Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 317, 2004 г.

В. Д. Ляховский

О КЛАССИЧЕСКИХ r-МАТРИЦАХ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ НОСИТЕЛЕМ

**Моему другу,
Петру Петровичу Кулишу**

1. Введение

Постоянные треугольные решения классического уравнения Янга–Бакстера [1] играют важную роль в алгебре и приложениях (см. детали в [2–4] и в цитированных там работах). Они описывают пуассоновы структуры $\pi(r)$, совместимые с начальными алгебрами Ли $\mathfrak{g}$, т.е. механические системы, которые могут существовать на пространстве с фиксированной некоммутативностью $\mathfrak{g}$. Решения r классического уравнения Янга–Бакстера определяют невырожденную билинейную форму ω_r на пространстве подалгебры $\mathfrak{g}_c \subseteq \mathfrak{g}$, называемой носителем r-матрицы. Благодаря невырожденности ω_r алгебра Пуассона $\mathfrak{g}^{\#}(r)$ (введенная с помощью r) эквивалентна $\mathfrak{g}_c$. Чтобы описать все структуры $\pi(r)$ для данной g, достаточно найти все подалгебры-носители $\mathfrak{g}_c$ и соответствующие формы ω_r [5].

Для простых алгебр Ли с разложением Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{b}_+ = \mathfrak{b}_- + \mathfrak{n}_+$ существует несколько классов постоянных антисимметричных r-матриц, для которых в явном виде известны соответствующие решения $\mathcal{R}$ квантового уравнения Янга–Бакстера. Они конструируются в форме $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}$, где $\mathcal{F}$ является твистом, т.е. решением уравнений Дринфельда [1].

Среди твистов для простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ полные цепи $\mathcal{F}_{ch}$ расширенных жордановых твистов выделяются тем, что их носители $\mathfrak{g}_{ch}$ могут быть достаточно большими, чтобы содержать $\mathfrak{n}_+$ (или $\mathfrak{n}_-$). Цепи $\mathcal{F}_{fch}$ и соответствующие им решения КУЯБ r_{fch} с носителями $\mathfrak{g}_{fch} \supset \mathfrak{n}_\pm$ называются полными [7].

Это исследование проводилось при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по гранту No. 03-01-00593.

Свойства полных цепей существенно различаются для двух классов корневых систем Λ^I и Λ^{II}. Рассмотрим старший корень $\theta_0 \in \Lambda \equiv \Lambda_0$ и корневое подпространство $V_1 = \{v \in V_0 \mid (v, \theta_0) = 0\}$. В наборе $\Lambda_1 = V_1 \cap \Lambda_0$ находим старший корень θ_1 и подпространство $V_2 = \{v \in V_1 \mid (v, \theta_1) = 0\}$. Эта процедура порождает последовательность

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_f,$$

которая заканчивается, когда нет корней в V_f. (Последнее пространство V_f является ортогональным к корням $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{f-1}$.) Для систем типа Λ^I последнее пространство является непустым, в то время как для Λ^{II} имеем $V_f = 0$. Во втором случае последовательность корней

$$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{f-1}$$

образует базис V_0 и f совпадает с рангом алгебры $\mathfrak{g}$. Когда $\Lambda = \Lambda^I$, имеем $f < \operatorname{rank}(\mathfrak{g})$.

Серии B, C и $D_{t=2s}$ относятся к алгебрам второго типа, серии A_l для $l > 1$ и $D_{t=2s+1}$ – алгебры первого типа. Для $\mathfrak{g}\left(\Lambda^{II}\right)$ алгебр полные цепи расширенных твистов имеют носитель $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{b}_+(\mathfrak{g})$. Для $\mathfrak{g}\left(\Lambda^I\right)$ алгебр носитель полной цепи содержит $\mathfrak{n}_+(\mathfrak{g})$, но содержит лишь часть подалгебры Картана $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$.

Наиболее интересной является ситуация для серии A_l, где размерность V_f увеличивается с рангом алгебры.

