Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

М. В. Бондарко, С. В. Востоков, Ф. Лоренц

СПАРИВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП НАД σ–КОЛЬЦАМИ

Введение

Настоящая работа является прямым продолжением работ [1] и [2], в которых строилось в явном виде спаривание Гильберта в многомерном локальном поле на формальном модуле Хонды для формальной группы, определенной над кольцом векторов Витта. Здесь мы обобщаем этот результат на формальные группы, определенные над кольцом целых так называемого σ-поля (см. ниже определение 1, п. 1.1).

В первом пункте §1 вводится определение σ-поля и даются примеры таких полей. В следующем пункте излагается теория Хонды для формальных групп, определенных над кольцами целых σ-полей, а также доказывается аналог классификации Демченко для таких групп.

В п. 1.3 определяются μ-кольца и μ-целые модули и даются критерии для μ-целых модулей. Эти модули играют важную роль при вычислении вычета рядов, полученных в явных формулах для различных типов спариваний. В п. 1.4 строится базис модуля корней изогении формальной группы в σ-поле. В п. 1.5 определяется обобщенный символ Гильберта и даются основные его свойства. В пп. 1.6 и 1.7 задаются модули кривых Картье для мультипликативной группы многомерного локального поля и формальной группы. В п. 1.8 определяются функции Артина–Хассе и обратные к ним функции для формальных групп в σ-полях. Эти функции применяются в следующем пункте для построения базиса Шафаревича в формальном модуле. В последнем пункте этого параграфа задаются примарные ряды, играющие существенную роль в построении формул для спаривания Гильберта.

Работа выполнена при поддержке SFB 478, Münster, “Geometrische Strukturen”, а также IHES (Paris); первые два автора признательны грантам НШ-2003.2003.1, РФФИ 04-01-00082; РД No. 02-1.1-37.

В первых двух пунктах §2 строится в явном виде спаривание $[\cdot,\cdot]$ на модуле Картье мультипликативной группы многомерного локального поля и модуле Картье формальной группы, заданной над кольцом целых σ-подполя, с произвольным примарным рядом, и доказываются основные свойства этого спаривания. В п. 2.3 в качестве примарного ряда для спаривания $[\cdot,\cdot]$ берется конкретный ряд Γ_j, который связан с примарными элементами формального модуля, и находятся значения этого спаривания на базисе Шафаревича формального модуля. Основным результатом п. 2.4 является доказательство независимости спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ от разложения второго аргумента из формального модуля в ряд по локальным параметрам. В последнем пункте второго параграфа доказывается инвариантность спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle$ от выбора системы локальных параметров и его независимость по первому аргументу от способа разложения элементов в ряды по локальным параметрам.

Наконец, последний параграф работы посвящен доказательству основных явных формул для спаривания Гильберта.

§1. Обозначения и вспомогательные утверждения

В этой работе T обозначает полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с полем вычетов характеристики p. Абсолютный индекс ветвления поля T равен 1. Пусть далее K – вполне разветвленное расширение поля T, $e=[K:T]$ – абсолютный индекс ветвления поля K. Как обычно $\mathfrak{o}_T$ (соответственно, $\mathfrak{o}_K$) обозначает кольцо целых поля T (соотв. K).

1.1. σ-поле.

Определение 1.1.1. *Пусть σ – эндоморфизм поля T, который удовлетворяет условию*

$$\sigma(\alpha)\equiv\alpha^p \mod p$$

для любого α из кольца $\mathfrak{o}_T$. В этом случае пару (T,σ) будем называть σ-полем.

Замечание 1.1.2. Если поле вычетов поля T совершенное, то автоморфизм σ является автоморфизмом Фробениуса. Другим примером σ-поля является n-мерное локальное поле $T=$

$k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$, в котором k является конечным неразветвленным расширением поля $\mathbb{Q}_p$. Автоморфизм σ при этом действует на поле k как автоморфизм Фробениуса и, кроме того,

$$\sigma(t_i) = t_i^p, \quad 1 \leqslant i < n.$$

Отметим при этом, что σ зависит от выбора системы локальных параметров $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Предложение 1.1.3. *Каждое полное дискретно нормированное поле K является вполне разветвленным расширением некоторого σ-поля T.*

Доказательство. Согласно предложению 5.5, главы 2, книги [3], существует абсолютно неразветвленное полное дискретно нормированное поле T, поле вычетов которого равно k (здесь k – поле вычетов поля K). Тогда, согласно предложению 5.6 той же главы, поле K является вполне разветвленым расширением поля T. Остается доказать, что на T можно задать структуру σ-поля. Для этого нам понадобится понятие p-базиса. Элементы r_i, $i \in I$, поля k (характеристики p) называются *p-базисом* k, если $k = k^p[\{r_i\}, i \in I]$ и $|k^p[r_1, \dots, r_n] : k^p| = p^n$ для любых различных наборов $r_1, \dots, r_n$. Пустое множество является p-базисом тогда и только тогда, когда k совершенно. Для несовершенного поля k p-базис существует по лемме Цорна.

Выберем элементы $a_i \in \mathfrak{o}_T$ такие, что $\bar{a}_i = r_i$. Возьмем $T_n = T_{n-1}(\{a_{i,n}\})$, где $a_{i,n}^p = a_{i,n-1}$, $i \in I$, и $T_0 = T$, $a_{i,0} = a_i$. Тогда пополнение $\widetilde{T}$ поля $L = \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ будет абсолютно неразветвленным полным дискретно нормированным полем, поле вычетов которого будет совершенизацией поля k. Так как $a_i \in \bigcap\limits_{n \geqslant 0} \widetilde{T}^{p^n}$, то мы получаем, что a_i – представители Тейхмюллера элементов r_i.

Докажем теперь, что автоморфизм Фробениуса σ поля $\widetilde{T}$ (с совершеным полем вычетов) является эндоморфизмом поля T, т.е. $\sigma(T) \subset T$. Так как a_i – представители Тейхмюллера, то $\sigma(a_i) = a_i^p$. Возьмем элемент $\alpha \in \mathfrak{o}_T$. Для $n > 0$ найдем представление $\overline{\alpha} = \sum r_\nu^{p^n} \Pi r_i^{v_{i\nu}}$, где $r_\nu \in k$, $0 \leqslant v_{i\nu} < p^n$, в поле k. Пусть a_ν – подъемы r_ν в $\mathfrak{o}_T$, т.е. $\bar{a}_\nu = r_\nu$, и пусть $b_\nu = a_\nu^p$. Тогда $\alpha \equiv \sum a_\nu^{p^n} \Pi a_i^{v_{i\nu}} \mod p$, т.е.

$$\alpha = \sum a_\nu^{p^n} \Pi a_i^{v_{i\nu}} + p\alpha_1, \alpha_1 \in \mathfrak{o}_T.$$

Получаем, тем самым, что $\sigma(\Pi a_i^{v_{i\nu}}) = \Pi a_i^{pv_{i\nu}}$ и, кроме того, $\sigma(a_\nu^{p^n}) \equiv b_\nu^{p^n} \mod p^{n+1}$. Следовательно, $\sigma(\alpha) \equiv \sum b_\nu^{p^n} a_i^{pv_{i\nu}} + p\sigma(\alpha_1) \mod p^{n+1}$. Повторяя процесс для α_1, получаем, что $\sigma(\alpha) \equiv \beta_n \mod p^{n+1}$ для некоторого $\beta_n \in \mathfrak{o}_T$. Тогда $\sigma(\alpha) = \lim \beta_n$, а так как кольцо $\mathfrak{o}_T$ полно, то $\sigma(\alpha) \in \mathfrak{o}$. Значит,

$$\sigma(\mathfrak{o}_T) \subset \mathfrak{o}_T \quad \text{и} \quad \sigma(T) \subset T.$$

Так как $\sigma(x) \equiv x^p \mod p\mathfrak{o}_{\widetilde{T}}$ для любого целого элемента x из $\mathfrak{o}_{\widetilde{T}}$, то такое же свойство выполнено и для элементов из $\mathfrak{o}_T$. $\bullet$

На кольце рядов Лорана $T((X))$ определим действие оператора Δ по формуле

$$\Delta(\sum c_i X^i) = \sum \sigma(c_i) X^{pi}. \tag{1}$$

Обозначим через D_Δ некоммутативное кольцо операторов

$$D_\Delta := \{ \sum_{i \geqslant 0} a_i \Delta^i, \quad a_i \in \mathfrak{o}_T \} \tag{2}$$

с умножением $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ для $a \in \mathfrak{o}_T$. Аналогичное кольцо с коэффициентами из поля T обозначим через D'_Δ.

На коммутативном кольце рядов $K[\![\Delta]\!]$ определено правое действие элементов из колец D_Δ и D'_Δ:

$$(c\Delta^m) \circ (a\Delta^k) = c\sigma^m(a)\Delta^{m+k} \quad \text{для} \quad c \in K, \quad a \in T.$$

1.2. Теория Хонды для формальных групп в σ-полях.

Для одномерных формальных групп над кольцом целых $\mathfrak{o}_T$ σ-поля T имеется аналог теории Хонды (см. [4, 5]).

Во-первых, заметим, что любая формальная группа F над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом $\lambda(X)$ строго изоморфна так называемой p-типической группе F_p, логарифм которой имеет вид

$$\lambda_p(X) = \sum_{i \geqslant 0} c_i x^{p^i} = \Lambda(\Delta)(X),$$

где $\Lambda(\Delta) = 1 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \dots + \in D'_\Delta$.

Далее, имеет место следующий аналог теоремы Хонды.

Предложение 1.2.3. 1) *Для p-типической группы F_p найдется единственный элемент $u_p(\Delta) \in p + D_\Delta\Delta$ (называемый далее специальным элементом группы F_p) такой, что*

$$\Lambda(\Delta) = pu_p^{-1}(\Delta), \tag{3}$$

т.е. $\lambda_p(X) = pu_p^{-1}(\Delta) \circ X$.

Обратно, для любого элемента $u \in p + D_\Delta\Delta$ ряд $\lambda(X) = pu^{-1}(\Delta) \circ X$ является логарифмом p-типической формальной группы F_p над $\mathfrak{o}_T$.

2) *Пусть F – произвольная одномерная формальная группа над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом $\lambda(X)$ и пусть F_p – строго изоморфная ей p-типическая формальная группа со специальным элементом $u_p(\Delta)$. Тогда существует единственный ряд $g(X) \in X(1 + \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$ такой, что*

$$\lambda(X) = pu_p^{-1}(\Delta) \circ g, \tag{4}$$

где $\Delta g = g^p$.

Доказательство. 1) По теории Хонды найдется элемент $u(\Delta) \in p + D_\Delta\Delta$ такой, что $u(\Delta) \circ \lambda_p(X) \equiv 0 \mod p$. Отсюда следует, что $u \circ \Lambda = p\varepsilon(\Delta)$, где $\varepsilon \in 1 + D_\Delta\Delta$. Тогда, взяв $u_p = \varepsilon^{-1} \circ u$, получим (3).

В обратную сторону. Так как ряд $\lambda(X)$ из условия п. 1) удовлетворяет, очевидно, сравнению $u(\Delta) \circ \lambda(X) \equiv 0 \mod p$, то по теории Хонды он является логарифмом некоторой формальной группы F над $\mathfrak{o}_T$. Ясно при этом, что F будет p-типической формальной группой.

2) По условию формальные группы F и F_p строго изоморфны над $\mathfrak{o}_T$. Поэтому ряд $g(X) = \lambda_p^{-1} \circ \lambda \circ X$, задающий этот изоморфизм, лежит в $X(1 + \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$. Отсюда и из (3) следует (4). □

Замечание 1.2.4. Элемент $u_p(\Delta)$ будем называть также специальным элементом группы F (как и группы F_p) и обозначать в дальнейшем либо u_F, либо просто u там, где это не вызовет недоразумений.

Несложно проверить следующий аналог подготовительной леммы Вейерштрасса.

Лемма 1.2.5. *Любой элемент $u \in p + D_\Delta\Delta$, $p \nmid u$, можно единственным образом представить в виде: $u = \varepsilon \circ u_c$, где $\varepsilon \in 1 + D_\Delta\Delta$, а $u_c(\Delta) = p - \sum\limits_{i=1}^{h} a_i\Delta^i$, причем $a_i \in p\mathfrak{o}_T$ для $i < h$ и $a_h \in \mathfrak{o}_T^*$.*

Из предложения 1.2.3 следует, что элемент $u(\Delta)$ является специальным элементом для некоторой формальной группы. При этом, согласно теории Хонды, число h будет высотой группы F.

Определение 1.2.6. *Элемент u_c, однозначно определенный элементом u будем называть каноническим специальным элементом группы F.*

Роль канонического элемента u_c выясняется в следующей теореме, которая вытекает из теории Хонды.

Предложение 1.2.7. 1. *В классе изоморфных формальных групп высоты h над $\mathfrak{o}_T$ имеется канонический представитель – группа Артина–Хассе F_c с логарифмом $\lambda_c(X) = pu_c^{-1}(\Delta) \circ X$, где $u_c(\Delta)$ взят из леммы* 1.2.5.

2. *Для элемента $c \in \mathfrak{o}_T$ существует гомоморфизм $f(X) \equiv cX \mod X^2$ из группы F со специальным элементом u в группу F' со специальным элементом u' тогда и только тогда, когда найдется элемент $t \in D_\Delta$ такой, что $u'c = tu$.*

Тем самым для группы F с логарифмом λ ряд

$$\varphi_F = \lambda^{-1} \circ pu_c^{-1} \circ X : F_c \to F \tag{5}$$

задает изоморфизм и $\varphi_F \in X + \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_\circ$.

Проверим теперь аналог классификационных теорем Демченко (см. [6]).

Пусть F – p-типическая формальная группа над $\mathfrak{o}_T$ со специальным элементом $u = p - a_h B\Delta^h$, где $B \in 1 + D_\Delta\Delta$, и пусть

$$\lambda_1(X) = pu_1^{-1} \circ X, \quad \text{где} \quad u_1 = u^{\sigma^h} \circ B^{-1}$$

(σ^h действует только на коэффициенты ряда $u(\Delta)$).

Предложение 1.2.8. 1) *λ_1 – логарифм p-типической формальной группы F_1 над $\mathfrak{o}_T$.*

2) *Существует гомоморфизм $[pa_h^{-1}]_{F,F_1}(X)$ над $\mathfrak{o}_T$ из группы F в группу F_1 такой, что*

$$[pa_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \mod p.$$

3) *Если u_c – канонический специальный элемент для F (см. предложение* 1.2.7*), то $a_h^{-1}u_c a_h$ будет каноническим специальным элементом для группы F_1.*

Доказательство. 1) Ясно, что $u_1 = u^{\sigma^h} B^{-1} \in p + D_\Delta \Delta$, и, значит, λ_1 является логарифмом некоторой формальной группы F_1 над $\mathfrak{o}_T$ (см. предложение 1.2.3).

2) а) Пусть $u_1' = Bu^{\sigma^h} B^{-1} = Bu_1$, тогда группа F_1' с логарифмом $\lambda_1' = pu_1'^{-1} \circ X$ строго изоморфна группе F_1 над $\mathfrak{o}_T$, так как $B \equiv 1 \mod \Delta$ (см. предложение 1.2.7).

Проверим, что
$$pa_h^{-1} u = u_1' \circ (pa_h^{-1}). \tag{6}$$

Действительно, $a_h^{-1} u = a_h^{-1} p - B\Delta^h$. С другой стороны, $u_1' a_h^{-1} = B(p - a_h^{\sigma^h} B^{\sigma^h} \Delta^h) B^{-1} a_h^{-1} = a_h^{-1} p - B a_h^{\sigma^h} B^{\sigma^h} B^{-\sigma^h} a_h^{-\sigma^h} \Delta^h = a_h^{-1} p - B\Delta^h = a_h^{-1} u$, так как $\Delta^h B = B^{\sigma^h} \Delta^h$, и мы проверили (6). Из (6), согласно предложению 1.2.7, следует существование гомоморфизма $[pa_h^{-1}]_{F,F_1'}(X) \equiv pa_h^{-1} X \mod X^2$ из группы F в группу F_1'. Так как группы F_1 и F_1' строго изоморфны над $\mathfrak{o}_T$, то ряд
$$[pa_h^{-1}]_{F,F_1} = [pa_h^{-1}]_{F,F_1'} \circ [1]_{F_1',F_1}$$
будет гомоморфизмом над $\mathfrak{o}_T$ групп F и F_1. При этом
$$[pa_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv pa_h^{-1} X \mod X^2.$$

б) Проверим, что
$$[pa_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \mod p. \tag{7}$$

Действительно, из равенства $pa_h^{-1} = a_h^{-1} u + B\Delta^h$ следует
$$\begin{aligned} pa_h^{-1} \lambda(X) &= pa_h^{-1}(pu^{-1}(\Delta) \circ X) \\ &= (a_h^{-1} u + B\Delta^h) \circ pu^{-1}(\Delta) \circ X \\ &= pa_h^{-1} X + pBu^{-\sigma^h} \Delta^h \circ X \\ &= pu_1^{-1} \circ X^{p^h} = \lambda_1(X^{p^h}) \mod p\mathfrak{o}_T[\![X]\!]. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства
$$[pa_h^{-1}]_{F,F_1} = \lambda_1^{-1} \circ (pa_h^{-1}) \circ \lambda$$
получаем сравнение
$$\lambda_1([pa_h^{-1}]_{F,F_1}) \equiv \lambda_1(X^{p^h}) \mod p\mathfrak{o}_T[\![X]\!].$$

Сравнение (7) вытекает теперь из следующего несложно доказываемого факта: пусть $f, g \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$, тогда

$$f \equiv g \mod p \Leftrightarrow \lambda(f) \equiv \lambda(g) \mod p\mathfrak{o}_T[\![X]\!].$$

3) Проверим сперва, что

$$u_1' = a_h^{-1} u a_h.$$

Действительно, $u_1' = Bu_1 = Bu^{\sigma^h} B^{-1} = B(p - a_h^{\sigma^h} B^{\sigma^h} \Delta^h) B^{-1} = p - B a_h^{\sigma^h} \Delta^h = a_h^{-1} u a_h$.

