Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

К. Малышев

УСЛОВИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТИ ПО МНИМОМУ ВРЕМЕНИ КАК СВЯЗЬ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ВРЕМЕННОЙ ZZ-КОРРЕЛЯТОР XX МАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА

1. Введение

Предлагаемая статья продолжает работы [1], [2], посвященные вычислению производящего функционала температурных корреляторов Z-проекций спинов для XY магнетика Гейзенберга в подходе функционального интегрирования. Для краткости соответствующие корреляторы уместно называть 'продольными', так как направления третьей координатной оси и постоянного однородного магнитного поля совпадают. Зависимость корреляторов от времени в [1], [2] не учитывалась. Практически, указанные работы связаны с вычислением выражения

$$G(\alpha, m) \equiv \frac{\operatorname{Tr}\left(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H}\right)}{\operatorname{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

где H – гамильтониан XY магнетика спина *1/2* на периодической цепочке с четным числом узлов M. В соотношении (1.1), $Q(m)$ означает оператор числа квазичастиц на первых m узлах цепочки, и Tr означает операторный след. Выражение $G(\alpha, m)$ (1.1) играет роль производящего функционала корреляционных функций Z-компонент спинов для спиновых цепочек, рассматриваемых, например, в [3]–[8]. А именно, вычисляя производные по α (при $\alpha = 0$) и по дискретному параметру m, можно получить ответы для указанных корреляторов.

Данная работа частично поддержана РФФИ (код проекта No. 04-01-00825) и программой РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

Особенностью подхода, предложенного в [1], [2], является то, что для узельных переменных функционального интегрирования возникают квазипериодические граничные условия на отрезке мнимого времени: при сдвиге температурного аргумента на период, переменные интегрирования умножаются на некоторые комплексные числа (т.е. ведут себя “автоморфно”). В [1], [2] используются два способа регуляризации функциональных интегралов: с помощью обобщенной дзета-функции, а также путем деления функциональных определителей на определители соответствующих “свободных” операторов. Хотя второй способ и не приводит к желательному ответу в виде определителей конечномерных матриц, он дает правильные ответы для n-кратных производных $d^n/d\alpha^n$ при $\alpha = 0$.

В данной работе будет продемонстрирован еще один способ вычисления функциональных интегралов, возникающих в [1], [2]. Предлагаемый подход не использует учет граничных условий посредством разложения в ряд Фурье по мнимому времени τ. Вместо этого, граничные условия по τ учитываются непосредственно как связи в том виде, в каком они возникают при переходе от кратного интеграла к функциональному. Рассматриваемая процедура выглядит проще, имеет свои преимущества и приводит к ответам [1], [2] в виде квадратных корней из определителей матриц размера $2M \times 2M$. Ниже будет показано, каким образом можно извлечь эти корни и получить окончательные формулы для $G(\alpha, m)$ в том виде, в каком они независимо возникают в [6], [7]. Будет также продемонстрировано, каким образом подход [1], [2] может быть использован для вычисления зависящего от времени ZZ-коррелятора (т.е. двухточечной корреляционной функции третьих компонент спинов) XX магнетика Гейзенберга.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 вычисляется связанный с $G(\alpha, m)$ (1.1) функциональный интеграл, для которого квазиоднородные граничные условия рассматриваются как связи, ограничивающие область интегрирования. В разделе 3 изложена процедура, которая позволяет извлечь квадратные корни из определителей и, тем самым, продемонстрировать совпадение ответов [2] и [7] для производящих функционалов. В разделе 4 представленная техника используется для вычисления двухточечной временной функции Грина в термодинамическом пределе. Существенно, что при этом задача формулируется в терминах производящего функционала, для которого возникает представление функциональным интегралом. Получаемый ответ для продольного коррелятора совпадает с [4]. Обсуждение в разделе 5 завершает работу. Все необходимые литературные указания имеются в [1], [2], и большинство ссылок опущено. Кроме того, ряд моментов, подробно обсуждавшихся в [1], [2], используется без разъяснений.

2. Условие квазипериодичности по мнимому времени как связь на переменных интегрирования

Итак, в работах [1], [2] возникает следующее представление для $G(\alpha, m)$ (1.1):

$$G(\alpha,m) = (2Z)^{-1}\Big(G_F^+Z_F^+ + G_F^-Z_F^- + G_B^+Z_B^+ - G_B^-Z_B^-\Big), \tag{2.1}$$

где слагаемые $G_F^\pm Z_F^\pm$ и $G_B^\pm Z_B^\pm$ записываются в виде функциональных интегралов следующего вида:

$$\begin{gathered}\int\limits_{QPBC} \exp\Big(\int\limits_0^\beta \widetilde{\mathcal{L}}^\pm(\tau)d\tau\Big)Dx^*Dx,\\ \widetilde{\mathcal{L}}^\pm(\tau) \equiv x^*(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau} - \widetilde{H}_\pm(x^*, x \mid \tau).\end{gathered} \tag{2.2}$$

В соотношении (2.1), Z – статистическая сумма рассматриваемой XY модели Гейзенберга на периодической цепочке с четным числом узлов M,

$$Z \equiv \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H}). \tag{2.3}$$

Кроме того, в (2.2) приняты сокращенные обозначения x^*, x для комплекснозначных грассмановых переменных функционального интегрирования $x_k^*(\tau)$, $x_k(\tau)$, которые зависят от номера узла $k \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \equiv \{1, \dots, M\}$, и от мнимого времени $\tau \in [0, \beta]$. Здесь и ниже используются сокращенные обозначения: $\prod\limits_{k=1}^{M} dx_k \equiv dx$, $\sum\limits_{k=1}^{M} x_k^* y_k \equiv x^*y$.

Символ $\widetilde{H}_\pm(x^*, x \mid \tau)$ в (2.2) означает (недиагональную) квадратичную форму по $x_k^*(\tau)$, $x_k(\tau)$, получаемую из гамильтониана XY модели, записанного в фермионном представлении [1], [2]. Нижние индексы $\pm$ означают наличие граничных условий по решеточному индексу: $x^*_{M+1} = \mp x^*_1$, $x_{M+1} = \mp x_1$, где следует согласованно выбирать верхние или нижние знаки. Аббревиатура $QPBC$ в (2.2) означает, что переменные $x^*_k(\tau)$, $x_k(\tau)$ подчиняются условиям квазипериодичности ("автоморфности") по мнимому времени:

$$\begin{aligned} x_k(\tau) &= se^{-\alpha} x_k(\tau+\beta), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \\ x_k(\tau) &= s x_k(\tau+\beta), \qquad m < k \leqslant M, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где нужно брать $s = -1$, если (2.2) определяет $G^{\pm}_F Z^{\pm}_F$, или $s = 1$ – для $G^{\pm}_B Z^{\pm}_B$. Соотношения (2.4) задают на переменных интегрирования некоторое представление группы сдвигов $\tau \longmapsto \tau + \beta$. По построению квадратичные формы $\widetilde{H}_{\pm}(x^*, x \mid \tau)$ инвариантны относительно дискретных сдвигов по τ. Явные формулы для $\widetilde{H}_{\pm}$ приведены в [2], а необходимые для данной работы формулы соответствующих фурье-образов будут выписаны ниже.

Мера интегрирования в интеграле (2.2) задается произведением "дифференциалов" Dx^* и Dx, каждый из которых представляет собой формально-бесконечное произведение дифференциалов $dx^*_k(\tau)$ и $dx_k(\tau)$, соответственно, по всем значениям индекса $k \in \mathcal{M}$ и аргумента $\tau \in [0, \beta]$. При этом формальное произведение по значениям τ от $\tau = 0$ до $\tau = \beta$, т.е. $\prod\limits_{\tau=0}^{\beta}$, следует понимать как предельный результат, возникающий при переходе от конечнократного к бесконечнократному грассманову интегралу [1], [2].

Статистическая сумма Z (2.3) вычисляется в подходе [1], [2] по формуле, аналогичной (2.1):

$$\begin{gathered} Z = \frac{1}{2}(Z^+_F + Z^-_F + Z^+_B - Z^-_B), \\ Z^{\pm}_F = \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_{\pm}}), \quad Z^{\pm}_B = \mathrm{Tr}\,\big((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H_{\pm}}\big), \end{gathered}$$

где $\mathcal{N}$ означает оператор числа частиц. Для вычисления $Z^{\pm}_F$ и $Z^{\pm}_B$ используется представление (2.2) с граничными условиями (2.4), взятыми при $\alpha = 0$ (при этом $s = -1$ для $Z^{\pm}_F$ и $s = 1$ для $Z^{\pm}_B$).

В предлагаемой работе будем вычислять интеграл (2.2), рассматривая условия (2.4) как связи, которые налагаются на переменные интегрирования. С этой целью введем под знак интегрирования соответствующие дельта-функции.

Дельта-функцию от некоторой грассмановой переменной θ можно определить по аналогии с обычной дельта-функцией Дирака при помощи интеграла типа свертки:

$$\int f(\theta)\delta(\theta-\theta')d\theta = f(\theta'), \tag{2.5}$$

где $f(\theta)$ – произвольная функция на грассмановой алгебре. Рассмотрим (2.5) для $f(\theta)\equiv 1$. Тогда антикоммутативность аргумента θ оказывается причиной того, что свойством дельта-функции обладает разность $\theta-\theta'$. Другими словами, для грассмановой дельта-функции получаем: $\delta(\theta-\theta')\equiv\theta-\theta'$. Грассманова дельта-функция может быть представлена в виде интеграла по вспомогательной грассмановой переменной.

В результате, для условий (2.4) можно получить следующее интегральное представление:

$$\begin{gathered}
\prod_{k=1}^{m}\bigl(x_k(\tau_0)-se^{-\alpha}x_k(\tau_0+\beta)\bigr)\prod_{k=m+1}^{M}\bigl(x_k(\tau_0)-sx_k(\tau_0+\beta)\bigr)\\
\times\prod_{k=1}^{m}\bigl(x_k^*(\tau_0)-se^{\alpha}x_k^*(\tau_0+\beta)\bigr)\prod_{k=m+1}^{M}\bigl(x_k^*(\tau_0)-sx_k^*(\tau_0+\beta)\bigr)\\
=\int d\lambda^* d\lambda\exp\Bigl[\\
\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^*\bigl(x_k(\tau_0)-se^{-\alpha}x_k(\tau_0+\beta)\bigr)+\sum_{k=m+1}^{M}\lambda_k^*\bigl(x_k(\tau_0)-sx_k(\tau_0+\beta)\bigr)\\
+\sum_{k=1}^{m}\bigl(x_k^*(\tau_0)-se^{\alpha}x_k^*(\tau_0+\beta)\bigr)\lambda_k+\sum_{k=m+1}^{M}\bigl(x_k^*(\tau_0)-sx_k^*(\tau_0+\beta)\bigr)\lambda_k\Bigr].
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь λ_k^*, λ_k – вспомогательные независимые грассмановы параметры. Аргумент τ_0 означает, что условия (2.4) налагаются для произвольного фиксированного значения $\tau=\tau_0$. Вообще говоря, при выводе интегрального представления (2.2) условия, подобные (2.4), возникают только для $x_k^*(\tau)$ или для $x_k(\tau)$. Однако при вычислении необходимо конкретизировать ограничения для обеих независимых переменных. Естественным оказывается требование, чтобы условие для $x_k^*(\tau)$ было аналогичным (2.4), но с заменой $e^{-\alpha}$ на e^{α}. Достаточно потребовать соблюдения (2.4) при произвольном значении $\tau = \tau_0$.