Мы продемонстрируем, что полные цепи r-матриц для алгебр $\mathfrak{g}\left(\Lambda^I\right)$ могут наращиваться с помощью набора дополнительных жордановых слагаемых. Результатом будут удлиненные цепи с параболическим носителем $\mathfrak{g}_{ech}$, который содержит $\mathfrak{b}_+(\mathfrak{g})$ и пересекается нетривиальным образом с $\mathfrak{n}_-$: $\mathfrak{g}_{ech} \cap \mathfrak{n}_-(\mathfrak{g}) = \mathfrak{v}_-$. Пространство $\mathfrak{v}_-$ в алгебрах $\mathfrak{g}\left(\Lambda^I\right)$ является аналогом пространства $\mathfrak{b}_\perp$ в алгебрах $\mathfrak{g}\left(\Lambda^{II}\right)$, генераторы которых соответствуют корням в V_{f-1} (пространство ортогонально набору $\{\theta_i \mid i = 0, \ldots, f-2\}$). Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g}\left(\Lambda^{II}\right)$ и классическую r-матрицу для полной цепи расширенных жордановых членов $r_{(link)} : r_{fch} = \sum_{i=1}^{f} r_{(link)i}$. Аннулируем последний член и рассмотрим дуальную алгебру $\mathfrak{g}^{\#}\left(r_{(f-1\succ 1)}\right)$. Для подалгебры $\mathfrak{b}_\perp$ всегда можно найти такой базис, что все копроизведения $\delta_{r_{(f-1\succ 1)}}(\mathfrak{b}_\perp)$ являются примитивными. Мы покажем, что для алгебр типа I в элементах, дуальных к полной цепи $\mathfrak{g}^{\#}(r_{fch})$ всегда можно найти базис, в котором все коскобки $\delta_{fch}(\mathfrak{v}_-)$ становятся квазипримитивными. Мы называем коскобку $\delta(a)$ квазипримитивной, когда существует элемент $b \neq a$, $b \in \mathfrak{g}$, такой, что $\delta(a) = a \wedge b$. Квазипримитивная коскобка является примитивной, если $b = 0$, т.е. $a \in \operatorname{Ker} \delta$. Ниже будет продемонстрировано, что квазипримитивность в случае I (также, как примитивность в случае II) позволяет включить дополнительные жордановы члены в соответствующие цепи $\left(r_{fch}\right.$ анд $\left.r_{(f-1\succ 1)}\right)$. Во втором случае эта процедура завершает построение полной цепи $r_{fch} = r_{(f-1\succ 1)} + r_J$ с носителем $\mathfrak{g}_{fch}$, совпадающим с подалгеброй Бореля. В случае $\mathfrak{g}\left(\Lambda^I\right)$ это приводит к удлиненной цепи $r_{ech} = r_{fch} + r_J$, где аналогичным свойством обладает параболический носитель – это минимальный носитель, содержащий подалгебру Бореля. Удлиненные цепи существуют для любой алгебры $\mathfrak{g}\left(\Lambda^I\right)$. Мы построим их в явном виде для $\mathfrak{g} = sl\,(2m+1)$.

2. Свойства генераторов v_- в дуальной алгебре $\mathfrak{g}^{\#}\left(r_{fch}\right)$

Далее мы будем рассматривать простые алгебры Ли $\mathfrak{g}$ серии A_{n-1}. Максимальная последовательность старших корней $\{\theta_s\}_{s=0,\dots,f-1}$ имеет длину $f = \begin{cases} n/2 \\ (n-1)/2 \end{cases}$ для четных и нечетных n соответственно. В частности мы обратим особое внимание на случай $n = 2m+1$. Другие случаи могут быть исследованы аналогично. Каноническая полная цепь из расширенных жордановых слагаемых [6] имеет r-матрицу

$$\begin{aligned}
r_{fch} = {} & E_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} \wedge E_{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}} + H_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}} \wedge E_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}} + \\
& + \cdots + \\
& + \sum_{k_{s+1}=s+2}^{n-s-1} E_{s+1,k_{s+1}} \wedge E_{k_{s+1},n-s} + H_{s+1,n-s} \wedge E_{s+1,n-s} + \\
& + \sum_{k_s=s+1}^{n-s} E_{s,k_s} \wedge E_{k_s,n-s+1} \wedge + H_{s,n-s+1} \wedge E_{s,n-s+1} + \\
& + \sum_{k_{s-1}=s}^{n-s+1} E_{s-1,k_{s-1}} \wedge E_{k_{s-1},n-s+2} + H_{s-1,n-s+2} \wedge E_{s-1,n-s+2} +
\end{aligned}$$

$$+\cdots+$$
$$+\sum_{k_1=2}^{n-1} E_{1,k_1}\wedge E_{k_1,n}+H_{1,n}\wedge E_{1,n}. \qquad (1)$$

Это решение КУЯБ является представителем m-мерного многообразия классических r-матриц

$$r_{fch}=\sum_{k=1}^{m}\xi_k\left(H_{k,n-k+1}\wedge E_{k,n-k+1}+\sum_{s=k+1}^{n-k}E_{k,s}\wedge E_{s,n-k+1}\right), \qquad (2)$$

где $\xi_k \in \mathbb{C}^1$ – независимые параметры (один параметр для каждого звена цепи; см. подробности в ([6])).