Пусть u_c – канонический специальный элемент для F, тогда $u_c = \varepsilon u$ при некотором $\varepsilon \in 1 + D_\Delta \Delta$ (см. предложение 1.2.7). Покажем, что $u_{c,1} := a_h^{-1} u_c a_h$ будет каноническим специальным элементом для F_1. Действительно, $u_{c,1}$ имеет, очевидно, канонический вид. Далее,

$$\begin{aligned} u_{c,1} = a_h^{-1} u_c a_h &= (a_h^{-1} \varepsilon a_h)(a_h^{-1} u a_h) \\ &= (a_h^{-1} \varepsilon a_h) u_1' = (a_h^{-1} \varepsilon a_h) B u_1 = \eta u_1, \end{aligned}$$

где $\eta = a_h^{-1} \varepsilon a_h B \in 1 + D_\Delta \Delta$. Значит, каноническая группа Артина–Хассе $F_{c,1}$ с логарифмом $\lambda_{c,1} = p u_{c,1}^{-1} \circ X$ изоморфна группе F и, тем самым, $u_{c,1}$ – канонический специальный элемент для F_1. $\square$

Пусть F – произвольная, не обязательно p-типическая формальная группа над $\mathfrak{o}_T$ конечной высоты h, тогда для ее специального элемента $u(\Delta) = p - a_1 \Delta - a_2 \Delta^2 - \dots$ выполнено условие: $a_i \equiv 0 \mod p$, $i < h$, $a_h \in \mathfrak{o}_T^*$ (см. лемму 1.2.5). Взяв $C = 1 - \frac{a_1}{p} \Delta - \dots - \frac{a_{h-1}}{p} \Delta^{h-1}$, получим $u' = C^{-1} u = p - a_h B \Delta^h$, где $B \in 1 + D_\Delta \Delta$. Поскольку $u' \in p + D_\Delta \Delta$, то ряд $\lambda'(X) = p u'^{-1} \circ X$ является логарифмом p-типической группы F', строго изоморфной F над $\mathfrak{o}_T$ (см. предложение 1.2.3). Пусть $u_1 = u'^{\sigma^h} B^{-1}$ и F_1 – формальная группа над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом $\lambda_1(X) = p u_1^{-1} \circ X$ (см. предложение 1.2.3).

Предложение 1.2.9. *Существует гомоморфизм $[p a_h^{-1}]_{F,F_1}$ над $\mathfrak{o}_T$ из формальной группы F в группу F_1. При этом*

$$[p a_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv p a_h^{-1} X \mod X^2$$

и

$$[p a_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv f(X^{p^h}) \mod p$$

для некоторого ряда $f(Y) \in Y + \mathfrak{o}_T[\![Y]\!]_\circ$ *(считаем* $Y := X^{p^h}$*).*

Доказательство. Пусть $f : F \to F'$ – изоморфизм групп. Для групп F' и F_1 существует гомоморфизм $[pa_h^{-1}]_{F',F_1}$ над $\mathfrak{o}_T$, согласно предложению 1.2.8. При этом $[pa_h^{-1}]_{F',F_1}(X) \equiv X^{p^h} \mod p$. Осталось заметить, что $[pa_h^{-1}]_{F,F_1} = f \circ [pa_h^{-1}]_{F',F_1}$. □

Предложение 1.2.10 (обратное к предложению 1.2.9)**.** *Пусть* $f \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]$ *удовлетворяет условиям:* $f(X) \equiv X^{p^h} \mod p$, $f(X) \equiv pa_h^{-1}X \mod X^2$, *где* a_h *– фиксированная единица из* $\mathfrak{o}_T$. *Пусть, далее,* $u_c = p - a_1\Delta - \dots - a_h\Delta^h$, $a_1, \dots, a_{h-1} \in p\mathfrak{o}_T$, *заданный многочлен из* D_Δ. *Положим* $u := C^{-1}u_c = p - a_h\Delta^h - a_{h+1}\Delta^{h+1} - \dots$, *где* $C := 1 - p^{-1}(a_1\Delta + \dots + a_{h-1}\Delta^{h-1})$. *Тогда существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа* F *со специальным элементом* u *такая, что* $f = [pa_h^{-1}]_{F,F_1}(X)$ *– гомоморфизм из группы* F *в* F_1, *где группа* F_1 *соответствует* F, *согласно предложению* 1.2.8.

Доказательство. Так же, как и в теореме 2 работы [6], строим логарифм $\lambda(X)$ группы F, удовлетворяющий условиям: $(u \circ \lambda)(X) \equiv 0 \mod p$, $\lambda_1 \circ f = (p/a_h) \circ \lambda$. □

Замечание 1.2.11. Гомоморфизм $f = [pa_h^{-1}]_{F,F_1}$ из предложения 1.2.8 выражается через логарифмы λ_1 и λ групп F_1 и F следующим образом

$$f = \lambda_1^{-1} \circ (p/a_h) \circ \lambda.$$

Введем следующие обозначения. Для $m \in \mathbb{Z}$ определим

$$p_m := p/a_h^{(\sigma^{mh})}.$$

Для группы Хонды F над $\mathfrak{o}_T$ получаем, согласно предложению 1.2.8, представление

$$\mathcal{A} : F \to F_1$$

и последовательность гомоморфизмов f_m групп Хонды $F_m := \mathcal{A}^m F$

$$F \underset{f}{\longrightarrow} F_1 \underset{f_1}{\longrightarrow} F_2 \to \dots \to F_{N-1} \underset{f_{N-1}}{\longrightarrow} F_N. \tag{8}$$

Обозначим далее через λ_m логарифм группы F_m. Канонический специальный элемент группы F_m обозначим через

$$u_m = p - a_1^{(m)}\Delta - \dots - a_h^{(m)}\Delta^h.$$

Положим далее,

$$p_1^{(m)} = p_1 \cdot p_2 \dots p_m = p^m / a_h^{1+\sigma^h+\dots+\sigma^{h(m-1)}}$$
$$f^{(m)} = f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \dots \circ f_1 \circ f, \qquad (9)$$

$B_m \in 1+\Delta D_\Delta$ – оператор из предложения 1.2.8, соответствующий λ_m.

Из предложения 1.2.8 по индукции легко следует

Лемма 1.2.12. 1. $a_h^{(m)} = a_h^{\sigma^{mh}}$.

2. $f_{m-1} \equiv p_m X \mod X^2$; $f^{(m)}(X) \equiv p_1^{(m)} X \mod X^2$.

3. $u_m \circ p_1^{(m)} = p_1^{(m)} u_0$; $\widetilde{u}_m \circ p_1^{(m)} = p_1^{(m)} \widetilde{u}$,
где $\widetilde{u}_m$ *получается из* u_m *так же, как* $\widetilde{u}$ *из* u_0.

4. $f^{(m)} = \lambda_m^{-1} \circ p_1^{(m)} \circ \lambda$.

Пусть G – группа Хонды над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом $\lambda_0(X) = \sum\limits_{i\geqslant 1} c_i X^i$ и каноническим специальным элементом $u = p - a_1\Delta - \dots - a_h\Delta^h$ (напомним, что все $a_1, \dots, a_{h-1}$ делятся на p, а a_h – единица из кольца $\mathfrak{o}_T$).

Лемма 1.2.13. *Логарифм* $\lambda_0(X)$ *можно представить в виде*

$$\lambda_0(x) = c_0(X) \cdot x + c_1(x) \cdot \frac{X^{p^h}}{p} + c_2(X) \frac{X^{p^{2h}}}{p^2} + \dots$$

где $c_k(X) \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]^*$, $c_0(X) \equiv 1 \mod X$.

Доказательство. Из условия $p|(u \circ \lambda_0)(X)$ получаем следующее сравнение

$$p\lambda_0(X) \equiv a_1 \lambda_0^{\sigma}(X^p) + \dots + a_h \lambda_0^{\sigma h}(X^{p^h}) \mod p\mathfrak{o}_T[\![X]\!].$$

Из этого соотношения наше утверждение легко следует по индукции. □

1.3. μ-кольца и μ-целые модули.

1.3.1. Пусть T – σ-поле и K – вполне разветвленное расширение степени e над ним. Пусть $\mu > 0$ – рациональное число. Для монома $d_r X^r$, $d_r \in T$, определим μ-нормирование

$$\nu(d_r X^r) := v_T(d_r) + \mu r. \qquad (10)$$

Определение 1.3.1. *Под μ-кольцом $\mathcal{L}_\mu$ будем понимать p-адическое пополнение кольца*

$$\left\{f = \sum_{r\in\mathbb{Z}} d_r X^r; d_r \in T; \nu(d_r X^r) \geqslant 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \nu(d_r X^r) = \infty\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}_\mu$ – коммутативное кольцо с единицей, которое является модификацией двумерного локального кольца. Обозначим

$$L_\mu := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} X^m \mathcal{L}_\mu,$$

$$\mathcal{L}_\mu^+ := \left\{\sum_{r\geqslant 0} d_r X^r \in \mathcal{L}_\mu\right\}.$$

Замечание 1.3.2. Если $f \in \mathcal{L}_\mu$, то $\Delta f \in \mathcal{L}_{\mu/p}$. Если $f \in \mathcal{L}_\mu^+$, то $\Delta f \in \mathcal{L}_\mu^+$ (и вместе с тем $\Delta f \in \mathcal{L}_{\mu/p}$).

Определение 1.3.3. *Элемент $\varepsilon(X) \in \mathcal{L}_\mu$ назовем главной единицей, если*

$$\varepsilon(X) \equiv 1 \mod (X\mathcal{L}_\mu^+, p\mathcal{L}_\mu)$$

Нетрудно убедиться, что главные единицы образуют мультипликативную подгруппу в кольце $\mathcal{L}_\mu$.

Замечание 1.3.4. Мультипликативная группа рядов $1 + X\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$ является подгруппой главных единиц в любом кольце $\mathcal{L}_\mu$.

Замечание 1.3.5. $X^m\mathcal{L}_\mu$ является модулем над кольцом $\mathcal{L}_\mu$ и, в частности, над кольцом $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$.

Замечание 1.3.6. Введение в рассмотрение кольца $\mathcal{L}_\mu$ объясняется следующими соображениями. Явная формула для спаривания Гильберта задается вычетом произведения двух рядов. Первый из них вычисляется по аргументам спаривания. Второй ряд напрямую связан с примарными элементами: фактически он является обратным к ряду, который при подстановке в функцию Артина–Хассе дает примарный элемент. В мультипликативном случае, а также в случае формальных групп Любина–Тейта оба ряда имеют целые коэффициенты (см. [7, 8, 9]). Но в случае формальных групп Хонды второй ряд является обратным к логарифму формальной группы. Поэтому нам надо работать в кольцах, в которых можно брать ряды, обратные к рядам с нецелыми коэффициентами.

Пусть $h := \mathrm{ht}F < \infty$ – высота формальной группы F. В кольце $\mathcal{L}_\mu$ для $\mu \in \left[\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{e}\right]$ определим $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$-модуль

$$\mathcal{H}_\mu := \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0 + X^{e_*}\mathcal{L}_\mu \cap T[\![X]\!]_0, \qquad (11)$$

где $e_* = p^h e/(p^h - 1)$. На модуле $\mathcal{H}_\mu$ определена структура формального $\mathbb{Z}_p$-модуля группы $F : F(f, g) \in \mathcal{H}_\mu$ для $f, g \in \mathcal{H}_\mu$. Полученный $\mathbb{Z}_p$-модуль обозначим $F(\mathcal{H}_\mu)$.

Замечание 1.3.7. Из определения кольца $\mathcal{L}_\mu$ следует, что для любого ряда $f \in \mathcal{H}_\mu$ определена подстановка элементов из максимального идеала $\mathfrak{M}$ кольца целых поля K, т.е. $f(\alpha) \in \mathfrak{M}$ для $\alpha \in \mathfrak{M}$.

1.3.2. μ-целые модули. Так как мы будем иметь дело с вычетами рядов из кольца $\mathcal{L}_\mu$ и для наших целей эти вычеты должны быть целыми, то естественно возникает вопрос, для каких m все ряды из модуля $X^m\mathcal{L}_\mu$ имеют целые коэффициенты при отрицательных степенях.

Определение 1.3.8. *Ряд f из кольца $\mathcal{L}_\mu$ назовем μ-целым, если все коэффициенты при отрицательных степенях этого ряда имеют целые коэффициенты, т.е. принадлежат кольцу $\mathfrak{o}_T$.*

Определение 1.3.9. *Модуль $X^m\mathcal{L}_\mu$ назовем μ-целым, если любой ряд в этом модуле является μ-целым.*

Замечание 1.3.10. Модуль $X^m\mathcal{L}_\mu$, $m \geqslant 0$, является μ-целым.

Замечание 1.3.11. Если f – μ-целый ряд, то Δf – μ/p-целый.

Лемма 1.3.12.

1) *Модуль $X^m\mathcal{L}_\mu$ является μ-целым тогда и только тогда, когда $\mu(m+1)+1 > 0$.*

2) *Все ряды из модуля $X^m\mathcal{L}_\mu$ имеют целые коэффициенты при неположительных степенях тогда и только тогда, когда $\mu m + 1 > 0$.*

3) *Все ряды из модуля $X^m\mathcal{L}_\mu$ имеют делящиеся на p коэффициенты при неположительных степенях тогда и только тогда, когда $\mu m > 0$.*

Доказательство. Проверим 1).

а) Пусть $\mu(m+1)+1>0$ и $X^m f(X)\in X^m\mathcal{L}_\mu$, $f=\sum d_r X^r\in\mathcal{L}_\mu$. Надо проверить, что $v_T(d_r)\geqslant 0$ для $r\leqslant -m-1$. Из определения $\mathcal{L}_\mu$ и условия леммы следует: $v_T(d_r)\geqslant -\mu r\geqslant \mu(m+1)>-1$, откуда $v_T(d_r)\geqslant 0$.

б) Пусть $\mu(m+1)+1\leqslant 0$. Возьмем $\varphi=X^m(p^{-1}X^{-m-1})$ и проверим, что $p^{-1}X^{-m-1}\in\mathcal{L}_\mu$. Действительно, $v_p(p^{-1})+\mu\cdot(-m-1)=-1-\mu(m+1)\geqslant 0$. Поэтому $\varphi\in X^m\mathcal{L}_\mu$ и коэффициенты при X^{-1} у ряда φ не являются целым.

Пункты 2) и 3) леммы проверяются аналогично. □

Замечание 1.3.13. Модуль

$$X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu \quad \text{при} \quad \mu=1/p^h e, \quad \text{и} \quad p\geqslant 3$$

является μ-целым.

Проверим аналог теоремы о делении с остатком в кольце L_μ.

Предложение 1.3.14. *Пусть $f=\sum d_i x^i\in\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$ и при этом $v_T(d_m)=0$, $v_T(d_i)>0$ для $0\leqslant i\leqslant m-1$. Тогда любой ряд $g\in\mathcal{H}_\mu$ (см. (11)) единственным образом представим в виде $g=fh+r$, где $r=\sum_{i=0}^{m-1}r_iX^i$, $r_i\in\mathfrak{o}_T$, $h(x)\in X^{-m}\mathcal{H}_\mu\cap T[\![X]\!]_0$.*

Доказательство. Следуя Манину (см. [10]), рассмотрим два оператора на $T[\![X]\!]$:

$$\alpha\Big(\sum_{i\geqslant 0}c_iX^i\Big)=\sum_{i=0}^{m-1}c_iX^i,$$
$$\beta\Big(\sum_{i\geqslant 0}c_iX^i\Big)=\sum_{i\geqslant 0}c_{i+m}X^i.$$

Тогда $f=\alpha(f)+X^m\beta(f)$ и наша задача преобразуется к следующему виду:

$$\beta(g)=\beta(h\cdot\alpha(f))+\beta(hX^m\beta(f))=\beta(h\cdot\alpha(f))+h\cdot\beta(f).$$

Заметим, что $\beta(f)$ – обратимый ряд в кольце $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$.

Обозначим через y произведение $h\cdot\beta(f)$. Тогда предыдущее равенство станет равносильным равенству:

$$\beta(g)=\beta\bigg(y\cdot\frac{\alpha(f)}{\beta(f)}\bigg)+y=\bigg(I+\beta\circ\frac{\alpha(f)}{\beta(f)}\bigg)(y),$$

где I – тождественный оператор. Ясно, что $\beta \in X^{-m}\mathcal{H}_\mu \cap T[\![X]\!]_0$. Кроме того, ряд $\frac{\alpha(f)}{\beta(f)} \in p\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$. Поэтому корректно определен ряд

$$y = \left(I + \beta \circ \frac{\alpha(f)}{\beta(f)}\right)^{-1} \circ \beta(g),$$

который принадлежит при этом

$$y \in X^{-m}\mathcal{L}_\mu \cap T[\![X]\!]_0,$$

как и ряд $\beta(g)$. Значит,

$$h = y \cdot \beta(f)^{-1} \in X^{-m}\mathcal{L}_\mu \cap T[\![X]\!]_0. \qquad \square$$

1.4. Модуль корней изогении. С этого момента поле K будет у нас n-мерным локальным полем нулевой характеристики с полем вычетов $\overline{K}$ характеристики $p > 2$. Мы принимаем обозначения и терминологию работ [1] и [2].