Перейдем к фурье-представлениям по формуле

$$x_k(\tau) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{M}} \sum_q e^{iqk} x_q(\tau), \tag{2.7}$$

где суммирование осуществляется по квази-импульсам $q \in S^{\pm}$; множества $S^{\pm}$ определяются условиями $\cos Mq = \mp 1$, которые возникают при подстановке (2.7) в граничные условия $x_{M+1}(\tau) = \mp x_1(\tau)$ (о граничных условиях по индексу k сказано выше). Фурье-разложения для λ_k^*, λ_k аналогичны разложениям (2.7). В дальнейшем, при необходимости будем писать $x_{k,\tau}$ вместо $x_k(\tau)$, и т.д. Используя (2.7), получаем следующее соотношение для билинейных форм, фигурирующих в показателе экспоненты в правой части (2.6):

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \big(x_k(\tau_0) - s e^{-\alpha} x_k(\tau_0+\beta)\big) + \sum_{k=m+1}^{M} \lambda_k^* \big(x_k(\tau_0) - s x_k(\tau_0+\beta)\big)$$
$$= \sum_{q,q'} \lambda_q^* \Big(\delta_{qq'} x_{q'}(\tau_0) - s\big(e^{-\alpha \widehat{Q}}\big)_{qq'} x_{q'}(\tau_0+\beta)\Big). \tag{2.8}$$

При записи (2.8) учтена возможность сделать в функциональном интеграле замену $x_{q,\tau} \longmapsto e^{-i\frac{m+1}{2}q} x_{q,\tau}$, в результате чего матричные элементы $M \times M$ матрицы $\widehat{Q}$ принимают вид:

$$Q_{qq'} \equiv e^{-i\frac{m+1}{2}(q'-q)} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{m} e^{ik(q'-q)} = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{m}{2}(q'-q)}{\sin \frac{q'-q}{2}}. \tag{2.9}$$

Диагонализация фермионного гамильтониана XY модели, записанного в импульсном представлении, оказывается естественно связанной с матрицами размера $2M \times 2M$, что, в свою очередь, приводит к использованию указанных матриц и в подходе [2]. Учитывая необходимость перейти к матрицам размера $2M \times 2M$, получим из (2.6), (2.8) следующее представление для обсуждаемой дельта-функции:

$$\int \exp\Big(\frac{1}{2}\int \big(X_\tau^* J_\tau + J_\tau^* X_\tau\big) d\tau\Big) d\Lambda, \tag{2.10}$$

где

$$
\begin{aligned}
J^*_\tau &\equiv \Lambda^*\Big(\widetilde{I}\delta(\tau-\tau_0) - se^{-\alpha\widetilde{Q}}\delta(\tau-\tau_0-\beta)\Big),\\
J_\tau &\equiv \Big(\widetilde{I}\delta(\tau-\tau_0) - se^{\alpha\widetilde{Q}}\delta(\tau-\tau_0-\beta)\Big)\Lambda.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

В соотношениях (2.10) и (2.11) введены обозначения для матриц-столбцов размерности $2M$:

$$
\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_q \\ -\lambda^*_{-q} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad X_\tau \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ x_{q,\tau} \\ x^*_{-q,\tau} \\ \vdots \end{pmatrix}
\tag{2.12}
$$

(и т.д.). Кроме того, в (2.10) и (2.11) приняты следующие матричные обозначения: $\widetilde{I} \equiv \widehat{I}\otimes\sigma^0$, $\widetilde{Q} \equiv \widehat{Q}\otimes\sigma^3$, где $\widehat{I}$ – единичная $M\times M$ матрица, σ^0 – единичная 2×2 матрица, $\widehat{Q}$ – $M\times M$ матрица с матричными элементами (2.9), и σ^a, где a принимает значения $1,2,3$ или x,y,z, – матрицы Паули. Интегрирование по τ в (2.10) идет от $-\infty$ до ∞. При этом учитывается, что M четно и что при диагонализации гамильтониана модели в случаях $q=0$ и $q=\pi$ (если $q\in S^-$) требуются специальные доопределения (см. ссылки в [7]).

После всех сделанных замечаний можно перейти от интегрального представления, задаваемого соотношениями (2.2)–(2.4), к следующему функциональному интегралу, в котором под знак интегрирования введена соответствующая дельта-функция:

$$
\int \exp\left(\frac{1}{2}\int\Big\{X^*_\tau\Big(\frac{d}{d\tau}-\widetilde{H}\Big)X_\tau + X^*_\tau J_\tau + J^*_\tau X_\tau\Big\}d\tau\right)d\Lambda DX,
\tag{2.13}
$$

где DX – функциональная мера интегрирования по переменным $x_{q,\tau}$, $x^*_{-q,\tau}$, объединенным в матричнозначную переменную (столбец) X_τ (2.12). В (2.13) используется обозначение $\widetilde{H}$ для матрицы размера $2M\times 2M$, возникающей из гамильтониана XY модели в импульсном представлении:

$$
\widetilde{H} \equiv \widehat{\varepsilon}\otimes\sigma^3 + \widehat{\Gamma}\otimes\sigma^1.
\tag{2.14}
$$

В соотношениях (2.13), (2.14) приняты следующие матричные обозначения: $\widehat{\varepsilon} \equiv \operatorname*{diag}_q\{\varepsilon_q\}$, $\widehat{\Gamma} \equiv \operatorname*{diag}_q\{\Gamma_q\}$ (γ – параметр анизотропии XY модели, $\varepsilon_q \equiv h-\cos q$, $\Gamma_q \equiv \gamma\sin q$, и h – постоянное однородное магнитное поле); diag_q означает диагональную $M \times M$ матрицу, где q пробегает одно из множеств $S^{\pm}$ (хотя соответствующие индексы $\pm$ в используемых формулах, как правило, опускаются). Формально, температурный аргумент τ изменяется от $-\infty$ до ∞ (соответствующее ограничение отрезком $[0,\beta]$ "заложено" в налагаемую связь). Представление, задаваемое соотношениями (2.13), (2.14) имеет смысл как для $G_F^{\pm} Z_F^{\pm}$, так и для $G_B^{\pm} Z_B^{\pm}$.

Гамильтониан $\widetilde{H}$ (2.14) диагонализуется [7] преобразованием Боголюбова, что соответствует переходу к новым переменным $Y^* = X^* \widetilde{g}^{-1}$, $Y = \widetilde{g} X$:

$$\widetilde{g}\Big(\frac{d}{d\tau} - \widetilde{H}\Big)\widetilde{g}^{-1} = \frac{d}{d\tau} - \widetilde{E}, \qquad \widetilde{E} \equiv \widehat{E} \otimes \sigma^3, \tag{2.15}$$

где $\widehat{E} \equiv \operatorname{diag}_q \{E_q\}$, $q \in S^{\pm}$; $E_q = \sqrt{\varepsilon_q^2 + \Gamma_q^2}$ – уровни энергии XY модели. Унитарная матрица $\widetilde{g}$, осуществляющая диагонализацию $\widetilde{H}$ (2.14), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\widetilde{g} \equiv \operatorname{diag}_q \Big\{ e^{-i(\theta_q/2)\sigma^2} \Big\}, \\ &\qquad e^{-i(\theta_q/2)\sigma^2} = \cos(\theta_q/2)\sigma^0 - i\sin(\theta_q/2)\sigma^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где углы θ_q определяются из уравнения $\tan\theta_q = -\Gamma_q/\varepsilon_q$. Учитывая необходимость подействовать с помощью матриц $\widetilde{g}$, $\widetilde{g}^{-1}$ и на переменные Λ^*, Λ, перейдем от интеграла (2.13) к следующему представлению:

$$\int \exp\left(\frac{1}{2}\int \Big\{ Y_\tau^* \Big(\frac{d}{d\tau} - \widetilde{E}\Big) Y_\tau + Y_\tau^* \widetilde{J}_\tau + \widetilde{J}_\tau^* Y_\tau \Big\} d\tau \right) d\widetilde{\Lambda} DY, \tag{2.17}$$

где $\widetilde{J}_\tau^*$, $\widetilde{J}_\tau$ – "источники" J_τ^*, J_τ после применения преобразований с матрицами $\widetilde{g}$, $\widetilde{g}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\tau^* &\equiv \widetilde{\Lambda}^* \Big(\widetilde{I}\delta(\tau - \tau_0) - s\widetilde{g} e^{-\alpha\widetilde{Q}} \widetilde{g}^{-1} \delta(\tau - \tau_0 - \beta) \Big), \\ \widetilde{J}_\tau &\equiv \Big(\widetilde{I}\delta(\tau - \tau_0) - s\widetilde{g} e^{\alpha\widetilde{Q}} \widetilde{g}^{-1} \delta(\tau - \tau_0 - \beta) \Big) \widetilde{\Lambda}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\Lambda}^* \equiv \Lambda^* \widetilde{g}^{-1}$, $\widetilde{\Lambda} \equiv \widetilde{g}\Lambda$. Сдвигом переменных интегрирования Y_τ^*,

Y_τ уничтожаем линейные члены в (2.17) и получаем:

$$\begin{aligned}&\int \exp\Big(\frac{1}{2}\int Y_\tau^*\Big(\frac{d}{d\tau}-\widetilde{E}\Big)Y_\tau d\tau\Big)\,DY\\ &\quad\times\int \exp\Big(\frac{1}{2}\int \widetilde{J}_\tau^*\widetilde{G}(\tau-\tau')\widetilde{J}_{\tau'}d\tau d\tau'\Big)d\widetilde{\Lambda},\end{aligned}\tag{2.18}$$

где $\widetilde{G}(\tau-\tau')$ – матричнозначное фундаментальное решение оператора $d/d\tau-\widetilde{E}$, т.е.