Рассмотрим биалгебру Ли $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\#})$, соответствующую r-матрице (2). В [8] было доказано, что для любой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и цепи r_{ch} дуальная алгебра $\mathfrak{g}^{\#}$ может быть разложена в полупрямую сумму

$$\mathfrak{g}^{\#}=\mathfrak{g}_c\vdash\mathfrak{a}, \qquad (3)$$

с абелевым идеалом $\mathfrak{a}$, генерируемым элементами a_j^*, дуальными к $a_j \in \mathfrak{g}\setminus\mathfrak{g}_c$. Пусть $\{h_\alpha, e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda(\mathfrak{g}), \alpha\in S(\mathfrak{g})\}$ является базисом Картана–Вейля простой алгебры $\mathfrak{g}$ с корневой системой $\Lambda(\mathfrak{g})$ и набором простых корней $S(\Lambda)$. Пусть элементы $\{h_\alpha^*, e_\lambda^*\}$ канонически дуальны к $\{h_\alpha, e_\lambda\}$ и образуют базис в $\mathfrak{g}^{\#}$. Алгебра $\mathfrak{g}^{\#}$ имеет естественную градуировку, индуцированную корневой системой $\Lambda(\mathfrak{g})$ с векторной градуировочной группой $\Gamma(r)$, порожденной определенным поднабором в $\Lambda(\mathfrak{g})$ и нулем.

Самодуальная подалгебра, дуальная к носителю, $(\mathfrak{g}_c)^{\#}\approx\mathfrak{g}_c$ градуирована в соответствии со следующими правилами [8]:

- каждый элемент $e_{\theta_s}^*$ имеет нулевую градуировку,
- каждый элемент $e_{h_{\theta_s}}^*$ имеет градуировочный вектор $(-\theta_s)$,
- для каждого члена расширения $e_\mu\wedge e_\nu\in r_{ch}$ элемент e_μ^* имеет градуировку $(-\nu)$, в то время как e_ν^* имеет градуировку $(-\mu)$

Градуировка абелева идеала $\mathfrak{a}$ следует (унаследована) из корневой системы $\Lambda(\mathfrak{g})$:

- каждый элемент e_ξ^* имеет градуировочный вектор ξ,
- каждый элемент $h_\perp^*$ картановой подалгебры $\mathfrak{h}_\perp^{\#}$ имеет нулевую градуировку. (Соответствующий элемент $h_\perp \in \mathfrak{h}$

ортогонален всем картановым элементам в жордановых слагаемых цепи. Для канонической цепи, линейная форма, введенная с помощью $h_\perp$ ортогональна всем корням $\{\theta_i \mid i = 0, \ldots, m-1\}$.)

Эти правила справедливы для любого типа цепей, включая периферические [9]. Таким образом, в жордановых слагаемых $h_{\theta_s} \wedge e_{\theta s}$ канонические картановы факторы h_{θ_s} могут быть заменены на $h_{\theta_s} + \sum \gamma_s h_s^\perp$, $\gamma_s \in \mathbb{C}$. В последнем случае форма, введенная на градуированном пространстве картановым элементом $e^*_{\theta_s} \in (\mathfrak{g}_c)^\#$ также зависит от γ. В частности оператор $ad_{e^*_\eta}$ с $e_\eta \in \mathfrak{g}_c$ действует нетривиально на $h_s^{\perp *}$ тогда и только тогда, когда $\eta\left(h_s^\perp\right) \neq 0$.

В каноническом случае, r_{fch}, векторы с отрицательными корнями $\Lambda^-(\mathfrak{g})$ (и нуль) образуют "синий" набор градуировочных векторов для генераторов $(\mathfrak{g}_c)^\#$. "Красный" набор $\Lambda^-(\mathfrak{g}) \cup 0$ приписывается генераторам $\mathfrak{a}$. Таким образом, композиции в $\mathfrak{g}^\#$ описываются с помощью градуировочной диаграммы (мы обозначаем ее тем же символом $\Gamma(r)$), содержащей две наложенных (цветных) системы векторов: присоединенные операторы алгебры, описываемые синими векторами, действуют аддитивно на пространстве представления (системе красных векторов). В нашем случае эти два набора таковы: $(\Lambda^-(\mathfrak{g}) \cup 0)^b \cup (\Lambda^-(\mathfrak{g}) \cup 0)^r = \Gamma^b(r) \cup \Gamma^r(r) = \Gamma(r)$.