$K^{(0)} \cong \mathbb{F}_{q_0}$, $q_0 = p^f$ – последнее поле вычетов поля K,

$v : K^* \to \mathbb{Z}$ – дискретное нормирование ранга 1,

$\bar{v} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n := v) : K^* \to \mathbb{Z}^n$ – дискретное нормирование ранга n,

$\mathfrak{o} := W(\mathbb{F}_{q_0})$ – кольцо векторов Витта,

$k := \mathrm{Quot}\ \mathfrak{o}$ – поле отношений кольца $\mathfrak{o}$,

$t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = \Pi$ – система локальных параметров в K относительно нормирования $\bar{v}$,

$\mathcal{R}_0$ – система представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_{q_0}$ в кольце $\mathfrak{o}$,

$T = k\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}$ – n-мерное абсолютно неразветвленное подполе в K,

F – формальная группа высоты h над $\mathfrak{o}_T$, $q = p^h$,

$\mathcal{R}$ – система представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_q$ в кольце $W(\mathbb{F}_q)$.

Поле T является σ-полем в смысле определения 1.1.1 и замечания 1.1.2.

$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал в K относительно нормирования v ранга 1,

$\mathfrak{o}_K$ – кольцо целых поля K относительно v,

$\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T относительно v,

Tr – оператор следа в $k/\mathbb{Q}_p$,

$W_F^N := \mathrm{Ker}[p^N]_F \subset K$,

$e := [K : T]$ – абсолютный индекс ветвления поля K (относительно v),

$e_m := e/(p^h - 1)p^{(m-1)h}$, $1 \leqslant m \leqslant N$,

$e_* := \frac{p^h e}{p^h - 1} = \frac{qe}{q-1}$,

$\bar{e} := (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ – индекс ветвления поля K относительно нормирования $\bar{v}$,

$\Psi_K := K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ – отображение взаимности à la Паршин–Като из топологической группы Милнора поля K в группу Галуа максимального абелева расширения поля K.

Лемма 1.4.1. *Для любого $z \in W_F^N \setminus W_F^{N-1}$ имеем*

$$v(z) = e_N := e/(p^h - 1)p^{(N-1)h}.$$

Доказательство. Все такие z являются корнями уравнения

$$\frac{[p^N]_F(X)}{[p^{N-1}]_F(X)} = p + a_1 x + \dots + a_{e/e_N} X^{e/e_N} + \dots, \quad a_i \in \mathfrak{o}_T,$$

причем $p | a_i$ для $1 \leqslant i < e/e_N$, и $a_{e/e_N} \in \mathfrak{o}_T^*$. Поэтому по подготовительной лемме Вейерштрасса все z будут корнями уравнения $p + a'_1 x + \dots + a'_{e/e_N} X^{e/e_N} = 0$, где $p | a_i$, $1 \leqslant i < e/e_N$, $a'_{e/e_N} \in \mathfrak{o}_T^*$. Значит все такие z имеют одинаковое нормирование e_N. $\square$

Пусть $q := p^h$ и $\beta_1, \dots, \beta_{q-1}$ – все корни уравнения $p + a_q X^{q-1} = 0$, где a_q взят из разложения $[p]_F(X) = pX + a_2 X^2 + \dots + a_q X^q + \dots$. Ясно, что $\beta_i = \beta_1 \theta_i$, где θ_i пробегает ненулевую систему представителей Тейхмюллера $\mathcal{R}^*$. Пусть L – расширение поля K, содержащее все β_i, e' – индекс ветвления поля L, v' – нормирование ранга 1 в L, и Π' – униформизующий элемент в L относительно v'. Пусть $z_1, \dots, z_{q-1}$ – все ненулевые корни уравнения $[p]_F(X) = 0$.

Лемма 1.4.2. *При надлежащей перестановке имеем:*

$$z_i \equiv \beta_i = \beta_1 \theta_i \mod \Pi' z_1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $v'(z_1^{q-1} + p/a_q) > e'$, так как

$$z_1^{q-1} + p/a_q \equiv \frac{[p]_F(z_1)}{a_q z_1} = 0 \mod (p, z_1^{q-1}) z_1.$$

Далее, подставляя z_1 в уравнение $X^{q-1}+p/a_q=0$, получаем

$$v'(z_1^{q-1}+p/a_q)=\sum_{i=1}^{q-1}v'(z_1-\beta_i).$$

Поэтому из того, что все β_i попарно различны, следует, например,

$$v'(z_1-\beta_1)>\frac{e'}{q-1}v'(z_1-\beta_i)=\frac{e'}{q-1},\quad i\neq 1.$$

Аналогичные неравенства верны для остальных z_i. $\square$

Зафиксируем базис $\theta_1=1,\theta_2,\dots,\theta_h$ кольца векторов Витта $W(\mathbb{F}_q)$ над $\mathbb{Z}_p$, состоящий из представителей системы Тейхмюллера, и пусть $\beta_i=\theta_i\beta$, где $\beta:=\beta_1$, $1\leqslant i\leqslant h$. Выберем $z_1,\dots,z_h$ в W_F^1 так, что

$$z_i\equiv\beta_i=\theta_i\beta \mod \Pi' z_1. \tag{12}$$

Предполагаем, что $W(\mathbb{F}_q)\subset K$.

Лемма 1.4.3. *Пусть $z_i^{(N)}\in W_F^N\setminus W_F^{N-1}$ и $[p^{N-1}]_F(z_i^{(N)})=z_i$, $1\leqslant i\leqslant h$. Тогда в поле K выполнены сравнения*

$$z_i^{(N)}/z_1^{(N)}\equiv\theta_i' \mod \Pi, \tag{13}$$

где $\theta_i'=\theta_i^{p^{-Nh}}$, $1\leqslant i\leqslant h$. При этом элементы $\theta_1',\dots,\theta_h'$ образуют базис $W(\mathbb{F}_q)$ над $\mathbb{Z}_p$, а элементы $z_1^{(N)},\dots,z_h^{(N)}$ – базис W_F^N.

Доказательство. Индукция по N.

1) $N=1$. Из сравнения (12) следует

$$z_i/z_1=\theta_i(1+a\Pi'),\quad a\in\mathfrak{o}_L.$$

Но z_i/z_1 и θ_i лежат в K, поэтому $1+a\Pi'=1+b\pi$, $b\in\mathfrak{o}_K$, т.е. мы получили (13) для $N=1$.

2) Индукционный переход. Из равенств

$$z_i^{(N-1)}=[p]_F(z_i^{(N)})=pz_i^{(N)}+\dots+a_qz_i^{(N)q}+\dots$$

следует

$$\frac{z_i^{(N-1)}}{z_1^{(N-1)}}=\frac{a_qz_i^{(N)q}(1+b_i\Pi)}{a_qz_1^{(N)q}(1+b_1\Pi)}=\left(\frac{z_i^{(N)}}{z_1^{(N)}}\right)^q(1+c_i\Pi),$$

где $c_i \in \mathfrak{o}_K$. Из индукционного предположения получаем

$$\left(\frac{z_i^{(N)}}{z_1^{(N)}}\right)^q \equiv \theta_i^{p-(N-1)h} \mod \Pi.$$

3) Проверим, что элементы $z_1^{(N)}, \dots, z_h^{(N)}$ образуют базис W_F^N над $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$. Если найдутся $c_1, \dots, c_h \in \mathbb{Z}_p$ такие, что

$$[c_1]_F(z_1^{(N)}) +_F + \dots +_F [c_h]_F(z_h^{(N)}) = 0,$$

то $c_1 z_1^{(N)} + \dots + c_h z_h^{(N)} \equiv 0 \mod \Pi^{e_N+1}$. Используя доказанное выше сравнение (13), получаем

$$(c_1\theta_1' + c_2\theta_2' + \dots + c_h\theta_h')z_1^{(N)} \equiv 0 \mod \Pi^{e_N+1}.$$

Значит, $c_1\theta_1' + \dots + c_h\theta_h' \equiv 0 \mod \Pi$. Но элементы $\theta_1', \dots, \theta_h'$ – базис $W(\mathbb{F}_q)$ над $\mathbb{Z}_p$, поэтому $c_i = pc_i'$, $1 \leqslant i \leqslant h$, и мы приходим к равенству

$$[c_1']_F(z_1^{(N-1)}) +_F + \dots +_F [c_h']_F(z_h^{(N-1)}) = 0$$

в модуле $W_F^{N_1}$. Откуда по индукционному предположению получаем $c_i' \equiv 0 \mod p^{N-1}$. □

Пусть $z_1, \dots, z_h$ – базис W_F^N, для которого $z_i/z_1 \equiv \theta_i \mod \Pi$ и $\theta_1 = 1$, $\theta_2, \dots, \theta_h$ – базис $W(\mathbb{F}_q)$ над $\mathbb{Z}_p$. Пусть

$$\theta_{ij} := \theta_i/\theta_j, \quad \theta_{i1} := \theta_i.$$

Непосредственно из леммы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.4.

$$z_i/z_j \equiv \theta_{ij} \mod \Pi$$

и элементы θ_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant h$, *образуют базис* $W(\mathbb{F}_q)$ *над* $\mathbb{Z}_p$ *при фиксированном* j.

Пусть

$$\Theta := (\Delta^{i-1}(\theta_j)) = (\theta_j^{p^{i-1}})_{1 \leqslant i,j \leqslant h}.$$

Лемма 1.4.5. *Матрица* Θ *обратима в кольце* $\mathfrak{o} := W(\mathbb{F}_q)$.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_h$ – двойственный базис в кольце $\mathfrak{o}$ к базису $\theta_1, \dots, \theta_h$ относительно оператора Tr, т.е. $\operatorname{Tr} \theta_i v_j = \delta_{ij}$. Тогда матрицей, обратной к Θ, будет матрица

$$\Theta' := \begin{pmatrix} v_1, v_1^{\Delta}, \dots, v_1^{\Delta^{h-1}} \\ v_2, v_2^{\Delta}, \dots, v_2^{\Delta^{h-1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v_h, v_h^{\Delta}, \dots, v_h^{\Delta^{h-1}} \end{pmatrix},$$

все элементы которой лежат в $\mathfrak{o}$. $\square$

1.5. Многомерный символ Гильберта. Символ Гильберта для формальной группы F над $\mathfrak{o}_T$ определяется следующим образом:

$$(\cdot,\cdot)_F = (\cdot,\cdot)^N_{F,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \to W_F^N$$
$$(\alpha,\beta)^N_{F,K} = \Psi_K(\alpha)(\widetilde{\beta}) -_F \widetilde{\beta},$$

где $\widetilde{\beta}$ берется из пополнения алгебраического замыкания K и является корнем уравнения $[p^N]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$.

Определим, кроме того, многомерный символ Гильберта для F по изогении $f^{(N)}$ и формальной группе F_N (см. (8))

$$\{\cdot,\cdot\}_F = \{\cdot,\cdot\}^N_{F,K} : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F(\mathfrak{M}) \to W_F^N$$
$$\{\alpha,\beta\}^N_{F,K} = \Psi_K(\alpha)(\bar{\beta}) -_F \bar{\beta}, \tag{14}$$

где $f^{(N)}(\bar{\beta}) = \beta$.

Из определения обоих спариваний и соотношений

$$[a]_{F,F_N} = \lambda_N^{-1} \circ a \circ \lambda, \quad a \in \mathbb{Z}_p,$$
$$f^{(N)} = \lambda_N^{-1} \circ p_1^{(N)} \circ \lambda$$

вытекает равенство, которое связывает оба спаривания

$$(\alpha,\beta)_F = \{\alpha, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\beta)\}_F. \tag{15}$$

Отметим, далее, следующие свойства спариваний $(\cdot,\cdot)_F$ и $\{\cdot,\cdot\}_F$.

H.1: Оба спаривания аддитивны по первому аргументу и $\mathbb{Z}_p$-линейны по второму.

H.2: $(\alpha,\beta)_F = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – норма в $K_n^{\mathrm{top}}(K(\widetilde{\beta}))/K_n^{\mathrm{top}}(K)$,

$\{\alpha,\beta\}_F=0 \Leftrightarrow \alpha$ – норма в $K_n^{\mathrm{top}}(K(\bar\beta))/K_n^{\mathrm{top}}(K)$.

Н.3: Если формальная группа G изоморфна F и $G=f(F(f^{-1}(X), f^{-1}(Y))$ для $f\in\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$, то

$$(\alpha,\beta)_G=f((\alpha,f^{-1}(\beta))_F).$$

Аналогичное свойство для спаривания $\{\cdot,\cdot\}_F$ выглядит следующим образом. Пусть $\mathcal{E}:G\to F$ – гомоморфизм формальных групп и $\mathcal{E}_N$ – соответствующий гомоморфизм групп G_N и F_N из последовательности (8) для G и F соответственно, т.е. $\mathcal{E}_N\circ g^{(N)}=f^{(N)}\circ\mathcal{E}_N$. Тогда

Н$'$3: $\{\alpha,\mathcal{E}_N(\beta)\}_F=\mathcal{E}(\{\alpha,\beta\}_G)$.

По поводу доказательств см. [1, п. 1.5].

1.6. Модули кривых Картье мультипликативной группы. Пусть K – n-мерное локальное поле, $t_1,\dots,t_{n-1},t_n=\Pi$ – система локальных параметров, $k=\operatorname{Quot}W(K^{(0)})$ – поле отношений кольца векторов Витта последнего поля вычетов $K^{(0)}$ поля K. Элемент $\alpha\in K$ представим в виде

$$\alpha=\sum_{\bar r\in I}a_{\bar r}t_1^{r_1}\dots t_{n-1}^{r_{n-1}}\Pi^{r_n},\quad a_{\bar r}\in\mathfrak{o}:=W(K^{(0)}),$$

где $\bar r=(r_1,\dots,r_n)$ пробегает некоторый *допустимый* набор индексов из $\mathbb{Z}^n$. При этом $I=I(\alpha)$ в $\mathbb{Z}^n$ называется *допустимым*, если для заданных $i_{l+1},\dots,i_n$ в $\mathbb{Z}$, $l\leqslant n$, существует $i\in\mathbb{Z}$, для которого выполнено следующее условие: если $\bar r=(r_1,\dots,r_l,i_{l+1},\dots,i_n)\in I$, то $r_l\geqslant i$ (см. [11]).

Рассмотрим $n+1$-мерное локальное поле

$$M=k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}((X)). \tag{16}$$

Элементы $t_1,\dots,t_{n-1},p,X$ в M образуют систему локальных параметров. Пусть

$$\mathfrak{o}_M=\left\{\sum_{\bar r\in I,\bar r\geqslant\bar 0}a_{\bar r}t_1^{r_1}\dots t_{n-1}^{r_{n-1}}X^{r_n}\,\middle|\,a_{\bar r}\in\mathfrak{o}\right\}, \tag{17}$$

$\mathfrak{o}'_M\subset\mathfrak{o}_M$ – то же самое для $\bar r>\bar 0$.

Положим

$$\begin{aligned}A&=\mathfrak{o}\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\},\\ \mathfrak{o}_{(p)}&:=A((X)),\\ \mathcal{U}_m&=1+\mathfrak{o}'_M,\end{aligned} \tag{18}$$

$$H_m = \langle t_1\rangle \times \dots \times \langle t_{n-1}\rangle \times \langle X\rangle \times \mathcal{R}^* \times \mathcal{U}_m \subset \mathfrak{o}^*_{(p)}.$$

Назовем H_m *модулем кривых Картье для мультипликативной группы* K^*. Имеем следующий (неканонический) сюръективный гомоморфизм

$$\eta_m : \mathfrak{o}_{(p)} \to K$$
$$\alpha(X) \mapsto \alpha(\Pi),$$

который индуцирует гомоморфизм групп

$$\eta_m : H_m \to K^*.$$

Прообраз элемента $\alpha \in K^*$ при гомоморфизме η_m обозначаем $\underline{\alpha}$. Таким образом,

$$\underline{\alpha}(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi) = \alpha.$$

Пусть $\mathrm{Eis}(X) = p + a_1X + \dots + a_eX^e + \dots \in A[\![X]\!]$ – ряд Эйзенштейна для Π, т.е. $a_1, \dots, a_{e-1}$ делятся на p, $a_e \in A^*$, и $\mathrm{Eis}(\Pi) = 0$.

Лемма 1.6.1. *Пусть $\rho(X)$ – ряд из $A[\![X]\!]$, для которого $\rho(\Pi) = 0$, т.е. $\eta_m(\rho(X)) = 0$. Тогда $\rho(X)$ делится на $\mathrm{Eis}(X)$ в $A[\![X]\!]$ (см. лемма 4, [1]).*

Обозначим

$$\mathcal{U}_{\mathrm{Eis}} = \{1 + \mathrm{Eis}(X) \cdot \varphi(X) | \varphi(X) \in A[\![X]\!], \deg\varphi > \bar{0}\}. \tag{19}$$

Предложение 1.6.2. *Имеет место точная последовательность*

$$1 \to \mathcal{U}_{\mathrm{Eis}} \to H_m \xrightarrow{\eta_m} K^* \to 1$$

(см. предложение 3, [1]).

На модуле $\mathfrak{o}'_M$ определена функция Артина–Хассе:

$$E(\alpha(X)) = \exp\left(\left(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots\right)(\alpha(X))\right) \in \mathcal{U}_m,$$

а на группе H_m определена обратная функция

$$l(\alpha(X)) = \log \frac{\alpha(X)^p}{\Delta\alpha(X)} \in \mathfrak{o}'_M.$$

Функции E и l дают взаимно обратные изоморфизмы между $\mathfrak{o}'_M$ и $\mathcal{U}_m$.