$$\Big(\frac{d}{d\tau}-\widetilde{E}\Big)\widetilde{G}(\tau-\tau')=\delta(\tau-\tau')\widetilde{I}.$$

Рассматриваемый интеграл (2.18) требует регуляризации, которую можно осуществить производя деление выражения (2.18) на аналогичное выражение, отвечающее $\alpha=0$. При этом первые сомножители в (2.18) сокращаются. В этой связи рассмотрим второй интеграл в (2.18), который является гауссовым и берется стандартно. Интегрирование по τ,τ' тоже выполняется непосредственно и в результате получаем:

$$\begin{aligned}&\det{}_{2M}^{1/2}\Big[\widetilde{G}(0)-s\widetilde{g}e^{-\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}\widetilde{G}(\beta)\\ &\qquad -s\widetilde{G}(-\beta)\widetilde{g}e^{\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}+\widetilde{g}e^{-\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}\widetilde{G}(0)\widetilde{g}e^{\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}\Big].\end{aligned}\tag{2.19}$$

Функцию Грина $\widetilde{G}(\tau-\tau')$ выберем в виде:

$$\widetilde{G}(\tau-\tau')=(\widetilde{I}\Theta(\tau-\tau')+\widetilde{M})e^{(\tau-\tau')\widetilde{E}},\tag{2.20}$$

т.е. в виде суммы решений неоднородного и однородного уравнений. В (2.20), $\Theta(\tau-\tau')$ – функция Хевисайда, для которой $\Theta(0)=1/2$, и $\widetilde{M}$ – постоянная матрица. При помощи матрицы $\widetilde{M}$ можно избавиться от некоторого мультипликативного произвола в окончательном ответе, т.е., в конечном счете, зафиксировать выбор регуляризации для рассматриваемого интеграла. Согласованность с результатами предыдущих вычислений [2] возникает при следующем выборе $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M}=\Big(e^{(\alpha/2)(\widehat{Q}\otimes\sigma^0)}-\widetilde{I}\Big)\Big(\widetilde{I}-se^{-\beta\widetilde{E}}\widetilde{g}e^{\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}\Big)^{-1}.\tag{2.21}$$

Подставляя (2.20), (2.21) в (2.19) получаем:

$$\det{}_{2M}^{1/2}\Big(e^{(\alpha/2)(\widehat{Q}\otimes\sigma^0)}\Big)\det{}_{2M}^{1/2}\Big(\widetilde{I}-s\widetilde{g}e^{-\alpha\widetilde{Q}}\widetilde{g}^{-1}e^{\beta\widetilde{E}}\Big).\tag{2.22}$$

Окончательно, для получения выражений $G_F^\pm$ и $G_B^\pm$, разделим (2.22) на соответствующее выражение при $\alpha = 0$. Тогда приходим к ответу [2]:

$$e^{\alpha m/2}\det{}_{2M}^{1/2}(\widetilde{I} + \widetilde{M}_{F,B}), \tag{2.23}$$

где

$$\widetilde{M}_{F,B} \equiv \frac{\widetilde{g}\Big[\widehat{Q} \otimes \left(e^{-\alpha\sigma^3} - \sigma^0\right)\Big]\widetilde{g}^{-1}}{\widetilde{I} - se^{-\beta\widetilde{E}}}. \tag{2.24}$$

При записи (2.23), (2.24) использованы соотношения: $\mathrm{tr}\,\widehat{Q} = m$ и

$$\exp\Big(-\alpha\widetilde{g}\widetilde{Q}\widetilde{g}^{-1}\Big) - \widetilde{I} = \widetilde{g}\Big[\widehat{Q} \otimes \left(\exp(-\alpha\sigma^3) - \sigma^0\right)\Big]\widetilde{g}^{-1}.$$

В ответе для $G_F^\pm$ используем $\widetilde{M}_F$ (2.24), где подставляем $s = -1$, а в случае $G_B^\pm$ берем $\widetilde{M}_B$, где $s = 1$.

Ответы для $G_F^\pm$, $G_B^\pm$ получены в [1], [2] именно в виде (2.23), (2.24). В следующем разделе будет показано, что квадратный корень в (2.23) можно извлечь и придти к ответу в виде определителя матрицы размера $M \times M$. В работе [2] граничные условия (2.4) учитывались при записи соответствующего фурье-разложения по частотам. Для получения множителя $e^{\alpha m/2}$ в (2.23), в работах [2] используется прием, состоящий в приписывании, на определенном шаге вычисления, функциональным переменным операторного содержания. В подходе настоящей работы граничные условия учитываются с помощью дельта-функций в подинтегральном выражении. Соответствующую роль теперь играет специальный выбор в (2.20) решения однородного уравнения. Выбор нетривиальной матрицы $\widetilde{M}$ в (2.20) фактически фиксирует след матричнозначной функции Грина:

$$\mathrm{Tr}\left(\widetilde{G}(\tau - \tau')\right) = \beta\mathrm{tr}\,(\widetilde{I}/2 + \widetilde{M}) = \beta M + \beta\mathrm{tr}\,(\widetilde{M}).$$

В близкой форме, функция Грина (2.20) возникала в виде ядра интегрального оператора в [11] при вычислении статистических сумм бозе- и ферми-осцилляторов функциональными методами.

3. Квадратный корень из определителя

Итак, вычисление функционального интеграла (2.13), с помощью которого можно представлять входящие в (2.1) величины

$G_F^{\pm}$, $G_B^{\pm}$, приводит к ответу (2.23) в виде квадратного корня из определителя матрицы размера $2M\times 2M$. Этот корень можно извлечь и придти к определителю матрицы размера $M\times M$. Для этого нужно воспользоваться преобразованием подобия, указанным в работе [6], которое определяется $2M\times 2M$ матрицей $\widetilde{\Sigma}$:

$$\widetilde{\Sigma} \equiv \widehat{I}\otimes \exp\Big(-i\frac{\pi}{4}\sigma^1\Big), \qquad \widetilde{\Sigma}^{-1} = \widehat{I}\otimes \exp\Big(i\frac{\pi}{4}\sigma^1\Big), \tag{3.1}$$

где

$$\exp\Big(i\frac{\pi}{4}\sigma^1\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^0 + i\sigma^1), \tag{3.2}$$

и используются матрицы $\widehat{I}$ и σ^a, $a\in\{0,1,2,3\}$, введенные в предыдущем разделе.

Введем дополнительно следующие обозначения для диагональных матриц размера $M\times M$:

$$\begin{gathered}\widehat{c} = \cos(\widehat{\theta}/2), \quad \widehat{s} = \sin(\widehat{\theta}/2), \quad \widehat{\theta} = \operatorname*{diag}_q\Big\{\theta_q\Big\},\\ \widehat{e} = \widehat{c} + i\widehat{s}, \qquad \widehat{e}^* = \widehat{c} - i\widehat{s}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

В соотношениях (3.3) (как и в (2.16)), в обозначении $\operatorname*{diag}_q$ подразумевается, что индекс q принимает значения в множествах $S^{\pm}$. В обозначениях для матриц соответствующий индекс $\pm$ будем опускать для сохранения наглядности. Определения (3.3) позволяют записать матрицу $\widetilde{g}$ (2.16), которая диагонализует гамильтониан $\widetilde{H}$ (2.14), следующим образом:

$$\begin{aligned}\widetilde{g} &= \widehat{c}\otimes\sigma^0 - i\widehat{s}\otimes\sigma^2\\ &= (1/2)\Big[\widehat{e}\otimes\big(\sigma^0-\sigma^2\big) + \widehat{e}^*\otimes\big(\sigma^0+\sigma^2\big)\Big].\end{aligned} \tag{3.4}$$

При необходимости будем снабжать матричные обозначения (3.3), (3.4) явно указанным аргументом: $\widehat{c}_\theta$, $\widetilde{g}_\theta$ и т.д.

Применим к $\widetilde{g}$ (3.4) преобразование подобия с матрицей $\widetilde{\Sigma}$ (3.1). Используя (3.1)–(3.4) при перемножении матриц, получаем:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}\widetilde{g}\widetilde{\Sigma}^{-1} &= \widehat{c}\otimes\sigma^0 - i\widehat{s}\otimes\sigma^3\\ &= \widehat{e}\otimes\sigma^{\perp} + \widehat{e}^*\otimes\sigma^{\top} = \exp\Big(-i\frac{\widehat{\theta}}{2}\otimes\sigma^3\Big) \equiv \widetilde{e},\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\sigma^{\top} \equiv (1/2)(\sigma^0 + \sigma^3), \qquad \sigma^{\perp} \equiv (1/2)(\sigma^0 - \sigma^3).$$

Воспользуемся (3.5), чтобы вычислить преобразование подобия матрицы $\widetilde{I} + \widetilde{M}_{F,B}$, где $\widetilde{M}_{F,B}$ определяется равенствами (2.24). Получаем:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}(\widetilde{I} + \widetilde{M}_{F,B})\widetilde{\Sigma}^{-1} = \widetilde{I} + \widetilde{e}\widetilde{\Sigma}\Big[\widehat{Q} \otimes \big(e^{-\alpha\sigma^3} - \sigma^0\big)\Big]\widetilde{\Sigma}^{-1}\widetilde{e}^*& \\ \times\, \widetilde{\Sigma}\big(\widetilde{I} - se^{-\beta\tilde{E}}\big)^{-1}\widetilde{\Sigma}^{-1},&\end{aligned} \tag{3.6}$$

где матрица $\widetilde{E}$ определена в (2.15).

Продолжим вычисление правой части (3.6). Перемножение матриц дает:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}\Big[\widehat{Q} \otimes \big(e^{-\alpha\sigma^3} - \sigma^0\big)\Big]\widetilde{\Sigma}^{-1} &= \widehat{Q} \otimes \Big[\big(\cosh\alpha - 1\big)\sigma^0 + \sinh\alpha\sigma^2\Big] \\ &= \Big(\cosh\big(\alpha\widehat{Q}\big) - \widehat{\delta}\Big) \otimes \sigma^0 + \sinh\big(\alpha\widehat{Q}\big) \otimes \sigma^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

где используется

$$\exp\big(\pm\alpha\widehat{Q}\big) = \widehat{I} + \big(e^{\pm\alpha} - 1\big)\widehat{Q}. \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) основано на том, что $\widehat{Q}$ (2.9) обладает свойством проекторности: $\widehat{Q}^2 = \widehat{Q}$. Далее, введем еще обозначения для диагональных матриц:

$$\widehat{f}_s \equiv \operatorname*{diag}_q\Big\{\big(1 - se^{\beta E_q}\big)^{-1}\Big\}, \qquad \widehat{f}_s^c \equiv \widehat{I} - \widehat{f}_s. \tag{3.9}$$

С использованием обозначений (3.9) получаем:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}\big(\widetilde{I} - se^{-\beta\tilde{E}}\big)^{-1}\widetilde{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{2}\Big(\widehat{f}_s^c \otimes \big(\sigma^0 - \sigma^2\big) + \widehat{f}_s \otimes \big(\sigma^0 + \sigma^2\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\widetilde{I} - \widehat{t}^{(-s)} \otimes \sigma^2\big),\end{aligned} \tag{3.10}$$

где принято обозначение для матрицы $\widehat{t}^{(1)} = \widehat{t}$,

$$\widehat{t} \equiv \operatorname*{diag}_q\Big\{\tanh\big(\beta E_q/2\big)\Big\}, \tag{3.11}$$

и $\widehat{t}^{(-1)}$ обозначает матрицу, обратную к $\widehat{t}$.