Наша задача построить новые решения для КУЯБ, добавляя к r_{fch} слагаемые жорданова типа

$$h_\lambda \wedge e_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda^-(\mathfrak{g}).$$

Следовательно, мы должны найти все квазипримитивные генераторы в $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\#)$. Для этой цели мы будем использовать градуировочную диаграмму $\Gamma(r)$. Элемент $e_\lambda \in \mathfrak{g}$ является квазипримитивным в биалгебре Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\#)$ тогда и только тогда, когда градуировочный вектор его дуального партнера e^*_λ не может быть представлен как сумма двух векторов, один из которых – ненулевой вектор из синего набора. Для квазипримитивного e_λ единственные присоединенные операторы, для которых образ в первой производной подалгебре $\left(\mathfrak{g}^\#\right)^{(1)}$ будет e^*_λ, – это операторы типа $ad_{e^*_\theta}$ (с $e^*_\theta \in \mathfrak{g}_c$). Другими словами, мы должны рассматривать концы векторов в $\Gamma(r)$, которые не могут быть достигнуты из других (красных) точек с помощью ненулевых векторов, принадлежащих $\Gamma(r)^b$.

Теперь мы продемонстрируем, что в $\left(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\#}\right)$ мы можем найти три набора квазипримитивных генераторов. Первый набор – это $\{e_{\theta_s}* \mid s=0,\ldots,m-1\}$. (Для алгебр серии A_n мы используем представление корней в естественных координатах, в котором $\theta_s=\varepsilon_s-\varepsilon_{n-s+1}$.) Он состоит из генераторов подалгебры Картана $(\mathfrak{g}_c)^{\#}$ с (синей) нулевой градуировкой. Все эти элементы примитивны. Второй набор содержит элементы $h^*_{\perp}\in(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$, дуальные к картановым в $\mathfrak{h}_{\perp}$. В канонической цепи генераторы $h_{\perp}$ ортогональны всем $\{\theta_k \mid k=0,\ldots,m-1\}$, т.е. $\theta_k(h_{\perp})=0$. Эти элементы принадлежат к $\mathfrak{a}$, имеют (красную) нулевую градуировку и, таким образом, являются примитивными. Наиболее важным для нас является третий набор – $\left\{e^{\#}_{-\alpha}\mid\alpha\in S(\Lambda)\right\}$. Он содержит элементы, дуальные к генераторам $e_{-\alpha}$ с отрицательными простыми корнями. Они принадлежат $\mathfrak{a}$ и имеют красную градуировку $\{-\alpha_k=\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k \mid k=1,\ldots,2m\}$. Для случая канонической цепи (см. r-матрицу (2)) этот набор пуст. Для любого красного вектора $(-\alpha_k)^{(r)}$ мы имеем соответствующий синий $(-\alpha_k)^{(b)}$, который сдвигает красную нулевую точку в конечную точку $(-\alpha_k)^{(r)}$. Красные нули представляют элементы $(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$ и среди них мы можем найти такие, для которых дуальные партнеры не ортогональны к α_k. Присоединенные операторы, соответствующие $(-\alpha_k)^{(b)}$ действуют нетривиально на такие элементы $h^{\#}_{\perp}$:

$$\left[h^{\#}_{\perp},e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(b)}}\right]^{\#}\sim\left(-\alpha_k\left(h_{\perp}\right)\right)e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(r)}}. \tag{4}$$

Это не единственные композиции, нарушающие квазипримитивность $e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(r)}}$. Напомним, что подалгебра $(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$ зависит от выбора генераторов Картана в жордановых слагаемых цепи. Для канонической цепи это будут $\{h_{\theta_s}\}$. В общем случае жордановы члены выглядят следующим образом: $\left\{\left(h_{\theta_s}+\eta_s h^{\perp}_s\right)\wedge e_{\theta_s}\right\}$. Это означает, что сумма $\sum\eta_s h^{\perp}_s\wedge e_{\theta_s}$ может быть добавлена к начальной r_{fch}:

$$r_{rch}=r_{fch}+r_r=r_{fch}+\sum\eta_s h^{\perp}_s\wedge e_{\theta_s}.$$

Заметим, что здесь r_r сама является решением КУЯБ. Преобразование $r_{fch}\Rightarrow r_{fch}+r_r$ означает вращение гиперплоскости $h^{\#}_{\perp}$ в пространстве $h^{\#}$. Мы называем r_r *вращательным членом*.