1.7. Модули кривых Картье для формальной группы. Рассмотрим формальный модуль $F(\mathcal{H}_\mu)$ (см. (11)). При подстановке $X \mapsto \Pi$ получаем сюръективный (неканонический) гомоморфизм $\mathbb{Z}_p$-модулей:

$$\eta_F : F(\mathcal{H}_\mu) \to F(\mathfrak{M})$$
$$\alpha(X) \mapsto \alpha(\Pi).$$

Для каждого $\alpha \in F(\mathfrak{M})$ выберем прообраз $\underline{\alpha}$ элемента α при гомоморфизме η_F:

$$\underline{\alpha} \in F(\mathcal{H}_\mu) \quad \text{и} \quad \underline{\alpha}(\Pi) = \alpha. \tag{20}$$

По предположению, $W_F^N = \operatorname{Ker}[p^N]_F \subset F(\mathfrak{M})$. В $\mathbb{Z}_p$-модуле W_F^N фиксируем систему образующих

$$W_F^N = \langle z_1, \ldots, z_h \rangle$$

(см. лемму 1.4.3). Пусть z – одна из этих образующих и $\underline{z}$ – ее прообраз в смысле (20).

Рассмотрим следующие элементы в $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$:

$$s_m := f^{(m)} \circ \underline{z}, \quad 1 \leqslant m \leqslant N, \tag{21}$$

$$\operatorname{Eis}_F(x) := s_N / s_{N-1} = V \circ \underline{z}, \quad V := f^{(N)}/f^{(N-1)},$$

$$W^{(m)} := p_1^{(m)} \lambda \circ \underline{z} = \lambda_m \circ s_m, \tag{22}$$

$$W := W^{(N)}, \quad W_i := p_1^{(N)} \lambda \circ \underline{z}_i.$$

Лемма 1.7.1.

1) *Ряд* $\operatorname{Eis}_F(X)$ *является рядом Эйзенштейна для локального параметра* Π, *т.е.* $\operatorname{Eis}_F(\Pi) = 0$ *и* $\operatorname{Eis}_F(X) = \sum\limits_{r \geqslant 0} a_r X^r$, $a_r \in \mathfrak{o}_T$, *где* a_r *делятся на* p, *если* $r < e$, *и* a_0 *не делится на* p^2, *кроме того,* $p \nmid a_e$.

2) *Если* g *– ряд из* $\mathcal{H}_\mu$, $g(\Pi) = 0$, *то* $g(X)$ *делится на* $\operatorname{Eis}_F(X)$:

$$g(x) = \operatorname{Eis}_F(X)\varphi(X),$$

где $\varphi \in X^{-e}\mathcal{H}_\mu \cap T[\![X]\!]$.

Доказательство. Первый пункт следует из леммы 1.4.1.

Далее, согласно предложению 1.3.14, ряд $g(X)$ можно представить в виде: $g = \operatorname{Eis}_F(X) \cdot \varphi + r$, где $r = \sum\limits_{i=0}^{m-1} r_i X^i$, $r_i \in \mathfrak{o}_T$, $\varphi \in X^{-e}\mathcal{H}_\mu \cap T[\![X]\!]_0$. Так как степень $r(X)$ меньше e, $r \in \mathfrak{o}_T[X]$ и $r(\Pi) = 0$, то получаем, что $r(X) = 0$. $\square$

Лемма 1.7.2. *Пусть* $\beta \in F_N(\mathcal{H}_\mu)$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{e}$, *и* $\beta(\Pi) = 0$. *Тогда* $\lambda_N(\beta) \in \mathcal{L}_\mu^+$.

Замечание 1.7.3. Эта лемма является основой в доказательстве независимости спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ (см. ниже п. 2.4).

Доказательство леммы. Из определения модуля $\mathcal{H}_\mu$ (см. (11)), лемм 1.2.13 и 1.7.1 следует, что ряд $\lambda_N(\beta)$ имеет следующие четыре типа слагаемых:

$$ap^{p^{lh}-l}X^{p^{lh}k}, \quad ap^{-l}X^{p^{lh}(k+e)},$$
$$ap^{p^{lh}-l}c_m^{p^{lh}}X^{p^{lh}(m-e+e_*)}, \quad ap^{-l}c_m^{p^{lh}}X^{p^{lh}(m+e_*)},$$

где $a \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]$, $l \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, $m > e - e_*$, $v(c_m)e \geqslant -\mu m$. Остальные слагаемые ряда $\lambda_N(\beta)$ имеют нормирование ν (см. (10)) больше, чем одно из этих четырех.

Далее непосредственно из определения кольца $\mathcal{L}_\mu$ проверяем, что все эти слагаемые лежат в $\mathcal{L}_\mu^+$. $\square$

Предложение 1.7.4. *Положим*

$$\mathcal{U}_F := \{\mathrm{Eis}_F(X) \cdot \varphi(X) | \varphi \in X^{-e}\mathcal{H}_\mu \cap T[\![X]\!]_0\} \tag{23}$$

Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_F \longrightarrow F(\mathcal{H}_\mu) \xrightarrow{\eta_F} F(\mathfrak{M}) \longrightarrow 0$$

(см. предложение 4, [1]*).*

1.8. Функции Артина–Хассе.

Пусть T – σ-поле в многомерном локальном поле K индекса ветвления e, пусть $\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T и F – формальная группа над $\mathfrak{o}_T$ с логарифмом λ и каноническим специальным элементом u_0 (см. п. 1.2), $h := \mathrm{ht}F < \infty$.

Рассмотрим кольцо $T[\![X]\!]_0$ (соответственно $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$) и определим формальный $\mathbb{Z}$-модуль $F(T[\![X]\!]_0$ (соответственно $F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$), положив $f +_F g = F(f,g)$ для $f, g \in T[\![X]\!]_0$ (соответственно $f, g \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$). Кольцо $T[\![X]\!]_0$ и формальный модуль $F(T[\![X]\!]_0)$ являются модулями над кольцом операторов D'_Δ, а кольцо $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$ и формальный модуль $F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$ – модули над D_Δ (см. (2)). Поэтому можно определить функции

$$\begin{gathered}E_F : T[\![X]\!]_0 \to F(T[\![X]\!]_0)\\ E_F(\varphi) := \lambda^{-1}(pu_0^{-1} \circ \varphi),\\ l_F : F(T[\![X]\!]_0) \to T[\![X]\!]_0\\ l_F(\psi) := \frac{u_0}{p} \circ \lambda(\psi).\end{gathered}$$

Лемма 1.8.1. *Функции E_F и l_F задают биективные взаимно обратные изоморфизмы между соответствующими модулями:*

$$\begin{gathered}E_F(T[\![X]\!]_0) = F(T[\![X]\!]_0),\\ l_F(F(T[\![X]\!]_0)) = T[\![X]\!]_0,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}E_F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0) = F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0),\\ l_F(F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)) = \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0.\end{gathered} \tag{25}$$

Доказательство. 1) Пусть $\varphi \in T[\![X]\!]_0$, тогда

$$(l_F \circ E_F)(\varphi) = \left(\frac{u_0}{p} \circ \lambda \circ \lambda^{-1} \circ pu_0^{-1}\right)(\varphi) = \varphi.$$

Аналогично $(E_F \circ l_F)(\psi) = \psi$ для $\psi \in F(T[\![X]\!]_0)$. Отсюда следуют равенства (24). То, что E_F и l_F – гомоморфизмы соответствующих модулей, следует из аддитивности оператора Δ и свойств формального логарифма λ и экспоненты λ^{-1}.

2) Проверим (25). Любой ряд из $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$ можно представить в виде суммы мономов вида $Y := \theta t_1^{i_1} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} X^r$, $\theta \in \mathcal{R}$, $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 1$. Тогда по определению оператора Δ (см. (1), и замечание 1.1.2) имеем: $\Delta Y = Y^p$, и поэтому

$$E_F(Y) = \lambda^{-1}(pu_0^{-1} \circ Y) = \varphi_F(Y) \in \mathfrak{o}_T[\![Y]\!]_0 \subset F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0) \tag{26}$$

(см. (5) относительно φ_F).

Аналогичное рассуждение верно для функции l_F на модуле $F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$. $\square$

Рассмотрим теперь модули $\mathcal{H}_\mu$ и $F(\mathcal{H}_\mu)$ (см. (11)).

Предложение 1.8.2. *Пусть* $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu < \frac{1}{e}$. *Функции* E_F *и* l_F *определяют взаимно обратные изоморфизмы* $\mathbb{Z}_p$*-модулей* $\mathcal{H}_\mu$ *и* $F(\mathcal{H}_\mu)$*:*

$$\mathcal{H}_\mu \xrightarrow{E_F} F(\mathcal{H}_\mu) \xrightarrow{l_F} \mathcal{H}_\mu.$$

Доказательство. Модуль $\mathcal{H}_\mu$ по определению является суммой двух модулей $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$ и $X^{e_*}\mathcal{L}_\mu \cap T[\![X]\!]_0$. Мы уже доказали в лемме 1.8.1, что $E_F(\varphi) \in F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0)$ для $\varphi \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$. Пусть теперь $\varphi \in X^{e_*}\mathcal{L}_\mu$. Тогда этот ряд можно представить в виде суммы мономов типа

$$d_r X^{r+e_*} = p^{i_r} Y X^{r+e_*},$$

где $d_r = p^{m_r}\theta t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} \in T$, $Y := \theta t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}}$, $\theta \in \mathcal{R}$, $i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $m_r := v_T(d_r) \geqslant -\mu r$. Если $m_r \geqslant 0$, то моном $p^{m_r} Y X^{r+e_*}$ можно далее представить в виде суммы мономов YX^{r+e_*}, и тогда из (26) следует, что

$$E_F(YX^{r+e_*}) \in F(\mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0) \subset F(\mathcal{H}_\mu).$$

Пусть $m_r < 0$, и $f := E_F(p^{m_r} Y X^{r+e_*}) \in F(T[\![YX^{r+e_*}]\!]_0)$. Тогда по лемме 1.8.1 имеем

$$[p^{-m_r}]_F(f) = E_F(YX^{r+e_*}) \in F(\mathfrak{o}_T[\![YX^{r+e_*}]\!]_0).$$

Отсюда и из вида изогении $[p^{-m_r}]_F$ непосредственной проверкой следует, что $f(YX^{r+e_*}) \in X^{e_*}\mathcal{L}_\mu$ при $\mu \geqslant \frac{1}{p^h e}$. Значит, $E_F(\mathcal{H}_\mu) \subset F(\mathcal{H}_\mu)$. Для функции l_F проводится аналогичное рассуждение.

Свойства гомоморфизма $\mathbb{Z}_p$-модулей для функций E_F и l_F следуют из определения этих функций. □

Пусть N – фиксированное натуральное число.

Аналогичным образом вводятся функции E_N и l_N для формальной группы $F_N = \mathcal{A}^N F$ с логарифмом λ_N (см. (8)). Пусть $u_N = p - b_1\Delta - \dots - b_h\Delta^h$ – канонический специальный элемент группы F_N. В классе изоморфных F_N формальных групп существует единственный канонический представитель F_b типа u_N с логарифмом Артина–Хассе:

$$\lambda_b(X) = \frac{u_N}{p}(X) = X + \beta_1 X^p + \beta_2 X^{p^2} + \dots$$

Тогда отображения E_N и l_N задаются в виде:

$$E_N(\varphi) = \lambda_N^{-1}\left(\frac{p}{u_N} \circ \varphi\right) = \lambda_N^{-1} \circ (1 + \beta_1\Delta + \beta_2\Delta^2 + \dots)(\varphi),$$
$$l_N(\psi) = \left(\frac{u_N}{p} \circ \lambda_N\right)(\varphi) = \left(1 - \frac{b_1}{p}\Delta - \dots - \frac{b_h}{p}\Delta^h\right)(\lambda_N(\psi))$$

для $\varphi \in \mathcal{H}_\mu$, $\psi \in F_N(\mathcal{H}_\mu)$, соответственно.

Лемма 1.8.3. *Функции E_N и l_N удовлетворяют предложению* 1.8.2 *для модулей $\mathcal{H}_\mu$ и $F_N(\mathcal{H}_\mu)$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu < \frac{1}{e}$. При этом*

$$l_N(f^{(N)}(\psi)) = p_1^{(N)} l_F(\psi). \tag{27}$$

Доказательство. Надо доказать только равенство (27). Все остальное проводится так же как, в предложении 1.8.2. Используем равенства:

$$u_N \circ p_1^{(N)} = p_1^{(N)} \circ u_0, \quad f^{(N)}(\psi) = \lambda_N^{-1} \circ p_1^{(N)} \circ \lambda \circ \psi$$

(см. лемму 1.2.12, п. 3), 4)). Тогда

$$l_N(f^{(N)}(\psi)) = \left(\frac{u_N}{p} \circ p_1^{(N)} \circ \lambda\right)(\psi)$$
$$= p_1^{(N)} \circ \left(\frac{u_0}{p} \circ \lambda\right)(\psi) = p_1^{(N)} l_F(\psi). \qquad \square$$

1.9. Арифметика формального модуля. Базис Шафаревича.

Напомним, что элемент $\omega \in F_N(\mathfrak{M})$ называется *примарным*, если расширение $K(\widetilde{\omega})/K$ – неразветвлено, где $f^{(N)}(\widetilde{\omega}) = \omega$. В мультипликативном случае, в случае формальных групп Любина–Тейта и формальных групп Хонды такие элементы были построены в работах [7, 9, 8, 12, 1]. Обобщим эти результаты на формальную группу Хонды, определенную над кольцом σ-поля. Пусть K – n-мерное локальное поле, T – его σ-подполе, пусть, далее, $b \in \mathfrak{o} := W(K^{(0)})$ и

$$\hat{b} = b + b^\sigma + \dots + b^{\sigma^{h-1}},$$

$s := s(z) = s_N$ (см. (21)).

Предложение 1.9.1. *Элемент*

$$\omega(b) := E_N(\hat{b}\lambda_N(s))|_{X=\Pi}$$

корректно определен, принадлежит модулю $F_N(\mathfrak{M})$ и является примарным элементом в нем. Он не зависит от способа разложения образующей z в степенной ряд по локальным параметрам $t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi$ и не зависит от выбора системы локальных параметров (по модулю $f^{(N)}(F_N(\mathfrak{M}))$). Кроме того, для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K^*$ имеем

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \omega(b)\}_F = [\delta \operatorname{Tr} b]_F(z), \tag{28}$$

где $\delta = \det(v_i(\alpha_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Доказательство. Заметим сперва, что ряд $\hat{b}\lambda_N(s)$ лежит в модуле $\mathcal{H}_\mu$, и поэтому $E_N(\hat{b}\lambda_N(s)) \in F_N(\mathcal{H}_\mu)$ (см. предложение 1.8.2). Согласно замечанию 1.3.7 определена подстановка в любой ряд $f(X)$ из $\mathcal{H}_\mu$ простого элемента Π и при этом $f(\Pi) \in \mathfrak{M}$. Поскольку $F_N(\mathcal{H}_\mu)$ совпадает как множество с $\mathcal{H}_\mu$, то элемент $\omega(b)$ корректно определен и принадлежит $F_N(\mathfrak{M})$. Остальные утверждения предложения проверены в [1], предложение 6. $\square$

Чтобы построить все образующие базиса модуля $F_N(\mathfrak{M})$, который мы будем называть *базис Шафаревича*, нам нужны следующие изоморфизмы. Пусть

$$g_0 = p_{N-1}x + x^{p^h}, \quad g_{\rho,a} = p_{N-1}x + p_{N-1}ax^{p^\rho} + x^{p^h}, \\ a \in \mathbb{Z}_p, \quad 1 \leqslant \rho < fh$$

– многочлены Эньяра (см. [13, §8]).

Пусть u_{N-1} – канонический специальный элемент группы F_{N-1} из последовательности (8). Тогда по предложению 1.2.10 существуют единственные (с точностью до изоморфизма) формальные группы G_0 и $G_{\rho,a}$ со специальным элементом u_{N-1}, для которых g_0, $g_{\rho,a}$ являются допустимыми изогениями в группы G_0' и $G_{\rho,a}'$ соответственно. Согласно предложению 1.2.8 группы G_0' и $G_{\rho,a}'$ имеют тот же специальный элемент u_N, что и группа F_N, поэтому они обе изоморфны ей. Пусть

$$\mathfrak{G}_N^0 : G_0' \to F_N, \mathfrak{G}_N^{\rho,a} : G_{\rho,a}' \to F_N \tag{29}$$

– соответствующие изоморфизмы.

Предложение 1.9.2 (базис Шафаревича). *Элементы*

$$\omega_i(b), \quad b \in \mathfrak{o}, \quad 1 \leqslant i \leqslant h,$$
$$\mathfrak{G}_N^0(\theta t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}) \quad \mathfrak{G}_N^{\rho,a}(\theta t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}),$$

где $\theta \in \mathcal{R}$, $a \in \mathbb{Z}_p$, $1 \leqslant \rho < fh$, $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$, $p \nmid \bar{i}$, $0 < i_n \leqslant e_*$, $i_1, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{Z}$, *дают систему образующих* $\mathbb{Z}_p$*-модуля* $F_N(\mathfrak{M})$. *При этом*

$$\{(t_1, \dots, t_n), \omega_i(b)\}_F = [\operatorname{Tr} b]_F(z_i),$$
$$\{(t_1, \dots, t_n), \mathfrak{G}_N^0(\theta t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n})\}_F$$
$$= \{(t_1, \dots, t_n), \mathfrak{G}_N^{\rho,a}(\theta t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n})\}_F = 0$$

(здесь $\omega_i(b)$ *соответствует* $s := s^{(i)} = f^{(N)}(z_i)$ *в предложении* 1.9.1 *и* $t_n := \Pi$*).*

Доказательство проходит так же, как в теореме 3, [14] и предложение 3, [1].

1.10. Примарные ряды.

Определение 1.10.1. *Ряд* $\mathcal{P}$ *из модуля* $X^{-m}\mathcal{L}_\mu$, $m \in \mathbb{N}$, *будем называть примарным, если существует последовательность рядов*

$$\mathcal{P}^{(0)}, \mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(N)} = \mathcal{P}, \tag{30}$$

которая при всех $0 \leqslant \varkappa \leqslant N$ *удовлетворяет условиям:*

а) $\mathcal{P}^{(\varkappa)} \in X^{-m/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$,

б) $X\frac{\partial}{\partial X}\mathcal{P}^{(\varkappa)}$, $t_i\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{P}^{(\varkappa)}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

принадлежат модулю $p^\varkappa X^{-m(1+p^{h-1})/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$,

в) $\Delta^h \mathcal{P}^{(\varkappa-1)} - \mathcal{P}^{(\varkappa)} \in p^\varkappa X^{-m(1+p^{h-1})/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$.