Осуществим подстановку соотношений (3.7) и (3.10) в правую часть (3.6). Используем при этом следующее равенство:

$$\widetilde{e}^*_\theta\big(\widetilde{I}-\widehat{t}^{(-s)}\otimes\sigma^2\big)\widetilde{e}_\theta=\widetilde{I}+i\big(\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\big)\otimes\sigma^+-i\big(\widehat{e}^*_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\big)\otimes\sigma^-, \tag{3.12}$$

где аргумент в $\widetilde{e}_\theta$ соответствует определению (3.5), а в $\widetilde{e}_{2\theta}$ этот аргумент удвоен. Кроме того, в (3.12) использованы определения:

$$\sigma^\pm=(1/2)\big(\sigma^1\pm i\sigma^2\big).$$

Соотношение (3.12) позволяет "пронести" матрицу $\widetilde{e}^*$ в правую часть формулы (3.6). Теперь, с учетом (3.7), (3.10) и (3.12) приводим (3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}\big(\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}\big)\widetilde{\Sigma}^{-1}=\frac{\widetilde{e}}{2}\Big[&\Big(\cosh\big(\alpha\widehat{Q}\big)+\widehat{I}-\sinh\big(\alpha\widehat{Q}\big)\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\perp\\&+\Big(\cosh\big(\alpha\widehat{Q}\big)+\widehat{I}-\sinh\big(\alpha\widehat{Q}\big)\widehat{e}^*_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\top\\&+i\Big(\sinh\big(\alpha\widehat{Q}\big)-\big(\cosh\big(\alpha\widehat{Q}\big)-\widehat{I}\big)\widehat{e}^*_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^-\\&-i\Big(\sinh\big(\alpha\widehat{Q}\big)-\big(\cosh\big(\alpha\widehat{Q}\big)-\widehat{I}\big)\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^+\Big]\widetilde{e}^*\\=\widetilde{e}\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\otimes\sigma^0&+\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\otimes\sigma^2\Big)\\\times\Big[\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)&-\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\widehat{e}^*_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\top\\&+\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)-\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\perp\Big]\widetilde{e}^*.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Так как определитель матрицы $\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}$ не меняется при сопряжении матрицами $\widetilde{\Sigma}$, $\widetilde{\Sigma}^{-1}$ и $\widetilde{e}$, $\widetilde{e}^*$, из (3.13) получаем:

$$\begin{aligned}\det{}_{2M}\big(\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}\big)=\det{}_{2M}&\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\otimes\sigma^0+\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\otimes\sigma^2\Big)\\\times\det{}_{2M}&\Big[\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)-\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\widehat{e}^*_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\top\\&+\Big(\cosh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)-\sinh\big(\tfrac{\alpha}{2}\widehat{Q}\big)\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\Big)\otimes\sigma^\perp\Big].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Воспользуемся равенством $\operatorname{tr}\widehat{Q}=m$ и представим множитель $e^{\alpha m/2}$ в (2.21) в виде:

$$\det{}^{1/2}_{2M}\Big(e^{\alpha\widehat{Q}/2}\otimes\sigma^\top+e^{\alpha\widehat{Q}/2}\otimes\sigma^\perp\Big). \tag{3.15}$$

Учтем, что первый сомножитель в правой части (3.14) равен единице. Тогда, с учетом (3.15), вычисляемое выражение (2.21) принимает вид:

$$\begin{aligned}&\det{}_{2M}^{1/2}\Big[\big(\widehat{I}+\widehat{K}_s^*\big)\otimes\sigma^\top+\big(\widehat{I}+\widehat{K}_s\big)\otimes\sigma^\perp\Big]\\&\qquad=\det{}_M^{1/2}\big(\widehat{I}+\widehat{K}_s\big)\det{}_M^{1/2}\big(\widehat{I}+\widehat{K}_s^*\big).\end{aligned}\tag{3.16}$$

В (3.16) введено обозначение:

$$\widehat{K}_s\equiv\frac{e^\alpha-1}{2}\widehat{Q}\big(\widehat{I}-\widehat{e}_{2\theta}\widehat{t}^{(-s)}\big),\tag{3.17}$$

где $s=1$ для индекса B и $s=-1$ для индекса F. Во втором сомножителе в правой части (3.16) можно выполнить отражение $q\longleftrightarrow -q$ [7], после чего окончательный ответ гласит:

$$e^{\alpha m/2}\det{}_{2M}^{1/2}\big(\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}\big)=\det{}_M\big(\widehat{I}+\widehat{K}_s\big).\tag{3.18}$$

Таким образом, квадратный корень в (2.23) извлекается, и ответ принимает вид, указанный в [7]. В [7] использованы кратные грассмановы интегралы по когерентным состояниям. Подход в [1], [2] приводит к функциональным интегралам с квазипериодическими граничными условиями и независимо дает для $G(\alpha,m)$ (1.1) те же ответы, что и [7]. Таким образом, дальнейшее развитие технических приемов, использованных в [12], [13], оказывается корректным и допускающим дальнейшие приложения.

В заключение раздела рассмотрим еще один способ извлечь корень из определителя. Этот способ подразумевает "пронесение" матрицы $\widetilde{g}$, стоящей слева в определении $\widetilde{M}_{F,B}$ (2.24), в крайнее правое положение. Так как при сопряжении определитель не меняется, выполним для $\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}$ сопряжение с помощью $\widetilde{g}^{-1}$, $\widetilde{g}$ (3.4). Воспользуемся соотношением

$$\big(\widetilde{I}-se^{-\beta\tilde{E}}\big)^{-1}=\widehat{I}\otimes\sigma^\top-\widehat{f}_s\otimes\sigma^3,\tag{3.19}$$

где $\widehat{f}_s$ определяется в (3.9). Далее, подействуем сопряжением на правую часть формулы (3.19):

$$\begin{aligned}&\widetilde{g}^{-1}\big(\widehat{I}\otimes\sigma^\top-\widehat{f}_s\otimes\sigma^3\big)\widetilde{g}\\&\qquad=(1/2)\big(\widetilde{I}+(\widehat{t}^{(-s)}\otimes\sigma^3)\widetilde{g}_{2\theta}\big),\end{aligned}\tag{3.20}$$

где используются соотношения

$$\widehat{I} - 2\widehat{f}_s = \widehat{t}^{(-s)}, \qquad \left(\widetilde{g}_\theta\right)^2 = \widetilde{g}_{2\theta}. \tag{3.21}$$

Теперь вычислим сопряжение матрицы $\widetilde{I}+\widetilde{M}_{F,B}$. Учитывая (3.20) получаем:

$$\begin{aligned} &\widetilde{g}^{-1}(\widetilde{I} + \widetilde{M}_{F,B})\widetilde{g} \\ &\quad = \widetilde{I} + (1/2)\Big[\big(e^{-\alpha\widehat{Q}} - \widehat{I}\big) \otimes \sigma^{\top} + \big(e^{\alpha\widehat{Q}} - \widehat{I}\big) \otimes \sigma^{\perp}\Big] \\ &\qquad\qquad \times\Big(\widetilde{I} + (\widehat{t}^{(-s)} \otimes \sigma^3)\widetilde{g}_{2\theta}\Big). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Умножая (3.22) слева на матрицу

$$e^{\alpha\widehat{Q}} \otimes \sigma^{\top} + \widehat{\delta} \otimes \sigma^{\perp}$$

(что соответствует учету $e^{\alpha m/2}$) и приводя подобные члены, получаем:

$$\widetilde{I} + \frac{e^{\alpha} - 1}{2}\big(\widehat{Q} \otimes \sigma^0\big)\Big[\widetilde{I} - \big(\widehat{t}^{(-s)} \otimes \sigma^0\big)\widetilde{g}_{2\theta}\Big]. \tag{3.23}$$

Теперь вычислим сопряжение матрицы (3.23) матрицей $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}$. Фактически, требуется воспользоваться формулой (3.5), взятой при удвоенном аргументе θ. Получаем ответ:

$$\begin{aligned} &\Big[\widehat{I} + \frac{e^{\alpha} - 1}{2}\widehat{Q}\big(\widehat{I} - \widehat{t}^{(-s)}\widehat{e}^{*}_{2\theta}\big)\Big] \otimes \sigma^{\top} \\ &\qquad + \Big[\widehat{I} + \frac{e^{\alpha} - 1}{2}\widehat{Q}\big(\widehat{I} - \widehat{t}^{(-s)}\widehat{e}_{2\theta}\big)\Big] \otimes \sigma^{\perp}. \end{aligned}$$

Другими словами, вновь приходим к матрицам, входящим в (3.16), (3.17). На этом раздел, посвященный извлечению квадратного корня из определителя в (2.23), закончен.

4. Временная двухточечная корреляционная функция Z-компонент спинов

4.1 Производящая функция.

Как уже было сказано, в [1], [2] представлен функционально-интегральный подход к вычислению статических корреляционных функций Z-компонент спинов для XY и XX магнетиков Гейзенберга. В данном разделе продемонстрировано обобщение [1],

[2] на случай временных ZZ-корреляторов для XX модели. А именно, рассмотрим вычисление двухточечного коррелятора

$$g_{zz}(m,t) \equiv \left\langle \sigma_k^z(0)\sigma_l^z(t)\right\rangle_T \tag{4.1}$$

для случая XX магнетика (здесь угловые скобки означают температурное усреднение, вычисляемое аналогично (1.1)). Указанный коррелятор при $t = 0$ был впервые вычислен в [9] для нулевого магнитного поля с помощью точной диагонализации гамильтониана XY-модели. В работе [10] это вычисление было обобщено для неравных времен и ненулевого магнитного поля. Более детально двухвременные продольные функции Грина для изотропного случая XY модели изучались в [14] при произвольной температуре. В работе [15] получены явные выражения для временных двухточечных корреляторов Z-компонент спинов, а также для временной автокорреляционной функции намагниченности для XY модели на конечной цепочке. Временные корреляционные функции (в частности, зависящие от времени ZZ-корреляторы) рассматривались также в [16] для неоднородной (двухподрешеточной) XY модели. В работе [4] указанный коррелятор был воспроизведен с помощью техники, применяемой в теории интегрируемых систем [3]. Многочисленные литературные указания, касающиеся вычисления динамических корреляторов XY магнетика имеются в [16], а также в связанной с численными исследованиями работе [17]. Ниже будет показано, что можно дать независимый вывод указанного коррелятора и в подходе [1], [2], если воспользоваться приемом, который состоит во введении производящего функционала.

