot y_2 \quad \text{или} \quad f = z_1^r \cdot z_4. \tag{4.11}$$

Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_2$. Тогда $d_m - d_{m-3}$ равно числу одночленов из (4.11), у которых $r = 0$, откуда легко следует, что при $m > 3$

$$d_m - d_{m-3} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m \equiv 2 \ \text{ или } \ 3 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Ввиду следствия 2.11 б) последовательность $\{\dim_K \mathrm{Ext}_R^m(S_2, S_1)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.12), и вновь соотношение (4.8) доказывается индукцией по m.

г) В случае, когда $i = 2$ и $j = 1$, соотношение (4.8) следует из части в) доказательства по симметрии.

д) Предположим, что $i = j = 0$. K-алгебра $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ порождается элементами $y = x_1 x_3$ и z_0, удовлетворяющими соотношениям:

$$y z_0 = z_0 y, \quad y^2 = 0.$$

Ясно, что

$$\dim_K \varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } \ m \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.8) вытекает из следствия 2.11 г).

е) Пусть $i = 1$, $j = 0$. Аналогично части б) доказательства из соотношений (1.4)–(1.6) выводим, что любой одночлен $f \in \varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_0$ представляется в виде $f = z_1^r x_3$, и потому

$$\dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь соотношение (4.8) вытекает из следствия 2.11 в).

ж) Если $i = 0$, $j = 1$, то доказательство проводится аналогично части е). Наконец, если $\{i, j\} = \{0, 2\}$, то требуемое утверждение получаем из доказанного выше по симметрии. $\square$

Из доказательства теоремы 1.3 мы получаем следующее описание Ext-алгебр простых R-модулей.

Следствие 4.6. *Пусть $R = SD(3\mathcal{A})_2$. Имеют место следующие изоморфизмы градуированных K-алгебр:*
а) *для $i \in \{1, 2\}$*

$$\mathcal{E}(S_i) \simeq K\langle z, t, w\rangle/(zt - tz, zw + wz - \delta(k, 2)t^2, tw - wt, z^2t - w^2),$$

где $\deg z = 3$, $\deg t = 4$, $\deg w = 5$, а $\delta(r, s)$ обозначает дельту Кронекера;
б) $\mathcal{E}(S_0) \simeq K[y, z]/(y^2)$, *где $\deg y = 2$, $\deg z = 3$.*

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, II. — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), 3–25.
4. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, III: *серия $D(2\mathcal{A})$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.
5. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, IV: *серия $D(2\mathcal{B})$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.
6. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, I. — Алгебра и анализ **13**, No. 4 (2001), 54–85.
7. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* – В кн.: Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти З. И. Боревича. С.-Петербург, 17–23 сентября (2002), 115–116.
8. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.

9. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, III: *серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 84–100.
10. A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, *Computation of the Yoneda algebras of dihedral type*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 101–120.
11. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*. — Lect. Notes Math. **1428**, Berlin–Heidelberg (1990).
12. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology*. — Commun. Algebra **15**, No. 1/2 (1987), 53–121.
13. C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1994).

Generalov A. I. Cohomology of algebras of semidihedral type, IV.

The present paper continues the cycle of papers of the author (some among them – in collaboration), in which the Yoneda algebra are calculated for several families of algebras of dihedral and semidihedral type (in K. Erdmann's classification). In the paper, the Yoneda algebra are described (in terms of quivers with relations) for algebras of semidihedral type, namely of the families $SD(2\mathcal{A})_1$, $SD(2\mathcal{A})_2$ and $SD(3\mathcal{A})_2$.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 октября 2004 г.