Замечание 1.10.2. Коэффициенты рядов $\mathcal{P}^{(\varkappa)}$, которые находятся в поле T, можно рассматривать, в свою очередь, как ряды от переменных $t_1, \dots, t_{n-1}$ с коэффициентами в поле k (см. п. 1.4). Поэтому ряды $\mathcal{P}^{(\varkappa)}$ являются рядами от переменных $t_1, \dots, t_{n-1}, X$ над k.

Замечание 1.10.3. Последовательность (30) будем называть *примарной* для ряда $\mathcal{P}$.

Предложение 1.10.4. *Пусть $\mathcal{P} \in X^{-m}\mathcal{L}_\mu$, $\mathcal{P}' \in X^{-m'}\mathcal{L}_\mu$ – примарные ряды с примарными последовательностями $\mathcal{P}^{(\varkappa)}$, $\mathcal{P}'^{(\varkappa)}$ соответственно.*

1). Если $m = m'$, то $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$ – примарный ряд.

2). $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P}'$ – примарный ряд в модуле

$$X^{-(m+m')}\mathcal{L}_\mu.$$

3). $\Delta\mathcal{P}$ – примарный ряд в $X^{-pm}\mathcal{L}_{\mu/p}$.

Для рядов из 1)–3) следующие последовательности примарны:

$$(\mathcal{P} + \mathcal{P}')^{(\varkappa)} = \mathcal{P}^{(\varkappa)} + \mathcal{P}'^{(\varkappa)},$$
$$(\mathcal{P} \cdot \mathcal{P}')^{(\varkappa)} = \mathcal{P}^{(\varkappa)} \cdot \mathcal{P}'^{(\varkappa)},$$
$$(\Delta\mathcal{P})^{(\varkappa)} = \Delta\mathcal{P}^{(\varkappa)}.$$

Доказательство. См. [2]. □

Построим примарные ряды в модуле $X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{e}$. Рассмотрим ряд

$$W^{(\varkappa)} = p_1^{(\varkappa)}\lambda \circ \underline{z}$$

(см. (22)). Пусть

$$\lambda(X) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{c_k}{p^k} X^{p^{kh}}, \quad c_k \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0^*$$

и $\mathcal{B}$ – некоторый оператор из $1 + \Delta D_\Delta$. Из леммы 1.4.1 следует, что

$$\underline{z}(X) \equiv a(z)X^{e_N} \mod (p, X)X^{e_N}, \tag{31}$$

где $a(z) \in \mathfrak{o}_T^*$.

Лемма 1.10.5.

$$\mathcal{B} \circ W^{(\varkappa)} \in X^{e_*/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}, \tag{32}$$

при этом

$$\mathcal{B} \circ W^{(\varkappa)} = c_\varkappa \underline{z}^{p^{\varkappa h}} \cdot \varepsilon(X), \tag{33}$$

где $\varepsilon(X)$ – главная единица в $\mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$.

Доказательство. По лемме 1.2.13 можно написать

$$W^{(\varkappa)} = p^\varkappa c_0 \underline{z} + p^{\varkappa-1} c_1 \underline{z}^{p^h} + \cdots + c_\varkappa \underline{z}^{p^{\varkappa h}} + \ldots, \tag{34}$$

где $c_i \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]^*$. Из (31) и определения оператора $\mathcal{B}$ следует сравнение в кольце $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$:

$$\mathcal{B}(c_k \underline{z}^{p^{kh}}) \equiv c_k \underline{z}^{p^{kh}} \mod (p, X) X^{p^{kh} e_N}.$$

Отсюда и из (34) получаем

$$\mathcal{B} \circ W^{(\varkappa)} = p^{\varkappa} c'_0 \underline{z} + p^{\varkappa-1} c'_1 \underline{z}^{p^h} + \dots + c'_{\varkappa} \underline{z}^{p^{\varkappa h}} + \dots,$$

где $c'_k \equiv c_k \mod (p, X)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \circ W^{(\varkappa)} = c_{\varkappa} \underline{z}^{p^{\varkappa h}} (d_{\varkappa} + p^{\varkappa} d_0 \underline{z}^{1-p^{\varkappa h}} + \dots \\ + p d_{\varkappa-1} \underline{z}^{p^{(\varkappa-1)h} - p^{\varkappa h}} + \frac{1}{p} d_{\varkappa+1} \underline{z}^{p^{(\varkappa+1)h} - p^{\varkappa h}} + \dots) \\ = c_{\varkappa} \underline{z}^{p^{\varkappa h}} \cdot \varepsilon(X), \end{aligned}$$

где $d_{\varkappa} = c'_{\varkappa}/c_{\varkappa} \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]^*$ и $d_{\varkappa} \equiv 1 \mod (p, X)$. Непосредственно, используя определение кольца $\mathcal{L}_{\mu}$, проверяем, что $\varepsilon(X)$ – главная единица в $\mathcal{L}_{\mu}$ для $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{e}$, откуда получаем (33).

Условие (32) следует теперь из (31). □

Пусть $B_{\varkappa} \in 1 + \Delta D_{\Delta}$ – оператор из (9).

Лемма 1.10.6.

$$W^{(\varkappa)} \equiv (B_{\varkappa-1} \circ \Delta^h) W^{(\varkappa-1)} \mod p^{\varkappa} \mathfrak{o}_T[\![X]\!].$$

Доказательство. См. лемма 2, п. 3.1.4 в [2]. □

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P} :=& \mathcal{P}^{(N)} = 1/W \\ \mathcal{P}^{(\varkappa)} :=& 1/\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)}, \quad \mathfrak{o} \leqslant \varkappa \leqslant N, \end{aligned}$$

где $\mathcal{B}^{(\varkappa)} := B_{N-1}^{\sigma^{-(N-\varkappa)h}} \circ B_{N-2}^{\sigma^{-(N-\varkappa-1)h}} \circ \dots \circ B_{\varkappa}^{\sigma^{-h}}$. Из равенства $\Delta B_m = B_m^{\sigma} \Delta$ (здесь σ действует как автоморфизм Фробениуса на коэффициенты ряда B_m из $1 + \Delta D_{\Delta}$) и определения оператора $\mathcal{B}^{(\varkappa)}$ следует тождество

$$\Delta^h \mathcal{B}^{(\varkappa)} = \mathcal{B}^{(\varkappa+1)} \circ B_{\varkappa} \circ \Delta^h. \tag{35}$$

Предложение 1.10.7. *Ряд $\mathcal{P}$ вместе с последовательностью $\mathcal{P}^{(0)}, \dots, \mathcal{P}^{(N)}$ является примарным рядом в модуле $X^{e_*}\mathcal{L}_\mu$ для каждого $\mu \in \left[\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{e}\right]$.*

Доказательство. Из леммы 1.10.6 следует

$$\mathcal{P}^{(\varkappa)} \in X^{-e_*/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}^*_{\mu p^{(N-\varkappa)h}} \tag{36}$$

для каждого μ: $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant 1/e$, т.е. выполнено условие а) в определении 1.10.1.

Проверим условие б) в 1.10.1. Действительно,

$$\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)} = p^\varkappa \sum_{i \geqslant} d_i \Delta^i(\lambda \circ \underline{z}), \quad d_i \in \mathfrak{o}_T \tag{37}$$

(следует из определения ряда $W^{(\varkappa)}$ и оператора $\mathcal{B}^{(\varkappa)} \in 1 + \Delta D_\Delta$).

Легко проверить, что для любого ряда $g \in \mathfrak{o}\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}((X))$ и любого $i \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \Delta^i g = p^i t_k^{-1} \Delta^i \left(t_k \frac{\partial g}{\partial t_k} \right) \tag{38}$$

(здесь $t_n := X$). Применяя это равенство к (37) и учитывая, что производная логарифма имеет целые коэффициенты, получаем

$$t_m \frac{\partial}{\partial t_m} (\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)}) \in p^\varkappa \mathfrak{o}_T [\![X]\!].$$

Поэтому из (36) следует

$$\begin{aligned} t_m \frac{\partial}{\partial t_m} (1/\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)}) &= - \frac{t_m \frac{\partial}{\partial t_m} (\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)})}{(\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)})^2} \\ &\in p^\varkappa X^{-2e_*/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}, \ \frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant 1/e, \end{aligned}$$

т.е. условие б) в определении 1.10.1, т.к. $-2e_* \geqslant -e_*(1 + p^{h-1})$. Осталось проверить условие в). Отметим сперва, что оба ряда $\Delta^h \mathcal{P}^{(\varkappa-1)}$ и $\mathcal{P}^{(\varkappa)}$ принадлежат кольцу $L_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$ для каждого $\mu \in \left[\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{e}\right]$ (см. (36) и замечание 1.3.2). Поэтому имеет смысл их разность:

$$\Delta^h \mathcal{P}^{(\varkappa-1)} - \mathcal{P}^{(\varkappa)} = \frac{\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)} - \Delta^h \circ \mathcal{B}^{(\varkappa-1)} \circ W^{(\varkappa-1)}}{(\mathcal{B}^{(\varkappa-1)} \circ W^{(\varkappa-1)}) \cdot (\mathcal{B}^{(\varkappa)} \circ W^{(\varkappa)})}.$$

Числитель этой дроби, согласно (35), равен $\mathcal{B}^{(\varkappa)}\circ(W^{(\varkappa)}-(B_{\varkappa-1}\circ\Delta^h)\circ W^{(\varkappa-1)})$ и принадлежит кольцу $p^{\varkappa}\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$ по лемме 1.10.6 и определению операторов $\mathcal{B}^{(\varkappa)}$. Поэтому, применяя (36), получаем

$$\Delta^h\mathcal{P}^{(\varkappa_1)}-\mathcal{P}^{(\varkappa)}\in p^{\varkappa}X^{-2e_*/p^{(N-\varkappa)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}. \qquad \square$$

Пусть теперь $W_j^{(\varkappa)}:=p_1^{(\varkappa)}\lambda\circ z_j$, $1\leqslant j\leqslant h$ (см. (22)). Определим матрицы

$$\begin{aligned} A^{(\varkappa)}&=(\Delta^{i-1}(\mathcal{B}^{(\varkappa)}\circ W_j^{(\varkappa)}))_{1\leqslant i,j\leqslant h}, \quad 0\leqslant\varkappa\leqslant N,\\ A&:=A^{(N)}=(\Delta^{i-1}W_j)_{1\leqslant i,j\leqslant h}. \end{aligned} \tag{39}$$

Лемма 1.10.8. *Матрица $A^{(\varkappa)}$ определена над кольцом $L_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$ для $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$.*

Доказательство. Элементы $\Delta^{i-1}(\mathcal{B}^{(\varkappa)}\circ W_j^{(\varkappa)})$ находятся в кольцах $L_{\mu\cdot p^{(N-\varkappa)h-i+1}}$, $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{e}\right]$, согласно лемме 1.10.5 и замечанию 1.3.2. Поэтому одновременно все эти элементы принадлежат кольцам $L_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$, $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$, над которыми, тем самым, и определены матрицы $A^{(\varkappa)}$. $\square$

Лемма 1.10.9. *Система*

$$A^{(\varkappa)}(X_1,\dots,X_n)^T=(b_1,\dots,b_h)^T, \tag{40}$$

где $b_i\in L_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$, $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$, имеет единственное решение вида

$$\xi_j=\sum_{i=1}^h b_if_{ij}, \quad 1\leqslant j\leqslant h, \tag{41}$$

где $f_{ij}\in X^{-p^{i-1}e_*/p^{(N-\varkappa)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$, $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$. Обозначая, в частности, через $\Gamma_j^{(\varkappa)}$, $1\leqslant j\leqslant h$, решения системы $A^{(\varkappa)}(X_1,\dots,X_h)^T=(1,0,\dots,0)^T$, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_j^{(\varkappa)}&\in X^{-e_*/p^{(N-\varkappa)h}}\mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}\\ \Gamma_j:=\Gamma^{(N)}&\in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu, \quad \mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Доказательство. Поделим первое уравнение системы (40) на $c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}}$, второе – на $\Delta(c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}})$ и так далее, последнее – на $\Delta^{h-1}(c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}})$. Тогда получим систему

$$\widetilde{A}^{(\varkappa)} \cdot (X_1, \ldots, X_h)^T = \left(\frac{b_1}{c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}}}, \ldots, \frac{b_h}{\Delta^{h-1}(c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}})} \right)^T, \tag{43}$$

где, согласно лемме 1.10.5, (33) и (13)

$$\widetilde{A}^\varkappa = (\Delta^{i-1} \theta_j^{p^{\varkappa h}} \varepsilon_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant h}$$

и ε_j – главная единица в $\mathcal{L}_\mu$. Матрица $\Theta = (\Delta^{i-1}\theta_j)$, а с ней и $\Delta^{\varkappa h}\Theta = (\Delta^{i-1}\theta_j^{p^{\varkappa h}})$, обратима в кольце $\mathfrak{o}$ (см. лемму 1.4.5). Поэтому матрица $\widetilde{A}^{(\varkappa)}$ обратима в кольце $\mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$, так как $\varepsilon_j \equiv 1 \mod (X\mathcal{L}_\mu^+, p\mathcal{L}_\mu)$. Значит, система (43), а вместе с ней и (40), имеют единственное решение в кольце $L_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$, $\mu \in \left[\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{p^{h-1} e}\right]$.

Пусть $\widetilde{A}_{ij}^{(\varkappa)}$ – алгебраическое дополнение элемента (i,j) матрицы $\widetilde{A}^{(\varkappa)}$. Тогда единственное решение $\xi_1, \ldots, \xi_h$ системы (40) будет иметь вид

$$\xi_j = \sum_{i=1}^h b_i \cdot \frac{1}{\Delta^{i-1}(c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}})} \cdot \frac{\widetilde{A}_{ij}^{(\varkappa)}}{|\widetilde{A}^{(\varkappa)}|}, \quad 1 \leqslant j \leqslant h.$$

Обозначая

$$f_{ij} := \frac{1}{\Delta^{i-1}(c_\varkappa \underline{z}_1^{p^{\varkappa h}})} \cdot \frac{\widetilde{A}_{ij}^{(\varkappa)}}{|\widetilde{A}^{(\varkappa)}|}$$

и учитывая (31), получим (41). $\square$

Предложение 1.10.10. *Ряд* $\Gamma_j := \Gamma_j^{(N)}$ *вместе с последовательностью* $\Gamma_j^{(\varkappa)}$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant N$, *является примарным в модуле* $X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{p^{h-1} e}$. *При этом модули*

$$X^{-e_*(1+p^{h-1})/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}, 0 \leqslant \varkappa \leqslant N$$

(а вместе с ними и $X^{-e_*/p^{(N-\varkappa)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-\varkappa)h}}$*) являются* μ*-целыми модулями при* $\mu = \frac{1}{p^h e}$ *в смысле определения* 1.3.9.

Доказательство. Условие а) определения 1.10.1 проверено в лемме 1.10.8.

Проверим условие б) из этого определения. Доказывать будем для простоты обозначений в случае $\varkappa = N$, т.е. для $\Gamma_j^{(\varkappa)} = \Gamma_j$. По определению они являются решениями системы

$$A \cdot (\Gamma_1, \dots, \Gamma_h)^T = (1, 0, \dots, 0)^T. \tag{44}$$

Продифференцируем по X каждое уравнение системы, и, полагая $\partial := \frac{\partial}{\partial X}$, получим систему

$$\begin{aligned} &W_1^{\Delta^{i-1}} \cdot X\partial\Gamma_1 + \dots + W_h^{\Delta^{i-1}} \cdot X\partial\Gamma_h \\ &= -(X\partial W_1^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_1 + \dots + X\partial W_h^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_h), \quad 1 \leqslant i \leqslant h. \end{aligned}$$

Тогда, согласно лемме 1.10.9,

$$X\partial\Gamma_j = \sum_{i=1}^{h} -(X\partial W_1^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_1 + \dots + X\partial W_h^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_h) \cdot f_{ij},$$

где $f_{ij} \in X^{-p^{i-1} \cdot e_*}\mathcal{L}_\mu$. Далее, используя (38), имеем

$$X\partial W_j^{\Delta^i} = p^i (X\partial W_j)^{\Delta^i} \in p^{N+i}\mathfrak{o}_T[\![X]\!],$$

так как $W_j = p_1^{(N)}(\lambda \circ x_j)$ и производная логарифма $\lambda(X)$ имеет целые коэффициенты. Наконец,

$$\Gamma_j \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu.$$

Поэтому

$$X\partial\Gamma_j \in p^N X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu, \frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{p^{h-1}e}.$$

Проверим теперь последнее условие в) из определения примарного ряда Γ_j. Доказывать будем опять для $\varkappa = N$, т.е. $\Gamma_j^{(\varkappa)} := \Gamma_j$. Ряды $\Gamma_1, \dots, \Gamma_h$ являются решениями системы (44), а ряды $\Gamma_1^{(N-1)}, \dots, \Gamma_h^{(N-1)}$ являются решениями системы:

$$A^{(N-1)}(\Gamma_1^{(N-1)}, \dots, \Gamma_h^{(N-1)})^T = (1, 0, \dots, 0)^T. \tag{45}$$

К i-ому уравнению системы (44), $1 \leqslant i \leqslant h$, добавим сумму

$$(\Delta^h \mathcal{B}^{(N-1)} \circ W_1^{(N-1)})^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_1 + \dots + (\Delta^h \mathcal{B}^{(N-1)} \circ W_h^{(N-1)})^{\Delta^{i-1}} \cdot \Gamma_h,$$

а на каждое уравнение системы (45) подействуем оператором Δ^h. Вычтем из преобразованной первой системы вторую.