Итак, искомая временная корреляционная функция (4.1) при ненулевой температуре $T = 1/\beta$ конкретизируется следующим образом:

$$g_{zz}(m,t) = \frac{\mathrm{Tr}\left(\sigma_k^z(0)\sigma_l^z(t)e^{-\beta H_{XX}}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H_{XX}}\right)}, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} &\sigma_l^z(t) \equiv e^{itH_{XX}}\sigma_l^z e^{-itH_{XX}}, \\ &\sigma_k^z(0) \equiv \sigma_k^z, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$m \equiv l - k$, и H_{XX} – гамильтониан XX модели на периодической цепочке с четным числом узлов M (в дальнейшем индекс XX

будем опускать). Перепишем $g_{zz}(m,t)$ (4.2) следующим образом:

$$g_{zz}(m,t) = \frac{\mathrm{Tr}\left(\sigma_k^z e^{itH} \sigma_l^z e^{-(\beta+it)H}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}, \tag{4.4}$$

где

$$H \equiv -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^- + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^+\right) - \frac{h}{2}\sum_{n=1}^{M}\sigma_n^z. \tag{4.5}$$

Периодические граничные условия для спиновых переменных имеют вид:

$$\sigma_{M+1}^{\pm} = \sigma_1^{\pm}. \tag{4.6}$$

С учетом представления (4.4) сведем вычисление $g_{zz}(m,t)$ к вычислению некоторых производящих функционалов, дифференцирование которых приводит к $g_{zz}(m,t)$. С этой целью, вначале с помощью преобразования Йордана-Вигнера переходим от спиновых переменных σ_n^+, σ_n^-, σ_n^z к фермионным переменным $c_n^\dagger$, c_n $(n \in \mathcal{M})$. Алгебра спиновых переменных определяется перестановочными соотношениями:

$$\left[\sigma_k^\alpha, \sigma_n^\beta\right] = 2i\delta_{kn} \in^{\alpha\beta\gamma} \sigma_n^\gamma \tag{4.7}$$

(греческие буквы принимают значения из набора $\{x, y, z\}$), или

$$\left[\sigma_k^+, \sigma_l^-\right] = \delta_{kl}\sigma_l^z, \qquad \left[\sigma_k^z, \sigma_l^\pm\right] = \pm 2\delta_{kl}\sigma_l^\pm, \tag{4.8}$$

где

$$\sigma_n^\pm = (1/2)\left(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y\right).$$

Алгебра фермионных переменных задается антикоммутационными соотношениями:

$$\{c_k, c_l\} = \{c_k^\dagger, c_l^\dagger\} = 0, \quad \{c_k, c_l^\dagger\} = \delta_{kl}. \tag{4.9}$$

Соответствующее отображение задается операторными равенствами:

$$\sigma_n^+ = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - 2c_j^\dagger c_j\right)c_n, \qquad \sigma_n^- = c_n^\dagger \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - 2c_j^\dagger c_j\right) \quad (n \in \mathcal{M}). \tag{4.10}$$

С учетом (4.10), имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} &c_n^\dagger c_n = \sigma_n^-\sigma_n^+ = (1/2)\left(1 - \sigma_n^z\right), \\ &\sigma_n^+\sigma_{n+1}^- = c_{n+1}^\dagger c_n, \quad \sigma_n^-\sigma_{n+1}^+ = c_n^\dagger c_{n+1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Используя (4.11), можно представить (4.10) следующим образом:

$$\sigma_n^+ = e^{-i\pi Q(n-1)} c_n, \qquad \sigma_n^- = c_n^\dagger e^{i\pi Q(n-1)}, \tag{4.12}$$

где

$$Q(n) \equiv \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^- \sigma_j^+ = \sum_{j=1}^{n} c_j^\dagger c_j, \quad Q(M) \equiv \mathcal{N}. \tag{4.13}$$

Оператор $Q(n)$ имеет смысл оператора числа частиц на первых m узлах цепочки, и для оператора полного числа частиц $Q(M)$ принято обозначение $\mathcal{N}$.

В результате преобразования (4.12), коррелятор $g_{zz}(m,t)$ (4.4) приводится в фермионных переменных к следующему виду:

$$\begin{aligned} g_{zz}(m,t) = 1 - 2\frac{\mathrm{Tr}\left(c_k^\dagger c_k e^{-\beta H}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)} - 2\frac{\mathrm{Tr}\left(c_l^\dagger c_l e^{-\beta H}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)} \\ +4\frac{\mathrm{Tr}\left(c_k^\dagger c_k e^{itH} c_l^\dagger c_l e^{-(\beta+it)H}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

При этом периодические граничные условия (4.6) переходят в нетривиальные граничные условия для фермионных переменных:

$$c_{M+1} = (-1)^{\mathcal{N}} c_1, \qquad c_{M+1}^\dagger = c_1^\dagger (-1)^{\mathcal{N}}. \tag{4.15}$$

Введем в рассмотрение операторы $P_\pm$, осуществляющие проектирование на состояния с четным/нечетным числом фермионов:

$$P_+ + P_- = \mathbb{1}, \quad P_+ - P_- = (-1)^{\mathcal{N}}. \tag{4.16}$$

С помощью (4.16) можно представить входящий в (4.14) гамильтониан H следующим образом:

$$H = P_+ H_+ + P_- H_-, \tag{4.17}$$

где квадратичные по фермионным переменным операторы $H_\pm$ имеют следующее матричное представление:

$$H_\pm = c^\dagger \widehat{H}_\pm c - (Mh/2). \tag{4.18}$$

В (4.18), $c^\dagger$ и c означают M-компонентные строку и столбец, построенные из $c_n^\dagger$, c_n, а $M\times M$ матрица $\widehat{H}_\pm$ имеет следующий вид:

$$\widehat{H}_\pm = \begin{pmatrix} h & -1/2 & & & & \pm 1/2 \\ -1/2 & h & -1/2 & & & \\ & -1/2 & h & -1/2 & & \\ & & & \dots & & \\ & & & -1/2 & h & -1/2 \\ \pm 1/2 & & & & -1/2 & h \end{pmatrix}, \qquad (4.19)$$

где указаны только ненулевые элементы. Нижние индексы в $\widehat{H}_\pm$ означают, что граничные условия (4.15) конкретизируются для подпространств с четным/нечетным числом фермионов следующим образом:

$$c_{M+1} = \mp c_1, \qquad c^\dagger_{M+1} = \mp c^\dagger_1 \quad \sim \quad \widehat{H}_\pm. \qquad (4.20)$$

Имея ввиду структуру величин в правой части (4.14), займемся вычислением производящего функционала следующего вида:

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(S,T\big|\mu,\nu) = \frac{\mathrm{Tr}\left(e^S e^{-\mu H} e^T e^{-\nu H}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)}, \qquad (4.21)$$

где S и T – квадратичные операторы

$$S \equiv c^\dagger \widehat{S} c, \qquad T \equiv c^\dagger \widehat{T} c, \qquad (4.22)$$

построенные из диагональных матриц

$$\widehat{S} = \mathrm{diag}\left\{S_1, S_2, \dots, S_M\right\}, \qquad \widehat{T} = \mathrm{diag}\left\{T_1, T_2, \dots, T_M\right\}, \qquad (4.23)$$

и μ, ν – произвольные комплексные числа, $\mu+\nu=\beta$ (β – обратная температура). Например, последнее слагаемое в правой части (4.14) возникает в результате следующей операции над производящим функционалом (4.21):

$$\frac{\partial}{\partial S_k}\frac{\partial}{\partial T_l}\mathcal{G}(S,T\big|\mu,\nu)\bigg|_{\substack{S_n, T_n, \forall n \;\longrightarrow\; 0 \\ \mu,\nu \;\longrightarrow\; -it,\beta+it}}. \qquad (4.24)$$

Если заменить $\widehat{T}$ в (4.21) нулевой матрицей, то возникнет производящий функционал для второго и третьего слагаемых в правой части (4.14).

Пользуясь представлением (4.16) и свойствами проекционных операторов $\left(P_\pm\right)^2 = P_\pm$, $P_+P_- = 0$, получаем:

$$e^{-\nu H_+ P_+ - \nu H_- P_-} = e^{-\nu H_+} P_+ + e^{-\nu H_-} P_- . \tag{4.25}$$

Далее, пользуясь (4.17) и (4.25) получаем:

$$\mathrm{Tr}\left(e^S e^{-\mu H} e^T e^{-\nu H}\right) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{G}_F^+ Z_F^+ + \mathcal{G}_F^- Z_F^- + \mathcal{G}_B^+ Z_B^+ - \mathcal{G}_B^- Z_B^-\Big), \tag{4.26}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm \equiv \mathcal{G}_F^\pm(S,T\big|\mu,\nu) Z_F^\pm = \mathrm{Tr}\left(e^S e^{-\mu H_\pm} e^T e^{-\nu H_\pm}\right), \\ &\mathcal{G}_B^\pm Z_B^\pm \equiv \mathcal{G}_B^\pm(S,T\big|\mu,\nu) Z_B^\pm = \mathrm{Tr}\left(e^S e^{-\mu H_\pm} e^T (-1)^{\mathcal{N}} e^{-\nu H_\pm}\right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Для $Z_F^\pm$, $Z_B^\pm$ используются следующие формулы:

$$Z_F^\pm = \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_\pm}), \qquad Z_B^\pm = \mathrm{Tr}\left((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H_\pm}\right),$$

4.2 Функциональный интеграл.

Соотношения (4.26), (4.27) показывают, что вычисление производящей функции (4.21) сводится к вычислению величин $\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm$, $\mathcal{G}_B^\pm Z_B^\pm$. Воспользуемся процедурой, представленной в [1] для XX-магнетика, и рассмотрим, для определенности, вычисление $\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm$. Используем представление для следа оператора в интегральном виде [11]:

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* e^{z^* z} \big\langle z^* | e^S e^{-\mu H_\pm} e^T e^{-\nu H_\pm} | z \big\rangle, \tag{4.28}$$

где подразумеваются когерентные состояния, построенные в координатном представлении:

$$\begin{aligned} \mid z\big\rangle &\equiv \exp\Big\{\sum_{k=1}^{M} c_k^\dagger z_k\Big\} \mid 0\big\rangle \equiv \exp(c^\dagger z) \mid 0\big\rangle, \\ \big\langle z^* \mid &\equiv \big\langle 0 \mid \exp\Big\{\sum_{k=1}^{M} z_k^* c_k\Big\} \equiv \big\langle 0 \mid \exp(z^* c). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Состояния (4.29) являются собственными для операторов $c_n^\dagger$, c_n, $n \in \mathcal{M}$.

В качестве первого шага введем в (4.28) два разложения единицы. В результате, учитывая при перестановках дифференциалов четность M, приходим к следующему соотношению:

$$\int dzdz^*d\chi^*d\chi d\psi^*d\psi e^{z^*z-\chi^*\chi-\psi^*\psi} \times \langle z^*|e^S|\psi\rangle\langle\psi^*|e^{-\mu H_\pm}|\chi\rangle\langle\chi^*|e^T e^{-\nu H_\pm}|z\rangle. \tag{4.30}$$

Напомним стандартные формулы:

$$\langle\xi^*|e^{c^\dagger\widehat{L}c}|\xi\rangle = \exp(\xi^* e^{\widehat{L}}\xi), \tag{4.31}$$

$$\int d\xi d\xi^* \exp(\xi^*\widehat{K}\xi + \xi^*\eta + \eta^*\xi) = (\det\widehat{K})\exp(-\eta^*\widehat{K}^{-1}\eta), \tag{4.32}$$

где $c^\dagger$ и c означают, соответственно, строку и столбец, построенные из элементов $c_n^\dagger$, c_n $(n \in \mathcal{M})$. При выводе (4.31) используется диагонализуемость эрмитовой матрицы $\widehat{L}$ унитарным преобразованием. Выполним с помощью (4.31), (4.32) интегрирование в (4.30) по ψ^*, χ и по z^*, ψ, и получим (снова в обозначениях z^*, z):

$$e^{\mu Mh/2}\det\widehat{E}\int dzdz^* e^{z^*\widehat{E}^{-1}z}\langle z^*|e^T e^{-\nu H_\pm}|z\rangle, \tag{4.33}$$

где

$$\widehat{E} \equiv e^{\widehat{S}}e^{-\mu\widehat{H}_\pm}, \tag{4.34}$$

и матрицы $\widehat{H}_\pm$, $\widehat{S}$ определены в (4.19), (4.23).

Интеграл, входящий в (4.33), имеет в точности тот же вид, что и интеграл, рассмотренный в [1] для производящего функционала продольных корреляторов XX модели. Дальнейшее вычисление проведем, следуя [1], с помощью перехода к функциональному интегралу. Представим $e^{-\nu H_\pm}$ в виде произведения N одинаковых сомножителей и подставим между ними N экземпляров разложений единичного оператора по базисам когерентных состояний $\langle x^*(a_I)| \equiv \langle\{x_k^*(a_I)\}_{k\in\mathcal{M}}|$, $|x(a_I)\rangle \equiv |\{x_k(a_I)\}_{k\in\mathcal{M}}\rangle$. Здесь $a_I \in \{a_I\}_{I=1}^N$ – независимые комплексные числа, "индексирующие" когерентные состояния. После этого осуществляется переход к $N \to \infty$. Указанные когерентные состояния строятся по аналогии с (4.29) над фоковским вакуумом $|0\rangle$ $(c_n|0\rangle = 0, \forall n)$. Каждый экземпляр этих состояний параметризуется комплекснозначными грассмановыми параметрами $x_k^*(\cdot)$, $x_k(\cdot)$, $k \in \mathcal{M}$. Кроме того, при использовании указанных когерентных состояний следует учитывать, что операторы в них удовлетворяют еще какому-то одному из граничных условий (4.20). Для упрощения формул соответствующее обозначение вводить не будем.

С учетом (4.31) воспользуемся следующим представлением, которое необходимо при вычислении интеграла (4.33):

$$\left\langle z^*|e^T|x(a_1)\right\rangle = \left\langle z^*|e^{c^\dagger \widehat{T} c}|x(a_1)\right\rangle = \exp\bigl(z^* e^{\widehat{T}} x(a_1)\bigr), \tag{4.35}$$

В соотношении (4.35) z^* и $x(1)$ – строка и столбец, образованные переменными на узлах z_k^* и $x_k(1)$. Другое среднее, необходимое для перехода от (4.33) к функциональному интегралу, выглядит следующим образом ($I \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$):

$$\begin{aligned}\left\langle x^*(a_I)|e^{(-\nu/N)H_\pm}|x(a_{I+1})\right\rangle &\underset{N\gg 1}{\simeq} \\ &\simeq e^{(\nu/N)Mh/2}\exp\Bigl(x^*(a_I)x(a_{I+1}) - \frac{\nu}{N}x^*(a_I)\widehat{H}_\pm x(a_{I+1})\Bigr).\end{aligned} \tag{4.36}$$

В результате, с использованием (4.35), (4.36), приходим к представлению (пользуемся заменой переменных при функциональном интегрировании [11]):

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = e^{\beta Mh/2}\int dz^* dz \prod_{I=1}^{N} dx^*(I)dx(I) \\ \times\exp\Bigl\{z^*\bigl(z + \widehat{E}e^{\widehat{T}}x(1)\bigr) + x^*(1)\bigl(x(2) - x(1)\bigr) + \ldots + x^*(N)\bigl(z - x(N)\bigr) \\ -\frac{\nu}{N}\Bigl(x^*(1)\widehat{H}_\pm x(2) + x^*(2)\widehat{H}_\pm x(3) + \ldots + x^*(N)\widehat{H}_\pm z\Bigr)\Bigr\},\end{aligned} \tag{4.37}$$

где матрица $\widehat{E}$ определена в (4.34). Напомним, что параметр ν и индексы a_I, “нумерующие” когерентные состояния – комплексные числа. Пусть $\operatorname{Im} a_I = \operatorname{Im}\nu$, а увеличение номера I на единицу означает, что $\operatorname{Re} a_I$ испытывает приращение на единицу. Сокращенные обозначения $x^*(I)$, $x(I)$ в (4.37) приняты вместо обозначений $x^*(a_I)$, $x(a_I)$ ($I \in \{1, \ldots, N\}$).

Следуя процедуре [1], и учитывая ее модификацию в разделе 2 настоящей работы (см. также [18]), совершим переобозначения

$$z^* \longmapsto x^*(0)e^{-\widehat{T}}\widehat{E}^{-1}, \qquad z \longmapsto x(N+1),$$

и потребуем выполнения условия $e^{-\widehat{T}}\widehat{E}^{-1}x(N+1) = -x(0)$. Устремляя N к бесконечности, переходим от (4.37) к функциональному интегралу:

$$e^{\beta Mh/2}\int e^{S}d\lambda^{*}d\lambda Dx^{*}Dx, \tag{4.38}$$

где S – функционал действия,

$$S \equiv \int L(\tau)d\tau, \tag{4.39}$$

и лагранжиан $L(\tau)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} L(\tau) \equiv & x^{*}(\tau)\Big(\frac{d}{d\tau}-\widehat{H}_{\pm}\Big)x(\tau)+J^{*}(\tau)x(\tau)+x^{*}(\tau)J(\tau), \\ & J^{*}(\tau) \equiv \lambda^{*}\big(\delta(\tau-\tau_0)\widehat{I}+\delta(\tau-\tau_0-\nu)e^{-\widehat{T}}e^{\mu\widehat{H}_{\pm}}e^{-\widehat{S}}\big), \\ & J(\tau) \equiv \big(\delta(\tau-\tau_0)\widehat{I}+\delta(\tau-\tau_0-\nu)e^{\widehat{S}}e^{-\mu\widehat{H}_{\pm}}e^{\widehat{T}}\big)\lambda. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Комплексный аргумент τ в (4.39), (4.40) – континуальная версия дискретного комплексного индекса a_I. В формуле (4.38) дельта-функции, учитывающие возникновение нетривиальных граничных условий по комплексной переменной τ, заменены соответствующими интегралами по вспомогательным грассмановым переменным λ^{*}, λ. Интегрирование $\int d\tau$ в функционале действия S (4.39) идет в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по прямой, параллельной вещественной оси; по поводу интегрирования по $\tau \in \mathbb{C}$ см. [11], [19]. Кроме того, $Dx^{*}Dx$ – функциональная мера интегрирования.

Для вычисления интеграла (4.38) воспользуемся методом стационарной фазы [11]. Уравнения для экстремалей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x^{*}} &= \frac{d}{d\tau}x-\widehat{H}_{\pm}x+J=0, \\ \frac{\delta S}{\delta x} &= -\frac{d}{d\tau}x^{*}-x^{*}\widehat{H}_{\pm}+J^{*}=0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

(предполагается, что вариации траекторий $\delta x^{*}(\tau)$, $\delta x(\tau)$ исчезают при $\tau \to \pm\infty$). Одно из решений уравнений (4.41) записывается следующим образом:

$$x = \int \widehat{G}(\tau-\tau')J(\tau')d\tau', \tag{4.42}$$

где $\widehat{G}(\tau-\tau')$ – фундаментальное решение для оператора $-\big(d/d\tau-\widehat{H}_\pm\big)$:

$$\Big(\frac{d}{d\tau}-\widehat{H}_\pm\Big)\widehat{G}(\tau-\tau')=-\delta(\tau-\tau')\widehat{I}.$$

Выбираем фундаментальное решение в следующем виде:

$$\widehat{G}(\tau-\tau')=\theta(\tau'-\tau)e^{(\tau-\tau')\widehat{H}_\pm},$$

и с использованием (4.42) получаем следующий ответ для (4.38):

$$e^{\beta Mh/2}\mathrm{Det}\,\Big(\frac{d}{d\tau}-\widehat{H}_\pm\Big)\int\exp\Big(\int J^*(\tau)\widehat{G}(\tau-\tau')J(\tau')d\tau d\tau'\Big)d\lambda^* d\lambda. \tag{4.43}$$

Дальнейшее вычисление происходит по аналогии с переходом от (2.18) к (2.22) в разделе 2. В результате, при $\mathrm{Re}\,\nu>0$, получаем:

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm=e^{\beta Mh/2}\mathrm{Det}\,\Big(\frac{d}{d\tau}-\widehat{H}_\pm\Big)\det\big(\widehat{I}+e^{-\nu\widehat{H}_\pm}e^{\widehat{S}}e^{-\mu\widehat{H}_\pm}e^{\widehat{T}}\big), \tag{4.44}$$

откуда следует, что

$$\mathcal{G}_F^\pm=\det\big(\widehat{I}+\widehat{M_F}\big), \tag{4.45}$$

где

$$\widehat{M_F}\equiv\widehat{M_F}(\widehat{S},\widehat{T}|\mu,\nu)\equiv\frac{e^{(\beta-\nu)\widehat{H}_\pm}e^{\widehat{S}}e^{-\mu\widehat{H}_\pm}e^{\widehat{T}}-\widehat{I}}{\widehat{I}+e^{\beta\widehat{H}_\pm}}. \tag{4.46}$$

Переход от (4.44) к (4.45) связан с делением на $Z_F^\pm$ и сводится к делению правой части (4.44) на аналогичное выражение, где матрицы $\widehat{S}$ и $\widehat{T}$ заменены нулевыми матрицами, а также учтено, что $\mu+\nu=\beta$. Для получения коррелятора необходимо, в соответствии с (4.24), дифференцировать выражение (4.45).