Получим систему

$$\Delta^h A^{(N-1)} \cdot (\Gamma_1 - \Delta^h \Gamma_1^{(N-1)}, \dots, \Gamma_h - \Delta^h \Gamma_h^{(N-1)})^T = (b, \Delta b, \dots, \Delta^{h-1} b),$$

где

$$b = (\Delta^h \mathcal{B}^{(N-1)} \circ W_1^{(N-1)} - W_1)\Gamma_1 + \dots + (\Delta^h \mathcal{B}^{(N-1)} \circ W_h^{(N-1)} - W_h) \cdot \Gamma_h.$$

Согласно лемме 1.10.9, решения этой системы $\Gamma_j - \Delta^h \Gamma_j^{(N-1)}$ имеют вид:

$$\Gamma_j - \Delta^h \Gamma_j^{(N-1)} = \sum_{i=1}^{h} (\Delta^{i-1} b) \cdot f_{ij}, \tag{46}$$

где $f_{ij} \in X^{-p^{i-1}e_*}\mathcal{L}_\mu$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{p^{h-1}e}$ (элементы матрицы $\Delta^h A^{(N-1)}$ принадлежат L_μ, согласно лемме 1.10.8 и замечанию 1.3.2). Далее, из леммы 1.10.6 следует

$$\Delta^h \mathcal{B}^{(N-1)} \circ W_j^{(N-1)} - W_j \in p^N \mathfrak{o}_T[\![X]\!],$$

а ряды $\Gamma_j \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ (см. (42)). Поэтому из (46) получаем

$$\Gamma_j - \Delta^h \Gamma_j^{(N-1)} \in p^N X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu, \quad \frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{p^{h-1}e},$$

и условие в) из определения 1.10.1 доказано. Последнее утверждение предложения следует из критерия леммы 1.3.5. □

§2. Спаривание на рядах

2.1. Спаривание $[\cdot,\cdot]$ на модуле кривых Картье. С этого момента предполагается, что $p > 2$. Пусть H_m – модуль кривых Картье для мультипликативной группы поля K и $F_N(\mathcal{H}_\mu)$ – $\mathbb{Z}_p$-модуль кривых Картье формальной группы F_N над $\mathfrak{o}_T$ (см. п. 1.6 и 1.7). Канонический специальный элемент для F_N обозначим через $u_N = p - b_1\Delta - \dots - b_h\Delta^h$.

Пусть $\mathcal{P} \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ – примарный ряд (см. п. 1.10), и при этом предполагаем, что модуль

$$X^{-e_*(p^{h-1}+1)}\mathcal{L}_\mu \quad \text{– } \mu\text{-целый}. \tag{47}$$

Определим спаривание

$$[\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}} : H_m^n \times F_N(\mathcal{H}_\mu) \to \mathfrak{o} \mod p^N \tag{48}$$

следующим образом: для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in H_m \times \cdots \times H_m = H_m^n$ и $\beta \in F_N(\mathcal{H}_\mu)$ положим

$$[\alpha, \beta] = \operatorname{res} \Phi_N(X) \cdot \mathcal{P}(X) \mod p^N,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_N(X) &:= l_N(\beta)\alpha_1^{-1}d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n^{-1}d\alpha_n \\ -\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{h} &\frac{(-1)^{n-i}b_j}{p^{j(n-i)}} l_j(\alpha_i)\alpha_1^{-1}d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i-1}^{-1}d\alpha_{i-1} \\ &\wedge \alpha_{i+1}^{-\Delta^j}d\alpha_{i+1}^{\Delta^j} \wedge \cdots \wedge \alpha_n^{-\Delta^j}d\alpha_n^{\Delta^j} \wedge d(\lambda_N \circ \beta)^{\Delta^j},\end{aligned}$$

функция l_N определена в п. 1.8, функции l_j, $1 \leqslant j \leqslant h$, определены на H_m равенством

$$l_j(\alpha) = \frac{1}{p^j}\log(\alpha^{p^j}/\alpha^{\Delta^j}) = \frac{1}{p^j}\log(\varepsilon^{p^j}/\varepsilon^{\Delta^j}) \tag{49}$$

для $\alpha = t_1^{r_1} \ldots t_{n-1}^{r_{n-1}} X^{r_n} \theta \cdot \varepsilon(t_1, \ldots, t_{n-1}, X)$, где ε – главная единица (см. п. 1.6), и, наконец, вычет $\operatorname{res}\varphi := \operatorname{res}_{t_1,\ldots,t_{n-1},X}\varphi$ является коэффициентом ряда φ монома $t_1^{-1} \ldots t_{n-1}^{-1}X^{-1}$.

Замечание 2.1.1. Ряд Φ_N можно записать в виде определителей:

$$\Phi_N = l_N(\beta)D_{n+1} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{h}\frac{(-1)^{n-i}b_j}{p^{j(n-i)}} \cdot l_j(\alpha_i)D_{ij},$$

где $D_{n+1} := \det(\alpha_i^{-1}\partial_k\alpha_i)_{1\leqslant i,k\leqslant n}$,

$$D_{ij} := \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i-1}^{-1}\partial_1\alpha_{i-1} & \ldots & \alpha_{i-1}^{-1}\partial_n\alpha_{i-1} \\ \alpha_{i+1}^{-\Delta^j}\partial_1\alpha_{i+1}^{\Delta^j} & \ldots & \alpha_{i+1}^{-\Delta^j}\partial_n\alpha_{i+1}^{\Delta^j} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^{-\Delta^j}\partial_1\alpha_n^{\Delta^j} & \ldots & \alpha_n^{-\Delta^j}\partial_n\alpha_n^{\Delta^j} \\ \partial_1(\lambda_N\circ\beta)^{\Delta^j} & \ldots & \partial_n(\lambda_N\circ\beta)^{\Delta^j} \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\partial_i\alpha := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_i}\alpha, & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \frac{\partial}{\partial X}\alpha, & i = n. \end{cases}$$

Лемма 2.1.2. $\Phi_N(\alpha,\beta)\in\mathcal{H}_\mu$.

Доказательство. Если $\beta\in F_N(\mathcal{H}_\mu)$, то $l_N(\beta)\in\mathcal{H}_\mu$ (см. предложение 1.8.2). Ясно, далее, что $D_{n+1}\in\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$, и поэтому

$$l_N(\beta)D_{n+1}\in\mathcal{H}_\mu.$$

Рассмотрим теперь (i,j)-ое слагаемое в Φ_N. Из равенства (38) легко следует, что все $\alpha^{-\Delta^j}\partial_k\alpha^{\Delta^j}$ делятся на p^j в кольце $\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$. Также из (38) получаем

$$\partial_k(\lambda_N\circ\beta)^{\Delta^j}=p^jt_k^{p^j-1}(\partial_k(\lambda_N\circ\beta))^{\Delta^j}.$$

Ряд $\partial_k\lambda_N(X)$ имеет целые коэффициенты из $\mathfrak{o}_T$ и $\beta\in F_N(\mathcal{H}_\mu)$, поэтому

$$\partial_k(\lambda_N\circ\beta)^{\Delta^j}\in p^j\mathcal{H}_\mu\subset p^jL_\mu^+. \tag{50}$$

Значит, определитель $D_{i,j}$ делится на $p^{j(n-i)}\cdot p^j$ в модуле $\mathcal{H}_\mu$. Остается только проверить, что $p^{j-1}l_j(\alpha_i)$ имеет целые коэффициенты. Применим (38) к l_j:

$$p^{j-1}l_j(\alpha)=p^{j-1}\left(1+\frac{\Delta}{p}+\dots+\frac{\Delta^{j-1}}{p^{j-1}}\right)\left(\left(1-\frac{\Delta}{p}\right)\log\varepsilon\right)$$

(см. (49)). Известно, что $l(\varepsilon)=(1-\frac{\Delta}{p})\log\varepsilon$ имеет целые коэффициенты (см. [7, лемма 2]). Отсюда

$$p^{j-1}l_j(\alpha)\in X\mathfrak{o}_M \tag{51}$$

(относительно $\mathfrak{o}_M$ см. (17)). Поэтому

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-i}b_j}{p\cdot p^{j(n-j)}}\cdot l_j(\alpha_i)D_{ij}\\&=(-1)^{n-i}b_j(p^{j-1}l_j(\alpha_i))\cdot\frac{D_{ij}}{p^{j(n-j)}\cdot p^j}\in\mathcal{H}_\mu\quad\square\end{aligned}$$

Непосредственно из леммы 2.1.2, определения модуля $\mathcal{H}_\mu$ (см. (11)) и примарного ряда $\mathcal{P}$ (см. п. 1.10) получаем

Следствие 2.3. *Спаривание $[\cdot,\cdot]$ корректно задано, т.е.*

$$\operatorname{res}\Phi_N(\alpha,\beta)\mathcal{P}\in\mathfrak{o}.$$

2.2. Основные свойства спаривания $[\cdot,\cdot]$.

Предложение 2.2.1. *Спаривание $[\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}}$ имеет следующие свойства:*

1) *Аддитивность:*

$$[(\alpha_1,\dots,\alpha_i\alpha_i',\dots,\alpha_n),\beta] = [(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n),\beta]$$
$$+[(\alpha_1,\dots,\alpha_i',\dots,\alpha_n),\beta],$$
$$[\alpha,\beta +_{F_N} \beta'] = [\alpha,\beta] + [\alpha,\beta'],$$
$$[\alpha,[a]_{F_N}(\beta)] = a[\alpha,\beta], \quad a \in \mathbb{Z}_p.$$

2) *Гиперболичность: $[(\dots,\alpha,\dots,-\alpha,\dots),\beta] = 0$ (т.к. $p>2$, то вместе с α в H_m содержится и $-\alpha$).*

3) *Соотношение Стейнберга $[(\dots,\alpha,\dots,1-\alpha,\dots),\beta] = 0$, если $1-\alpha \in H_m$.*

4) *Кососимметричность:*

$$[(\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_k,\dots,\beta] = -[(\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_i,\dots,\beta].$$

5) *Символьное свойство*

$$[(\dots,\alpha,\dots),\mathfrak{G}_N^0(\alpha)] = 0$$
$$[(\dots,\alpha,\dots),\mathfrak{G}_N^{\rho,a}(\alpha)] = 0,$$

где $\mathfrak{G}_N^0$ и $\mathfrak{G}_N^{\rho,a}$ определены в (29) и $\alpha \in H_m \cap \mathcal{H}_\mu$ (группа H_m как множество рядов содержится в кольце $T((X))$, а модуль $\mathcal{H}_\mu$ содержится в $T[\![X]\!]$, поэтому имеет смысл их пересечение).

Доказательство предложения 2.2.1. Первое свойство следует непосредственно из определения спаривания $[\cdot,\cdot]$. Кососимметричность вытекает из свойств 2), 3) (см., например, [15]). Доказательство свойств 2), 3), 5) основано на нижеследующих трех леммах. Введем сперва следующее обозначение.

Обозначение 2.2.2. *Если ряд $\varphi = \varphi(t_1,\dots,t_{n-1},X) \in M$ (см.(16)) представим в виде*

$$\varphi = \partial_1\varphi_1 + \dots + \partial_n\varphi_n,$$

где $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t_n := X$, и каждый ряд $p^{h-1}\varphi_i$ лежит в модуле $\mathcal{H}_{\mu p^{(N-s)h}}$, то будем писать

$$\varphi \equiv 0 \mod \partial(s).$$

Для $s = N$ пишем просто $\partial := \partial(N)$.

Лемма 2.2.3. *Предположим, что* $\varphi \equiv 0 \mod \partial(s)$, *и пусть* ψ *– ряд с целыми коэффициентами из* $\mathfrak{o}$, $\psi(0) = 0$. *Тогда*

$$\operatorname{res}_{t_1,\dots,t_n} \varphi \cdot \mathcal{P}^{(s)}(\psi) \equiv 0 \mod p^s, \quad 0 \leqslant s \leqslant N.$$

В частности, $\operatorname{res}_{t_1,\dots,t_n} \varphi \cdot \mathcal{P}(\psi) \equiv 0 \mod p^N$.

Доказательство. Из свойства в) примарного ряда $\mathcal{P}$ (см. п. 1.10) и условия (42) получаем

$$\operatorname{res}(\Delta^h \mathcal{P}^{(s-1)} - \mathcal{P}^{(s)}) \equiv 0 \mod p^s X^{-e_*(1+p^{(h-1)})/p^{(N-s)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}}, \\ 0 \leqslant s \leqslant N.$$

Поэтому, применяя еще (38), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \varphi \cdot \mathcal{P}^{(s)}(\psi) &\equiv \operatorname{res} \varphi \cdot (\Delta^h \mathcal{P}^{(s-1)}(\psi)) \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{res}(\partial_i \varphi_i)(\Delta^h \mathcal{P}^{(s-1)}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \varphi_i \cdot \partial_i(\Delta^h \mathcal{P}^{(s-1)}) = \\ -\sum_{i=1}^n \operatorname{res}(p^{h-1}\varphi_i)&(pt_i^{-1}\Delta^h(t_i\partial_i \mathcal{P}^{(s-1)}) \mod p^s. \end{aligned}$$

Из условия следует $p^{h-1}\varphi_i \in \mathcal{H}_{\mu p^{(N-s)h}} \subset \mathcal{L}^+_{\mu p^{(N-s)h}}$. Далее, по свойству б) из определения ряда $\mathcal{P}$ получаем:

$$t_i \partial_i \mathcal{P}^{(s-1)} \in p^s X^{-e_*(1+p^{h-1})/p^{(N-s)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}}.$$

Значит,

$$(p^{h-1}\varphi_i)(pt_i^{-1}\Delta^h(t_i \partial_i \mathcal{P}^{(s-1)})) \in p^s X^{-e_*(1+p^{h-1})/p^{(N-s)h}} \mathcal{L}_{\mu p^{(N-s)h}},$$

откуда, учитывая опять (42), получаем сравнение леммы. □

Лемма 2.2.4. *Пусть* $f_{k,l}(t_1,\dots,t_n)$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant n$ *– заданные ряды из поля* $M = M(K)$ *(см. (16)) (здесь* $t_n := X$*). Предположим, что для всех* $1 \leqslant k$, $l, m \leqslant n$ *выполнены следующие условия:*

$$\partial_m f_{k,l} = \partial_l f_{k,m}. \tag{52}$$

Пусть Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначает определитель матрицы, полученной из матрицы $(f_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$ вычеркиванием i-го столбца и n-ой строки. Тогда для любого $\varphi \in M$ выполнено равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Delta_i \partial_i \varphi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial_i (\Delta_i \varphi).$$

Доказательство. Утверждение леммы равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial_i \Delta_i = 0.$$

Это равенство легко следует из (52), с помощью вычисления определителей. □

Замечание 2.2.5. Условие (52) выполняется для коэффициентов матриц определителей D_{ij} (см. замечание 2.1.1).

Лемма 2.2.6. *Пусть $g \in \mathcal{H}_\mu$ (см.(11)). Тогда для любого натурального m выполнено сравнение*

$$g^{mp^i} - g^{m\Delta^i} \equiv mp^i l_i(g) g^{m\Delta^i} \mod (mp)^2 \mathcal{H}_\mu.$$

Доказательство. Согласно определению функции l_i (см.(49)) имеем

$$mp^i l_i(g) = \log(g^{mp^i} / g^{m\Delta^i}),$$

откуда

$$\begin{aligned} g^{mp^i} - g^{m\Delta^i} &= g^{m\Delta^i} (\exp(mp^i l_i(g)) - 1) \\ &= g^{m\Delta^i} mp^i l_i(g) + g^{m\Delta^i} \sum_{j \geqslant 2} \frac{(mp)^j}{j!} \left(\frac{p^i l_i(g)}{p} \right)^j. \end{aligned}$$

При $j \geqslant 2$ (и $p \neq 2$) число $(mp)^j / j!$ делится на $(mp)^2$, и ряд $p^{i-1} l_i(g) \in \mathcal{H}_\mu$. Ряд $p^{i-1} l_i(X) \in X\mathfrak{o}_\mu$ (см. (51)), а ряд g по условию лежит в $\mathcal{H}_\mu$, поэтому $p^{i-1} l_i(g) \in \mathcal{H}_\mu$. □

Проверка свойства гиперболичности

Для простоты обозначений будем проверять:

$$[(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha, -\alpha), \beta] = 0. \tag{53}$$

Чтобы использовать лемму 2.2.3, покажем сперва, что

$$\Phi_N((\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha, -\alpha), \beta) \equiv 0 \mod \partial. \tag{54}$$

Так же, как в доказательстве гиперболичности в [1], предложение 9, получаем

$$(-1)^n \Phi_N = \sum_{j=1}^{h} (\partial_1(\Delta_1 \psi_j) - \partial_2(\Delta_2 \psi_j) + \dots + (-1)^{n-1} \partial_n(\Delta_n \psi_j)),$$

где

$$\psi_j = -\frac{b_j}{p} \frac{l_j(\alpha)^2}{2},$$

а Δ_k – минор матрицы, полученной из

$$D_{ij} := \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_{n-2}^{-1}\partial_1\alpha_{n-2} & \dots & \alpha_{n-2}^{-1}\partial_n\alpha_{n-2} \\ \partial_1(\lambda_N \circ \beta)^{\Delta^j} & \dots & \partial_n(\lambda_N \circ \beta)^{\Delta^j} \end{pmatrix} \tag{55}$$

вычеркиванием k-го столбца и последней строки.