4.3 Временная двухточечная корреляционная функция.

Итак, мы получили ответы (4.45), (4.46) для производящего функционала $\mathcal{G}_F^\pm$ в координатном представлении (для $\mathcal{G}_B^\pm$ вычисления аналогичны). Убедимся в том, что в термодинамическом пределе возникают корректные ответы для продольной корреляционной функции XX модели как в случае периодической цепочки, так и для цепочки с открытыми концами.

4.3.1 Периодическая цепочка.

Совершим над $\widehat{H}_\pm$ (4.19) и над $\widehat{S}$, $\widehat{T}$ (4.23) унитарное преобразование с $M \times M$ матрицами $\widehat{u}^\dagger$, $\widehat{u}$, где

$$\big(\widehat{u}\big)_{kq} \equiv \frac{1}{\sqrt{M}} e^{ikq}, \tag{4.47}$$

$\widehat{u}^\dagger$ – эрмитово-сопряженная матрица, и индексы матричных элементов k и q принимают значения в множествах $\mathcal{M}$ и $S^\pm$, соответственно (множества $S^\pm$ состоят из корней уравнений $\cos(Mq) = \mp 1$, [1, 2]). Получаем:

$$\widehat{u}^\dagger \widehat{H}_\pm \widehat{u} = \widehat{\varepsilon} \equiv \operatorname*{diag}_q \big\{\varepsilon_q\big\}, \qquad \varepsilon_q \equiv h - \cos q, \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} \widehat{u}^\dagger \widehat{S} \widehat{u} &= \widehat{\mathcal{S}}, \quad \big(\widehat{\mathcal{S}}\big)_{pq} \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} S_k e^{ik(q-p)}, \\ \widehat{u}^\dagger \widehat{T} \widehat{u} &= \widehat{\mathcal{T}}, \quad \big(\widehat{\mathcal{T}}\big)_{pq} \equiv \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} T_k e^{ik(q-p)}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Так как сопряжение не меняет определителя, используем (4.48), (4.49) и переписываем представление (4.44) следующим образом:

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = e^{\beta M h/2} \operatorname{Det}\Big(\frac{d}{d\tau} - \widehat{\varepsilon}\Big) \det\big(\widehat{I} + e^{-\nu\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{S}}} e^{-\mu\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{T}}}\big). \tag{4.50}$$

Далее переходим к $\nu = \beta + it$, $\mu = -it$, и получаем для $\mathcal{G}_F^\pm$ (4.45):

$$\mathcal{G}_F^\pm = \det\big(\widehat{I} + \widehat{\mathcal{M}}_F\big), \tag{4.51}$$

где

$$\widehat{\mathcal{M}}_F \equiv \widehat{\mathcal{M}}_F(\widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}}\,\big|\, -it, \beta + it) \equiv \frac{e^{-it\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{S}}} e^{it\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{T}}} - \widehat{I}}{\widehat{I} + e^{\beta\widehat{\varepsilon}}}. \tag{4.52}$$

Положим диагональную матрицу $\widehat{S}$ (4.23) равной нулевой матрице $\widehat{O}$. Тогда матрица $\widehat{\mathcal{M}}_F$ в (4.51) принимает вид:

$$\widehat{\mathcal{M}}_F = \widehat{\mathcal{M}}_F(\widehat{O}, \widehat{\mathcal{T}}\,\big|\cdot) = \frac{e^{\widehat{\mathcal{T}}} - \widehat{I}}{\widehat{I} + e^{\beta\widehat{\varepsilon}}}. \tag{4.53}$$

Положим для матрицы $\widehat{T}$ (4.23): $T_1 = T_2 = \cdots = T_m = \alpha$, $T_{m+1} = \cdots = T_M = 0$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда выполняя еще одно сопряжение с диагональной матрицей $\operatorname{diag}_q\left\{e^{i(m+1)q/2}\right\}$ получаем правую часть (4.51) в следующем виде:

$$\det\left(\widehat{I} + \frac{(e^{\alpha}-1)\widehat{Q}}{\widehat{I} + e^{\beta\widehat{\varepsilon}}}\right), \tag{4.54}$$

где матричные элементы матрицы $\widehat{Q}$ определяются (2.9). Иными словами, приходим к соответствующей ("нечетной") производящей функции $G_F^{\pm}$, связанной со статическими продольными корреляторами [1].

В термодинамическом пределе $M \to \infty$, и определители det в правых частях (4.50), (4.51) переходят в определители Фредгольма линейных интегральных операторов с ядрами, возникающими из матрицы (4.52) (также (4.53), (4.54)) при замене всех дискретных аргументов p, q на их континуальные аналоги, принимающие значения в отрезке $[-\pi, \pi]$ [6].

Получим теперь, пользуясь (4.51)–(4.53), явное выражение для временной двухточечной корреляционной функции в термодинамическом пределе. Введем обозначения для частных производных в (4.24): $\partial/\partial S_k$ и $\partial/\partial T_l$ обозначим как ∂_1 и ∂_2. Тогда для $\mathcal{G}_F^{\pm}$ (4.51), где $\widehat{\mathcal{M}}_F$ определяется (4.52), получаем (для удобства сохраняем "дискретные" обозначения):

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2\mathcal{G}_F^{\pm} = \mathcal{G}_F^{\pm}\Bigg[&\operatorname{tr}\left(\frac{\partial_1\widehat{\mathcal{M}}_F}{\widehat{I}+\widehat{\mathcal{M}}_F}\right)\operatorname{tr}\left(\frac{\partial_2\widehat{\mathcal{M}}_F}{\widehat{I}+\widehat{\mathcal{M}}_F}\right)\\ &+\operatorname{tr}\left(\frac{\partial_1\partial_2\widehat{\mathcal{M}}_F}{\widehat{I}+\widehat{\mathcal{M}}_F}\right)-\operatorname{tr}\left(\frac{\partial_1\widehat{\mathcal{M}}_F}{\widehat{I}+\widehat{\mathcal{M}}_F}\frac{\partial_2\widehat{\mathcal{M}}_F}{\widehat{I}+\widehat{\mathcal{M}}_F}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.55}$$

Из соотношений (4.52) получаем следующие выражения для производных (после выполнения предельных переходов, предписываемых (4.24)):

$$\begin{gathered}\partial_1\widehat{\mathcal{M}}_F = \frac{e^{-it\widehat{\varepsilon}}\big(\partial_1\widehat{\mathcal{S}}\big)e^{it\widehat{\varepsilon}}}{\widehat{I}+e^{\beta\widehat{\varepsilon}}}, \quad \partial_2\widehat{\mathcal{M}}_F = \frac{\partial_2\widehat{\mathcal{T}}}{\widehat{I}+e^{\beta\widehat{\varepsilon}}},\\ \partial_1\partial_2\widehat{\mathcal{M}}_F = \frac{e^{-it\widehat{\varepsilon}}\big(\partial_1\widehat{\mathcal{S}}\big)e^{it\widehat{\varepsilon}}\big(\partial_2\widehat{\mathcal{T}}\big)}{\widehat{I}+e^{\beta\widehat{\varepsilon}}}.\end{gathered} \tag{4.56}$$

Вычисление производных $\partial_1\widehat{\mathcal{S}}$ и $\partial_2\widehat{\mathcal{T}}$ приводит к матрицам $\widehat{c}_k$ и $\widehat{c}_l$, соответственно, где матричные элементы таковы: $\big(\widehat{c}_l\big)_{pq} \equiv$

$(1/M)e^{il(q-p)}$. С использованием (4.55), (4.56) получаем для $g_{zz}(m,t)$ (4.14) в термодинамическом пределе следующее выражение:

$$g_{zz}(m,t) = \Big(1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\Big)^2 - \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ip(l-k)+it\cos p}\frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\right|^2$$

$$+\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iq(k-l)-it\cos q}dq\Big)\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ip(l-k)+it\cos p}\frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\Big). \qquad (4.57)$$

При $t=0$ получаем результат [1]:

$$\langle\sigma_k^z\sigma_l^z\rangle_T = \Big(1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\Big)^2 - \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ip(l-k)}\frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\right|^2$$

$$+2\delta_{kl}\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ip(l-k)}\frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\Big). \qquad (4.58)$$

Формула (4.57) совпадает с соответствующим ответом, полученным в [4] с помощью вычислений в базисе бетевских волновых функций.

4.3.2 Цепочка со свободными концами.

В случае XX цепочки с открытыми концами ситуация несколько проще: соответствующий гамильтониан по прежнему задается соотношением (4.5), но теперь в сумме, описывающей взаимодействие ближайших соседей отсутствует слагаемое $n=M$. Соответственно, при переходе к фермионному описанию пользуемся выражением (4.14) для коррелятора с гамильтонианом (4.18). Однако теперь в матрице $\widehat{H}_\pm$ (4.19) матричные элементы с индексами $(M,1)$ и $(1,M)$ равны нулю (фактически, нижний индекс $\pm$ становится лишним). Производящий функционал определяется только выражением (4.45), где вместо $\widehat{H}_\pm$ нужно подставлять матрицу (4.19) с нулями вместо $\pm 1/2$ (обозначим ее $\widehat{H}$).

Собственные значения матрицы $\widehat{H}$ являются корнями характеристического многочлена $\det\big(\widehat{H}-\lambda\big)$ и определяются уравнением $U_M(\cos q)=0$, $\cos q \equiv h-\lambda$, где $U_n(\cos q)$ – многочлен Чебышева 2-го рода [20]. Собственные значения имеют такой же вид, как и

ε_q (4.48), а допустимые значения q определяются соотношением $\sin\bigl((M+1)q\bigr)=0$:

$$q \in S \equiv \Bigl\{q = \frac{\pi}{M+1} l \Bigm| l \in \mathcal{M}\Bigr\}. \tag{4.59}$$

Матрица $\widehat{H}$ диагонализуется ортогональным преобразованием с $M\times M$ матрицей $\widehat{u}$ [9]:

$$\bigl(\widehat{u}\bigr)_{kq} \equiv \Bigl(\frac{2}{M+1}\Bigr)^{1/2} \sin q U_{k-1}(\cos q) = \Bigl(\frac{2}{M+1}\Bigr)^{1/2} \sin\bigl(kq\bigr), \tag{4.60}$$

и сопряженная к $\widehat{u}$ матрица получается транспонированием. Получаем:

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}^{\dagger}\widehat{H}\widehat{u} = \widehat{\varepsilon} \equiv \operatorname*{diag}_{q}\bigl\{\varepsilon_q\bigr\},\\
&\widehat{u}^{\dagger}\widehat{S}\widehat{u} = \widehat{\mathcal{S}}, \quad \bigl(\widehat{\mathcal{S}}\bigr)_{pq} \equiv \frac{2}{M+1}\sum_{k=1}^{M} S_k \sin\bigl(kq\bigr)\sin\bigl(kp\bigr).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

где ε_q как и в (4.48), а q определяется (4.60). В результате вычислений, аналогичных предыдущему случаю, получаем производящий функционал $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G} = \det\bigl(\widehat{I} + \widehat{\mathcal{M}}\bigr),\\
&\widehat{\mathcal{M}} \equiv \widehat{\mathcal{M}}(\widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}}\,\bigl|\, -it, \beta+it) \equiv \frac{e^{-it\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{S}}} e^{it\widehat{\varepsilon}} e^{\widehat{\mathcal{T}}} - \widehat{I}}{\widehat{I} + e^{\beta\widehat{\varepsilon}}},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

где $\widehat{\mathcal{T}}$ определяется аналогично (4.61). Еще одно отличие от предыдущего вычисления связано с тем, что вычисление производных $\partial_1\widehat{\mathcal{S}}$ и $\partial_2\widehat{\mathcal{T}}$ приводит к матрицам $\widehat{c}_k$ и $\widehat{c}_l$, соответственно, где матричные элементы таковы: $\bigl(\widehat{c}_l\bigr)_{pq} \equiv \frac{2}{M+1}\sin\bigl(lq\bigr)\sin\bigl(lp\bigr)$. В результате получаем следующее выражение для коррелятора $g_{zz}(m,t)$ (термодинамический предел):

$$\begin{aligned}
g_{zz}(m,t) = \Bigl(1 - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\bigl(kp\bigr)}{1+e^{\beta\varepsilon_p}} dp\Bigr)\Bigl(1 - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\bigl(lq\bigr)}{1+e^{\beta\varepsilon_q}} dq\Bigr)\\
- \left|\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\bigl(lp\bigr)\sin\bigl(kp\bigr) e^{it\cos p} \frac{dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\right|^2
\end{aligned}$$

$$+\Big(\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(lq)\sin(kq)e^{-it\cos q}dq\Big)\Big(\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(lp)\sin(kp)\frac{e^{it\cos p}dp}{1+e^{\beta\varepsilon_p}}\Big). \tag{4.63}$$

5. Обсуждение

Представленная работа продолжает работы [1], [2], посвященные применению функционального интегрирования к вычислению продольных корреляционных функций для XX и XY магнетиков Гейзенберга. Характерная особенность рассматриваемого подхода состоит в том, что переменные интегрирования подчиняются квазипериодическим (“автоморфным”) граничным условиям на отрезке мнимого времени. По смыслу, предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой части (разделы 2 и 3) показано, что граничные условия по мнимому времени, возникающие в [1], [2], можно учитывать как функциональные связи, которые ограничивают область интегрирования. При этом в подынтегральное выражение вводятся соответствующие дельта-функции. Предложенная регуляризация возникающих функциональных интегралов приводит к ответам, совпадающим с ответами [2]. В разделе 3 показано, каким образом можно извлечь квадратный корень из определителя матриц размера $2M\times 2M$ и привести ответ к той форме, в которой он возникает в [6] и [7]. В работе [6] используется подход, основанный на вычислениях в базисе бетевских волновых функций. В [7] применяется конечнократное грассманово интегрирование. Таким образом демонстрируется корректность подхода, предложенного в [1], [2], и служащего, в определенном смысле, дальнейшим развитием технических идей, высказанных в [12], [13]. Вторая часть предлагаемой работы (раздел 4) содержит обобщение [1] на случай двухточечных корреляторов третьих компонет спинов с явной зависимостью от времени. Раздел 4 также основан на введении производящей функции и ее вычислении методом функционального интегрирования. В качестве теста вычисляется двухточечная продольная функция Грина для XX магнетиков как на периодической цепочке, так и на цепочке со свободными концами.

В заключение отметим, что XX модель, затрагиваемая в разделе 4, может рассматриваться как модель, возникающая в пределе бесконечного отталкивания на узле для бозонной модели

Хаббарда (случай бозонов с "твердой сердцевиной"), и оказывается полезной при изучении (квантовой) фазовой диаграммы последней [21]. Кроме того, XX модель представляет интерес в связи с описанием экситонов Френкеля [22], а также в связи с квантовыми вычислениями [23]. Кроме того, XY, XXX и XXZ модели также представляют интерес для квантовых вычислений [24].

Благодарности

Автор благодарит Н. М. Боголюбова и П. П. Кулиша за обсуждение работы и полезные указания.

Литература

1. К. Малышев *Функциональное интегрирование с "автоморфным" граничным условием и корреляторы третьих компонент спинов в XX модели Гейзенберга.* — Теор. Мат. Физ. **136**, № 2 (2003), 285–298; arXiv: hep-th/0204007.
2. C. Malyshev *Functional integration with "automorphic" boundary conditions and correlators of z-components of spins in the XY and XX Heisenberg chains.* — In: New Developments in Mathematical Physics Research. Ed., Charles V. Benton (Nova Science Publishers, New York, 2004), pp. 85–116; arXiv: math-ph/0405009.
3. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge, Cambridge University Press (1993).
4. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti *Temperature correlation functions in the XXO Heisenberg chain. I.* — Teor. Mat. Fiz. **94** no. 1 (1993), 19–51.
5. F. H. L. Eßler, H. Frahm, A. G. Izergin, V. E. Korepin *Determinant representation for correlation functions of spin-1/2 XXX and XXZ Heisenberg magnets.* — Comm. Math. Phys. **174** no. 1 (1995), 191–214.
6. А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов *О корреляционных функциях XY-модели.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 178–191.
7. А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин *Одновременные температурные корреляторы одномерной XY-цепочки Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 173–206; arXiv: solv-int/9710028.
8. N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras *Spin-spin correlation functions of the XXZ-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain in a magnetic field.* — Nucl. Phys. B **641** no. 3 (2002), 487–518.

   N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras *Correlation functions of the XXZ spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations.* — Nucl. Phys. B **642** no. 3 (2002), 433–455.
9. E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis *Two soluble models of an antiferromagnetic chain.* — Ann. Phys. (NY) **16** no. 3 (1961), 407–466.

10. Th. Niemeijer *Some exact calculations on a chain of spins 1/2. I, II.* — Physica **36** no. 3 (1967), 377–419; **39** (1968), no. 3, 313–326.
11. V. N. Popov, V. S. Yarunin *Collective Effects in Quantum Statistics of Radiation and Matter.* Dordrecht, Kluwer (1988).
12. L. Alvarez-Gaumé *Supersymmetry and index theory.* In: Supersymmetry. NATO ASI Ser. V. 125. Eds., K. Dietz et. al. (Plenum Press, New York, 1985), pp. 1–44.
13. В. Н. Попов, С. А. Федотов *Метод функционального интегрирования и диаграммная техника для спиновых систем.* — Журн. Эксп. Теор. Физ. **94**, № 3 (1988), 183–194.
14. S. Katsura, T. Horiguchi, M. Suzuki *Dynamical properties of the isotropic XY model.* — Physica **46** no. 1 (1970), 67–86.
15. P. Mazur, Th. J. Siskens *Time correlation functions in the a-cyclic XY model. I.* — Physica **69** no. 1 (1973), 259–272.
16. J. H. H. Perk, H. W. Capel *Time-dependent xx-correlation functions in the one - dimensional XY-model.* — Physica A **89** no. 2 (1977), 265–303.
J. H. H. Perk, H. W. Capel, Th. J. Siskens *The correlation functions and ergodic properties in the alternating XY chain.* — Physica A **89** no. 2 (1977), 304–325.
17. G. Müller, R. E. Shrock *Dynamic correlation functions for one-dimensional quantum spin systems: New results based on a rigorous approach.* — Phys. Rev. B **29** no. 1 (1984), 288–301.
18. Ф. А. Березин *Метод вторичного квантования.* Москва, Наука (1986).
19. A. M. Polyakov *Gauge Fields and Strings.* London, Harwood Academic Publishers (1987).
20. W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* Berlin, Springer (1966).
21. S. Sachdev *Quantum Phase Transitions.* Cambridge, Cambridge University Press (1999).
22. F. Colomo, A. G. Izergin, V. Tognetti *Correlation functions in the XXO Heisenberg chain and their relations with spectral shapes.* — J. Phys. A: Math. Gen. **30** no. 2 (1977), 361–370.
23. B.-Q. Jin, V. E. Korepin *Entanglement, Toeplitz determinants and Fisher-Hartwig conjecture.* — J. Stat. Phys. **116** no. 1-4 (2004), 79–95; arXiv: quant-ph/0304108.
24. B.-Q. Jin, V.E. Korepin *Correlation functions in spin chains and information theory.* — Phys. Rev. A **69** no. 6 (2004), 120406PRA; arXiv: quant-ph/0309188.
A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin *Entanglement in XY spin chain;* arXiv: quant-ph/0409027.

Malyshev C. The condition of quasi-periodicity in imaginary time as a constraint at the functional integration and the time-dependent ZZ-correlator of the XX Heisenberg magnet.

A functional integration approach for calculation of the longitudinal correlation functions of the XY Heisenberg magnet in the constant homogeneous magnetic field is considered in the present paper. The generating functionals of the correlators are defined in the form of the functional integrals over anti-commuting variables. The peculiarity of the functional integrals consists in the fact that the integration variables depend on the imaginary time quasi-periodically. The corresponding boundary conditions are accounted for as constraints which reduce the integration domain. For the XX Heisenberg magnet an application of the approach is given in the case of two-point correlator of third components of spins with an explicit dependence on time.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 18 декабря 2004 г.