Из (50) следует, что

$$\Delta_k \in p^j \mathcal{H}_\mu \subset p^j L_\mu^+. \tag{56}$$

Запишем далее

$$p^{h-1}(\Delta_k \psi_j) = -\frac{\Delta_k}{p^j} \cdot \left(\frac{p^{h-j}}{2} b_j\right) (p^{j-1} l_j(\alpha))^2.$$

Ряд $p^{j-1} l_j(\alpha)$ имеет целые коэффициенты (см.(51)), значит, $p^{h-1}(\Delta_k \psi_j) \in \mathcal{H}_\mu$, откуда следует (54). Мы можем применить теперь лемму 2.2.3, чтобы получить равенство (53). □

Проверка соотношения Стейнберга

Как и выше, достаточно проверить равенство

$$[(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha, 1-\alpha), \beta] = 0. \tag{57}$$

Покажем, что

$$\Phi_N((\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha, 1-\alpha), \beta) \equiv 0 \mod \partial. \tag{58}$$

Как и в доказательстве соотношения Стейнберга в [1], предложение 9, получаем

$$(-1)^n \Phi_N = \sum_{j=1}^{h} (\partial_1(\Delta_1 \psi_{1j}) - \partial_2(\Delta_2 \psi_{2j}) + \cdots + (-1)^{n-1} \partial_n(\Delta_n \psi_{nj})),$$

где миноры Δ_k такие же, что и в (55), а ряды ψ_{kj} определены равенством (44) работы [1] и имеют целые коэффициенты (см. предложение 9, [1]). Отсюда и из (56) следует, что

$$p^{h-1} \Delta_k \psi_{kj} \in \mathcal{H}_\mu,$$

откуда получаем (58), а значит, применяя лемму 2.2.3, и (57). □

Символьное свойство проверяется так же, как в [1], предложение 9. Предложение 2.2.1 доказано.

Для подгруппы H_m мультипликативной группы поля M (см. (16)) определим K-группу Милнора $K_n(H_m)$ обычным путем с помощью образующих и соотношений (т.е. возьмем n-тензорное произведение H_m и факторизуем по подмодулю, порожденному тензорами вида $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_i \otimes \cdots \otimes (1-\alpha_i) \otimes \cdots \otimes \alpha_n$, где $1-\alpha_i \in H_m$). Свойства 1) и 3) предложения 2.2.1 можно выразить следующим образом.

Теорема 2.2.7. *Спаривание* $[\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}}$ *индуцирует спаривание*

$$[\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}} : K_n(H_m) \times F_N(\mathcal{H}_\mu) \to \mathfrak{o} \mod p^N.$$

2.3. Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ и его значения на базисе Шафаревича. Построенное в п. 2.1 спаривание $[\cdot,\cdot]_{F,\mathcal{P}}$ индуцирует спаривание

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_F : K_n(H_m) \times F_N(\mathcal{H}_\mu) \to W_F^N$$

по формуле

$$\langle\alpha,\beta\rangle_F=\sum_{j=1}^{h}{}_{(F)}[\operatorname{Tr}[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j}]_F(z_j),\tag{59}$$

где Tr – оператор следа из $\mathfrak{o}$ в $\mathbb{Z}_p$,

$$\Gamma_j\in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu,\quad \frac{1}{p^he}\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{p^{h-1}e}$$

– примарный ряд из (42), $z_1,\dots,z_h$ – образующие $\mathbb{Z}_p$-модуля W_F^N (см. п. 1.4).

Пусть $\underline{\omega}_i(b)=E_N\ (\hat{b}\lambda_N(s_i))$ – ряд из $F_N(\mathcal{H}_\mu)$, построенный по примарному элементу $\omega_i(b)$ в предложении 1.9.1, и пусть $\mathfrak{G}_N^0$, $\mathfrak{G}_N^{\rho,a}$ – изоморфизмы, определенные в (29).

Из предложения 1.9.2 следует, что элементы

$$\underline{\omega}_i(b),\quad b\in\mathfrak{o},\quad 1\leqslant i\leqslant h;$$

$$\mathfrak{G}_N^0(\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}}X^{i_n}),\quad \mathfrak{G}_N^{\rho,a}(\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}}X^{i_n}),$$

где

$$\theta\in\mathcal{R},\quad a\in\mathbb{Z}_p,\quad 1\leqslant\rho<fh,\quad \bar{i}=(i_1,\dots,i_n),$$

$$i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathbb{Z},\quad 0<i_n\leqslant e_*,\quad p\nmid\bar{i},$$

дают систему образующих $\mathbb{Z}_p$-модуля $F_N(\mathcal{H}_\mu)$ по модулю $(\mathcal{U}_{F_N}+{}_{F_N}f^{(N)}(F(\mathcal{H}_\mu)))$.

Предложение 2.3.1. 1) *Для любых $\alpha_i\in H_m$ имеют место равенства*

$$\langle(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\underline{\omega}_i(b)\rangle_F=[\delta\operatorname{Tr}b]_F(z_i),$$

где δ определен в (28). При этом, если один из элементов α_i является единицей, т.е. $\alpha_i\in\mathcal{U}_m$ (см.(18)), то спаривание тривиально.

2)

$$\langle(t_1,\dots,t_{n-1},X),\mathfrak{G}_N^0(\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}}X^{i_n})\rangle_F=0,$$

$$\langle(t_1,\dots,t_{n-1},X),\mathfrak{G}_N^{\rho,a}(\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}}X^{i_n})\rangle_F=0,$$

если $p\nmid\bar{i}=(i_1,\dots,i_n)$.

Доказательство см. предложение 8, п. 3.3, [2].

2.4. Свойства спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$.

Независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ по второму аргументу

Предложение 2.4.1. *Пусть*

$$\alpha \in K(H_m), \beta \in \mathcal{U}_{F_N} + {}_{F_N} f^{(N)}(F_N(\mathcal{H}_{1/p^h e})).$$

Тогда

$$\langle \alpha, \beta \rangle_F = 0 \tag{60}$$

(*относительно* $\mathcal{U}_{F_N}$ *см.* (23)).

Замечание 2.4.2. Мы называем это свойство независимостью спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ из следующих соображений. Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ задает естественным образом спаривание на множестве $K_n^{\mathrm{top}}(K)\times F_N(\mathfrak{M})$. А именно, пусть $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$ и $\beta \in F_N(\mathfrak{M})$, и пусть $\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_n$ и $\underline{\beta}$ – прообразы элементов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ и β в H_m и $F_N(\mathcal{H}_\mu)$ соответственно (см. (18), (11)). Определим тогда

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{F_N} := \langle \underline{\alpha}, \beta \rangle_F.$$

Для проверки корректности спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_{F_N}$ нам надо показать, что его значения на элементах α и β не зависят от выбора прообразов $\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_n$ и $\underline{\beta}$. Поэтому мы называем это свойство независимостью от способа разложения элементов в ряды по локальным параметрам.

Замечание 2.4.3. Для простоты изложения доказательство будем проводить в случае одномерного локального поля. Переход к многомерному полю происходит так же, как и в предложении 6, п. 3.2, [2].

Проверим сперва несколько лемм.

Лемма 2.4.4. *Пусть* $b \in \mathcal{H}_\mu$, $\frac{1}{p^h e} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{p^{h-1} e}$, *и* $\xi_1,\ldots,\xi_h$ *– решения системы*

$$A \cdot (X_1,\ldots,X_h)^{\top} = (b,0,\ldots,0)^{\top},$$

где A *определена в* (39). *Тогда* $\xi_j \in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu$ *и* ξ_j *имеют целые коэффициенты при неположительных степенях для* $\mu \in \left[\frac{1}{p^h e}, \frac{1}{e_*}\right]$.

Лемма следует из леммы 1.10.9 при $\varkappa = N$ и $(b_1,b_2,\ldots,b_h) = (b,0,\ldots,0)$, а также из критерия леммы 1.3.12. $\square$

Точно так же, используя лемму 1.10.9 и лемму 1.3.12, получим следующую лемму.

Пусть $\beta \in \mathcal{U}_{F_N}$ и $b := \lambda_N(\beta)$.

Лемма 2.4.5. *Решения* $\xi_1,\dots,\xi_h$ *системы*

$$A\cdot(X_1,\dots,X_h)^\top=(b,\Delta b,\dots,\Delta^{h-1}b)^\top \tag{61}$$

находятся в модуле $X^{-p^{h-1}e_*}\mathcal{L}_\mu$, $\mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$ *и этот модуль является* μ*-целым при* $\mu=\frac{1}{p^he}$. *При этом*

$$\xi_j=\sum_{i=1}^{h}(\Delta^{i-1}b)\cdot f_{ij},\quad f_{ij}\in X^{-p^{i-1}e_*}\mathcal{L}_\mu,\quad \mu=1/p^he. \tag{62}$$

Лемма 2.4.6. *Решения* $r_{1j},\dots,r_{hj}$ *системы*

$$A(X_1,\dots,X_h)^\top=(a\xi_j^\Delta,0,\dots,0)^\top,$$

где $a\in\mathfrak{o}_T[\![X]\!]$, *а* $\xi_1,\dots,\xi_h$ *– решения системы* (61), *лежат в модуле* $X^{-e_*(1+p^h)}\mathcal{L}_{1/p^he}$ *и имеют целые коэффициенты при неположительных степенях.*

Доказательство. Согласно лемме 1.10.9, имеем

$$r_{ij}=a\xi_j^\Delta g_{ij},\quad \text{где}\quad g_{ij}\in X^{-e_*}\mathcal{L}_\mu,\quad \mu\in\left[\frac{1}{p^he},\frac{1}{p^{h-1}e}\right].$$

Из леммы 2.4.5 и замечания 1.3.2 следует:

$$a\xi_j^\Delta\in X^{-p^he_*}\mathcal{L}_{\mu'}\quad \frac{1}{p^he}\leqslant\mu'\leqslant\frac{1}{p^{h-1}e}.$$

Поэтому общим кольцом, в котором находятся одновременно оба ряда $a\xi_j^\Delta$ и g_{ij}, является L_{1/p^he}, а их произведение

$$r_{ij}\in X^{-e_*(1+p^h)}\mathcal{L}_{1/p^he}.$$

Докажем второе утверждение леммы. Ряд r_{ij}, используя (62) и вид ряда $\underline{b}(X)$, можно записать в виде:

$$r_{ij}=\lambda_N(\beta)^{\Delta^h}\cdot\varphi_{ij}+\psi_{ij},$$

где $\varphi_{ij}\in X^{-e_*(1+p^h)}\mathcal{L}_{1/p^he}$, $\psi_{ij}\in X^{-e_*(1+p^{n-1})+1}\mathcal{L}_{1/p^he}$. Модуль $X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_{1/p^he}$ является μ-целым, согласно замечанию 1.3.13, и, значит, ряд ψ_{ij} имеет целые коэффициенты при неположительных степенях. Аналогичное утверждение для ряда $\lambda_N(\beta)^{\Delta^h}\varphi_{ij}$

проверяем непосредственно, используя четыре типа слагаемых ряда $\lambda_N(\beta)$ из леммы 1.7.2. Приведем пример такой проверки для четвертого типа. Нам надо проверить, что моном

$$ap^{-l}c_m^{p^{lh}}X^{p^{lh}(m+e_*)\cdot p^h}\cdot X^{-e_*(1+p^h)}d_rX^r$$

имеет целый коэффициент

$$\gamma_{l,m,r}=ap^{-l}c_m^{p^{lh}}d_r,$$

если $p^{lh}(m+e_*)p^h-e_*(1+p^h)+r\leqslant 0$ и $l\geqslant 0$, $m>e-e_*$, $r\in\mathbb{Z}$. При этом у нас выполнены условия:

$$a\in\mathfrak{o}_T,\quad v_T(c_m)\geqslant-\mu m,\quad v_T(d_r)\geqslant-\mu r,\quad \mu=\frac{1}{p^he}.$$

Надо доказать, что

$$v_T(\gamma_{l,m,r})>-1.$$

Учитывая все выше написанные условия видим, что это неравенство равносильно неравенству

$$p^{lh}(p^h-1)e+(p^{lh}-p^h+1)e_*-(l-1)p^he>0,$$

которое, как нетрудно убедиться, выполнено при $l\geqslant 0$, $p\geqslant 3$. $\square$

Пусть $u_N=p-b_1\Delta-\dots-b_h\Delta^h$ – канонический специальный элемент для группы Хонды F_N, пусть $\alpha\in H_m$, $\beta\in\mathcal{U}_{F_N}$ и $l_j(\alpha)$ – функция из (49).

Лемма 2.4.7. *При $\mu=1/p^he$ имеет место сравнение*

$$\begin{aligned}&\operatorname{res} l_j(\alpha)\partial\big(\frac{b_j}{p}\cdot\Delta^j\lambda_N(\beta)\big)\cdot\Gamma_\varkappa\\ &\equiv-\operatorname{res}\partial l_j(\alpha)\cdot\frac{b_j}{p}\cdot\Delta^j\lambda_N(\beta)\cdot\Gamma_\varkappa \mod p^N,\quad 1\leqslant j\leqslant h\end{aligned}\tag{63}$$

(здесь $\partial:=\frac{\partial}{\partial X}$).

Доказательство. Заменим сперва ряд $\Gamma_\varkappa$ на $(\Gamma_\varkappa^{(N-1)})^{\Delta^h}$ (см. п. 1.10, определение 1.10.1). Это можно сделать, так как согласно (50) и (51) имеем

$$l_j(\alpha)\partial\big(\frac{b_j}{p}\cdot\Delta^j\lambda_N(\beta)\big)\in\mathcal{H}_\mu,$$

$$\Gamma_\varkappa-\Delta^h\Gamma_\varkappa^{(N-1)}\in p^NX^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu$$

и модуль $X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_\mu$ является μ-целым при $\mu = 1/p^h e$ (см. замечание 1.3.6).

Далее, очевидное равенство $\operatorname{res}\partial(f(X)g(X)h(X)) = 0$, верное для любых рядов f, g, h, показывает, что сравнение (63) равносильно сравнению

$$\begin{gathered}\operatorname{res} l_j(\alpha)\cdot\frac{b_j}{p}\cdot\Delta^j\lambda_N(\beta)\cdot\partial(\Delta^h\Gamma_\varkappa^{(N-1)})\\ =\operatorname{res}X^{-1}(p^{j-1}l_j(\alpha)\cdot\frac{b_j}{p}\Delta^j\lambda_N(\beta)\cdot(pX\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)})^{\Delta^h}\\ \equiv 0 \mod p^N\end{gathered}$$

(мы применяем, кроме прочего, равенство (38)).

Ряд $p^{j-1}l_j(\alpha)$ лежит в $X\mathfrak{o}_M$ (см. (51)), поэтому нам надо лишь проверить, что ряд

$$\Psi_j = b_j\cdot\lambda_N(\beta)^{\Delta^j}\cdot(X\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)})^{\Delta^h}/p^N,\quad 1\leqslant j\leqslant h,$$

имеет целые коэффициенты при отрицательных степенях X для $\mu = 1/p^h e$.

Пусть $1\leqslant j\leqslant h-1$. В этом случае $p|b_j$ по определению ряда u_N. Кроме того,

$$X\cdot\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)}\in p^{N-1}X^{-e_*(1+p^{h-1})/p^h}\mathcal{L}_{\mu p^h},$$

$\mu\in\left[\frac{1}{p^h e},\frac{1}{p^{h-1}e}\right]$ (см. определение 1.10.1 и предложение 1.10.9), а ряд $\lambda_N(\beta)^{\Delta^j}$ лежит в модуле $\mathcal{L}^+_{\mu'/p^j}$, $\mu'\in\left[\frac{1}{p^h e},\frac{1}{e}\right]$, согласно лемме 1.7.2. Общим кольцом L_μ, в котором находятся оба сомножителя $\lambda_N(\beta)^{\Delta^j}$ и $(X\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)})^{\Delta^h}$ при всех j, $1\leqslant j\leqslant h-1$, будет $L_{1/p^h e}$, и в этом кольце ряд Ψ_j лежит в модуле $X^{-e_*(1+p^{h-1})}\mathcal{L}_{1/p^h e}$, который является μ-целым, согласно замечанию 1.3.13, и наше утверждение в этом случае доказано.

Пусть $j = h$. Тогда $b_h\in\mathfrak{o}_T^*$, и нам надо проверить, что ряд

$$\Psi_h = \lambda_N(\beta)\cdot(X\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)})/p^N$$

имеет целые коэффициенты при отрицательных степенях. Заметим, что

$$\Psi_h\in p^{-1}X^{-e_*(1+p^{h-1})/p^h}\mathcal{L}_{1/e},$$

так как общим кольцом L_μ, в котором находятся оба сомножителя $\lambda_N(\beta)$ и $X\partial\Gamma_\varkappa^{(N-1)}$ будет кольцо $L_{1/e}$. Критерий леммы 1.3.12 в этом случае выглядит следующим образом:

$$-e_*(1+p^{h-1})/p^h > -e.$$

Это неравенство выполняется, очевидно, при $p \geqslant 3$. □

Лемма 2.4.8. *Пусть* $\alpha \in H_m$, $\beta \in \mathcal{U}_{F_N}$ *и* $\mu = 1/p^h e$. *Тогда спаривание* $[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j}$ *(см. (48)) можно записать в виде*

$$[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j} = \operatorname{res} X^{-1}\cdot\frac{u_N}{p}(X\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot\lambda_N(\beta))\cdot\Gamma_j. \qquad (64)$$

Доказательство. В одномерном случае, который мы сейчас рассматриваем, спаривание $[\cdot,\cdot]_{F,\Gamma_j}$ определено в виде:

$$[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j} = \operatorname{res}\Phi_N(X)\cdot\Gamma_j,$$

где

$$\Phi_N(X) = \alpha^{-1}\partial\alpha\cdot l_N(\beta)\cdot\Gamma_j - \sum_{i=1}^{h} l_i(\alpha)\big(\frac{b_i}{p}\Delta^i\lambda_N(\beta)\big)\cdot\Gamma_j.$$

По определению функции l_N (см. п. 1.8) имеем

$$\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot l_N(\beta)\cdot\Gamma_j = X^{-1}(X\alpha^{-1}\partial\alpha)\cdot\lambda_N(\beta)\cdot\Gamma_j$$
$$-\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot\frac{u_N-p}{p}\lambda_N(\beta)\cdot\Gamma_j. \qquad (65)$$

Из (38) легко следует равенство

$$\alpha^{-1}\partial\alpha - \partial l_i(\alpha) = X^{-1}(X\alpha^{-1}\partial\alpha)^{\Delta^i}, \quad i\geqslant 1.$$

Используя это равенство и лемму 2.4.6, получаем

$$\begin{aligned}&\operatorname{res}\big\{\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot\frac{u_N-p}{p}\lambda_N(\beta)\cdot\Gamma_j\\ &+\sum_{i=1}^{h} l_i(\alpha)\partial\big(\frac{b_i}{p}\Delta^i\lambda_N(\beta)\big)\cdot\Gamma_j\big\}\\ &\equiv \operatorname{res} X^{-1}\frac{u_N-p}{p}(X\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot\lambda_N(\beta))\cdot\Gamma_j \mod p^N.\end{aligned}$$

Отсюда, из равенства (65) и определения ряда $\Phi_N \cdot \Gamma_j$ следует (64). $\square$

Доказательство предложения 2.4.1. Мы будем проверять сравнение

$$\operatorname{Tr}[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j} = \operatorname{Tr}\operatorname{res}\Phi_N(\alpha,\beta)\cdot\Gamma_j \equiv 0 \mod p^N, \quad 1 \leqslant j \leqslant h, \qquad (66)$$

из которого, используя определение спаривания $\langle\alpha,\beta\rangle_F$, мгновенно получаем равенство (60).

Положим

$$R_j := \Phi_N(\alpha,\beta)\cdot\Gamma_j.$$

Из определения примарных рядов Γ_j (см. лемму 1.10.8) вытекает, что $R_1,\dots,R_h$ – решения системы

$$A\cdot(X_1,\dots,X_h)^\top = (\Phi_N(\alpha,\beta),0,\dots,0)^\top,$$

где A – матрица из (39).

Преобразуем эту систему. Рассмотрим систему

$$A\cdot(Y_1,\dots,Y_n)^\top = (b,b^\Delta,\dots,b^{\Delta^{h-1}})^\top, \qquad (67)$$

где $b = X\alpha^{-1}\partial\alpha\cdot\lambda_N(\beta)\in\mathcal{L}_\mu^+$ (см. лемму 1.7.2). Пусть $\xi_1,\dots,\xi_h$ – решения системы (67).

Подействуем на i-ое уравнение этой системы, $1\leqslant i\leqslant h$, оператором $\frac{b_i}{p}\Delta$, и затем сложим все уравнения. Тогда получим равенство

$$\begin{aligned}\left(\frac{p-u_N}{p}\circ W_1\right)\xi_1^\Delta+\dots+\left(\frac{p-u_N}{p}\circ W_h\right)\cdot\xi_h^\Delta \\ = \frac{p-u_N}{p}\circ(X^{-1}\alpha\partial\alpha\cdot\lambda_N(\beta)) = \frac{p-u_N}{p}\circ b.\end{aligned} \qquad (68)$$

Заметим, далее, что

$$\frac{u_N}{p}\circ W_i = p_1^{(N)} l_F(z_i). \qquad (69)$$

Последнее равенство вытекает из определения $W_i := (\lambda_N\circ f^{(N)})(z_i)$ (см. (22)), равенства $l_N(f^{(N)}(z_i)) = p_1^{(N)} l_F(z_i)$ (см. лемму 1.8.3, (27)) и определения функции l_N. Используя (69), перепишем (68) в виде

$$W_1\cdot\xi_1^\Delta+\dots+W_h\cdot\xi_h^\Delta = \frac{p-u_N}{p}\circ b + p_1^{(N)}\sum_{i=1}^h l_F(z_i)\cdot\xi_i^\Delta. \qquad (70)$$

Теперь подействуем на первые $h-1$ уравнения системы (67) оператором Δ, и все полученные уравнения объединим с (70):

$$\begin{aligned}&A \cdot (\xi_1^\Delta, \dots, \xi_h^\Delta)^\top \\ &= \left(\frac{p-u_N}{p} \circ b + p_1^{(N)} \sum_{i=1}^{h} l_F(z_i) \cdot \xi_i^\Delta, b^\Delta, \dots, b^{\Delta^{h-1}}\right)^\top,\end{aligned}$$

где $b := X\alpha^{-1}\partial\alpha \cdot \lambda_N(\beta)$. Вычтем из (67) получившуюся систему, тогда имеем

$$\begin{aligned}&A \cdot (\xi_1 - \xi_1^\Delta, \dots, \xi_h - \xi_h^\Delta)^\top \\ &= \left(\frac{u_N}{p} \circ b - p_1^{(N)} \sum_{i=1}^{h} l_F(z_i) \cdot \xi_i^\Delta, 0, \dots, 0\right)^\top. \qquad (71)\end{aligned}$$

Замечание 2.4.9. Согласно лемме 2.4.5, ряды $\xi_i - \xi_i^\Delta$, $1 \leqslant i \leqslant h$, имеют целые коэффициенты при неположительных степенях для $\mu = 1/p^h e$.

Пусть теперь $r_{1j}, \dots, r_{hj}$, $1 \leqslant j \leqslant h$ – решения системы

$$A(X_1, \dots, X_h)^\top = \left(X^{-1} \sum_{j=1}^{h} \frac{p_1^{(N)}}{p^N} l_F(z_j) \cdot \xi_j^\Delta, 0, \dots, 0\right)^\top. \qquad (72)$$

Ряд $p_1^{(N)} l_F(z_j)/p^N \in \mathfrak{o}_T[\![X]\!]_0$ (см. (9) и (25)), поэтому, согласно лемме 2.4.6, ряды r_{ij} имеют целые коэффициенты при неположительных степенях и принадлежат кольцу $L_{1/p^h e}$.

Умножим все уравнения системы (72) на p^N и сложим получившуюся систему с (71):

$$A \cdot \begin{pmatrix} X^{-1}((\xi_1 - \xi_1^\Delta) + p^N \sum\limits_{j=1}^{h} r_{1j}) \\ \vdots \\ X^{-1}((\xi_h - \xi_h^\Delta) + p^N \sum\limits_{j=1}^{h} r_{hj}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{-1} \frac{u_N}{p} \circ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из полученной системы, определения примарных элементов Γ_j и леммы 2.4.8 имеем:

$$\begin{aligned}&\operatorname{res} \Phi_N(\alpha, \beta) \cdot \Gamma_j \equiv \\ &\operatorname{res} X^{-1} \left((\xi_j - \xi_j^\Delta) + p^N \sum_{i=1}^{h} r_{ij}\right) \mod p^N.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\alpha,\beta]_{F,\Gamma_j} &= \mathrm{Tr}\,\mathrm{res}\,\Phi_N(\alpha,\beta)\cdot\Gamma_j \equiv \\ &\equiv \mathrm{Tr}\,\mathrm{res}\,X^{-1}(\xi_j-\xi_j^{\Delta}) \equiv 0 \mod p^N,\end{aligned}$$

т.е. сравнение (66), а вместе с ним и предложение 2.4.1 доказаны. □

2.5. Инвариантность спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ и его независимость по первому аргументу.

Предложение 2.5.1. *Пусть $t_1',\dots,t_{n-1}'$ – новая система параметров поля T и X' – алгебраически независимая переменная. Пусть $g_1,\dots,g_n$ – ряды над $\mathfrak{o}$:*

$$t_1 = g_1(t_1',\dots,t_{n-1}',X'),\dots,t_{n-1} = g_{n-1}(t_1',\dots,t_{n-1}',X'),$$

$X = g_n(t_1',\dots,t_{n-1}',X')$, причем $g_i = a_i t_i' + \dots$, где $a_i \in \mathfrak{o}^*$ и точками обозначены члены более высокого порядка чем t_i' относительно n-мерного нормирования (здесь $t_n' := X'$). Тогда

$$\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\beta\rangle_{F,X} = \langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\beta\rangle_{F,X'}$$

для $\alpha_i \in H_m$, $\beta \in F_N(\mathcal{H}_\mu)$.

Доказательство см. предложение 9, [2].

Предложение 2.5.2 (независимость по первому аргументу). *Пусть H_{Eis} – подгруппа в $K_n(H_m)$, порожденная символами $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, для которых хотя бы один из элементов α_i лежит в $\mathcal{U}_{\mathrm{Eis}}$ (см.(19)). Тогда группа $H_{\mathrm{Eis}}+p^N K_n(H_m)$ содержится в ядре левой части спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$, т.е. для $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\in H_{\mathrm{Eis}}$ и $\beta\in F_N(\mathcal{H}_\mu)$ имеем*

$$\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\beta\rangle_F = 0.$$

Доказательство см. предложение 10, [2].

Из предложений 2.4.1, 2.5.1 и 2.5.2 следует существование корректно определенного спаривания

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_F : K_n^{\mathrm{top}}(K)\times F_N(\mathfrak{M}) \to W_F^N.$$

Для $\alpha\in K_n^{\mathrm{top}}(K)$ и $\beta\in F_N(\mathfrak{M})$ возьмем прообразы $\underline{\alpha}\in K_n(H_m)$ и $\underline{\beta}\in F_N(\mathcal{H}_\mu)$ (см. (18) и (11)), и определим

$$\langle\alpha,\beta\rangle_F := \langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\rangle_F.$$

Теорема 2.5.3. *Спаривание* $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ *удовлетворяет свойствам* 1)–5) *предложения* 2.2.1 *и оно не зависит от выбора локальных параметров.*

§3. Явные формулы

3.1. Формула для спаривания $\{\cdot,\cdot\}_F^N$.

Теорема 3.1.1. *Символ Гильберта*

$$\{\cdot,\cdot\}_F^N : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times F_N(\mathfrak{M}) \to W_F^N$$

(см.(14)) совпадает со спариванием $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ *и, тем самым, выражается в явном виде с помощью формулы* (59).

Доказательство. 1) Спаривание $\{\cdot,\cdot\}_F^N$ совпадает со спариванием $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ на множестве $\{(t_1,\dots,t_n),\beta\}$, где $\beta\in F_N(\mathfrak{M})$, а $t_1,\dots,t_n$ – система локальных параметров поля K. Действительно, используя независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ по второму аргументу, утверждение достаточно проверить на образующих Шафаревича. Последнее доказано в предложениях 1.9.2 и 2.3.1.

2) Общий случай. Пусть $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K_n^{\mathrm{top}}(K)$. Тогда

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum (t_1\dots,t_n)$$

– конечная сумма локальных параметров. Далее используем инвариантность спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ и первый случай выше. □

3.2. Формула для символа Гильберта $(\cdot,\cdot)_F$.

Теорема 3.2.1. *Обобщенный символ Гильберта* $(\cdot,\cdot)_F$ *имеет следующую явную формулу*

$$(\alpha,\beta)_F = \sum_{k=1}^{h}{}_{(F)}[\operatorname{Tr}\operatorname{res}\Phi(X)V_k(X)]_F(z_k),$$

где

$$\Phi(X) = l_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}_1^{-1}d\underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_n^{-1}d\underline{\alpha}_n$$
$$-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{h} a_j b_j(\underline{\alpha}_i)\underline{\alpha}_1^{-1}d\underline{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \underline{\alpha}_{i-1}^{-1}d\underline{\alpha}_{i-1}$$
$$\wedge\frac{1}{p^j}d\Delta^j\lambda(\underline{\beta}) \wedge \frac{1}{p^j}\underline{\alpha}_{i+1}^{-\Delta^j}d\underline{\alpha}_{i+1}^{\Delta^j} \wedge \dots \wedge \frac{1}{p^j}\underline{\alpha}_n^{-\Delta^j}d\underline{\alpha}_n^{\Delta^j},$$
$$V_k(X) = B_{1k}/\det B,$$
$$B = (\Delta^{i-1}S_j)_{1\leqslant i,j\leqslant h}.$$

Здесь $u = p - a_1\Delta - \dots - a_h\Delta^h$ *– специальный канонический элемент группы* F *(см. определение* 1.2.6) *и* $S_j = \lambda([p^N]_F(\underline{z}_j))$, *а* $z_1, \dots, z_h$ *– образующие модуля* W_F^N.

Доказательство. Применяя свойство (15), п. 1.5, и теорему 3.1.1, получим

$$(\alpha,\beta)_F = \{\alpha, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\beta)\}_F$$
$$= \langle\alpha, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\beta)\rangle_F$$
$$= \sum_{k=1}^{h}{}_{(F)}[\operatorname{Tr}\operatorname{res}\Phi_N(\underline{\alpha}, [p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\underline{\beta}))\cdot\Gamma_k]_F(z_k),$$

где Φ_N определен в п.2.1, (48), а Γ_k – в (42).

Докажем два равенства

$$\Phi_N = \frac{p_1^{(N)}}{p^N}\cdot\Phi, \tag{74}$$
$$\Gamma_k = \frac{p^N}{p_1^{(N)}}\cdot V_k. \tag{75}$$

Из этих двух равенств и (73) утверждение теоремы следует непосредственно.

1. Проверка (74).

Из определения l_N (см. (32)) и равенств $[a]_{F,F_N} = \lambda_{F_N}^{-1}(a\lambda_F)$,

$u_N p_1^{(N)} = p_1^{(N)} u$ (см. лемму 1.2.12) следует

$$(1 - \frac{b_1}{p}\Delta - \dots - \frac{b_h}{p}\Delta^h) p_1^{(N)} = (u_N/p) \cdot p_1^{(N)}$$
$$= p_1^{(N)}(u/p) = p_1^{(N)}(1 - \frac{a_1}{p}\Delta - \dots - \frac{a_h}{p}\Delta^h).$$

Тогда

$$l_N([p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\underline{\beta})) = \frac{p_1^{(N)}}{p^N} l_F(\underline{\beta}).$$

Кроме того, $b_j \Delta^j p_1^{(N)} = p_1^{(N)} a_j \Delta^j$ (см. лемму 1.2.12). Значит,

$$b_j d\Delta^j \lambda_N([p_1^{(N)}/p^N]_{F,F_N}(\underline{\beta})) = db_j \Delta^j (p_1^{(N)}/p^N)\lambda(\beta)$$
$$= d\frac{p_1^{(N)}}{p^N} a_j \Delta^j \lambda(\underline{\beta}) = \frac{p_1^{(N)}}{p^N} a_j d\Delta^j \lambda(\underline{\beta}).$$

Отсюда, а также из определения Φ_N и Φ следует (74).

2. Проверка (75).

Напомним, во-первых, что

$$\frac{p^N}{p_1^{(N)}} \cdot W_i = p^N \lambda \circ \underline{z}_i = \lambda([p^N]_F(\underline{z}_i)) = S_i$$

(см. (22)). Значит,

$$\left(\frac{p^N}{p_1^{(N)}}\right)^{\sigma^m} (\Delta^m W_i) = \Delta^m \left(\frac{p^N}{p_1^{(N)}} \cdot W_i\right) = \Delta^m S_i.$$

Поэтому, умножая числитель ряда Γ_k на $(p^N/p_1^{(N)})^{\sigma + \dots + \sigma^{h-1}}$, а знаменатель на $(p^N/p_1^{(N)})^{1+\sigma+\dots+\sigma^{h-1}}$, получаем (75). Теорема доказана.

Литература

1. F. Lorenz and S. Vostokov, *Honda groups and explicit pairings on the modules of Cartier curves.* — Contemporary Mathematics, **300** (2002), 143–170.
2. С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле.* — Матем. сборник, **192**, No. 2 (2003), 3–36.
3. I. Fesenko and S. Vostokov, *Local fields and their extensions: A constructive aproach*, second edition. AMS, Providence, RI, (2001).

4. T. Honda, *On the theory of commutative formal groups.* — J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), 213–243.
5. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* — New York: Acad. Press (1978).
6. О. В. Демченко, *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тейта и формальных групп Хонды.* — Алгебра и анализ, **10**, No. 5 (1998), 77–84.
7. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **42**, No. 6 (1978), 1287–1320.
8. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**, No. 4 (1979), 765–794.
9. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов для многомерного локального поля.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **49**, No. 2 (1985), 283–308.
10. Ю. И. Манин, *Круговые поля и модулярные кривые.* — УМН, **26**, No. 6 (1971), 7–78.
11. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, *К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции.* — Алгебра и анализ, **2**, No. 4 (1990), 91–118.
12. В. Г. Бенуа, С. В. Востоков, *Арифметика группы точек формальной группы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **191** (1991), 9–23.
13. С. В. Востоков, *Символы на формальных группах.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**, No. 4 (1979), 765–794.
14. О. В. Демченко, *Формальные группы Хонды. Арифметика группы точек.* — Алгебра и анализ, **12**, No. 1 (2000), 132–149.
15. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* — "Мир", Москва (1974).

Bondarko M. V., Vostokov S. V., Lorenz F. The Hilbert pairing for formal groups over σ-rings.

In the paper formal groups over the rings of integers of σ-fields are studied. These fields were constructed by the first-named author in the preceding paper. They are a generalisation of the inertia field of a classical local field to arbitrary complete discrete valuation field of characteristic zero. An analogue of Honda's theory for such formal groups is constructed. The arithmetic of the group of points in an extension of a σ-field that contains sufficiently many torsion points is studied. Using the classification of formal groups and the arithmetic results obtained an explicit formula for the Hilbert pairing for formal groups over σ-fields is proved.

С.-Петербургский
государственный университет
Университет города Мюнстер
Германия

E-mail: mbondarko@hotmail.com
sergei@sv1005.spb.edu
lorenz@math.uni-muenster.de

Поступило 15 января 2004 г.