Выбирая соответствующие коэффициенты η_s, мы можем тривилизовать композицию (4) и сделать элемент $e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(r)}}$ квазипримитивным. В этой ситуации пространство $h^{\#}_{\perp}$ становится ортогональным к α_k. В членах r_{rch} это означает, что подпространство V^C_{ch} (генерированное дуальными элементами $\{h^*_s\}$ картановых факторов, принадлежащих жордановым членам $\{h_s \wedge e_{\theta_s} \mid s = 0,\dots,m-1\}$) содержит α_k. Поскольку $\dim V^C_{ch} = m$, такие требования могут быть выполнены по крайней мере для m простых корней $\alpha_k \in S_{ch}(\Lambda)$. Ниже мы покажем, что для $\mathfrak{g} = sl(n)$ эти m дополнительных условий могут быть всегда выполнены, и мы можем получить в точности m квазипримитивных генераторов $\left\{e^{\#}_{-\alpha_k} \mid \alpha_k \in S_{ch}(\Lambda)\right\}$.

3. Конструкция цепи с параболическим носителем

Чтобы построить дополнительные жордановы члены $\{h_\lambda \wedge e_\lambda, \mid \lambda \in \Lambda^-(\mathfrak{g})\}$, нам нужен набор взаимно ортогональных отрицательных простых корней. Причина в том, что любая нетривиальная комбинация жордановых членов $\sum h^{\perp}_k \wedge e_{-\alpha_k}$ с некоммутативными генераторами $e_{-\alpha_k}$ нарушает КУЯБ и ненулевая скобка Схоутена $\left[\left[\sum h^{\perp}_k \wedge e_{-\alpha_k}, \sum h^{\perp}_k \wedge e_{-\alpha_k}\right]\right]$ не может быть компенсирована такими членами, как $\left[\left[r_{rch}, \sum h^{\perp}_k \wedge e_{-\alpha_k}\right]\right] + \left[\left[\sum h^{\perp}_k \wedge e_{-\alpha_k}, r_{rch}\right]\right]$. Мы будем рассматривать следующий набор m взаимно ортогональных корней

$$S^{\perp}_{ch}(\Lambda) = \{\alpha_k = \varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2k} \mid k = 1,\dots,m\}. \tag{5}$$

Присоединенное действие (4) тривиализуется тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{L}(h^*_s \mid s = 0,\dots,m-1) \supseteq S^{\perp}_{ch}(\Lambda), \tag{6}$$

(Здесь $\mathcal{L}(h^*_s)$ – пространство, генерированное элементами $\{h^*_s\}$.)

Лемма 1. *r-матрица*

$$r_r = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \widetilde{H}^{\perp}_i \wedge E_{i,n-i+1}, \tag{7}$$

с

$$\widetilde{H}^{\perp}_i = \sum_{j=i}^{n-i} (-1)^{j+1} H_{j,j+1}$$

вращает цепь

$$r_{fch}=\sum_{k=1}^{m}\xi_k\left(H_{k,n-k+1}\wedge E_{k,n-k+1}+\sum_{p=k+1}^{n-k}E_{k,p}\wedge E_{p,n-k+1}\right).$$

Сумма

$$r_{rch}=r_{fch}+r_r$$

является решением КУЯБ, *и в дуальной алгебре* $\mathfrak{g}^{\#}(r_{rch})$ *элементы* $\left\{e^{\#}_{-\alpha_k}\mid\alpha_{2k-1}=\varepsilon_{2k-1}-\varepsilon_{2k}\mid 1,\dots,m\right\}$ *будут квазипримитивными.*

Доказательство. Элементы $\widetilde{H}_i^{\perp}$ ортогональны к старшим корням $\{\theta_s\}_{s=0,\dots,m-1}$ цепи (1). В алгебре $\mathfrak{g}^{\#}(r_{fch})$ мы имеем набор примитивных коммутирующих генераторов: $\left\{(E_{i,n-i+1})^*,\left(\widetilde{H}_i^{\perp}\right)^*\mid i,j=1,\dots,m\right\}$. Следовательно, оба элемента: r_r и $r_{fch}+r_r$ – являются решениями КУЯБ. Квазипримитивность реализуется для базисных элементов $\mathfrak{g}^{\#}$, коррелированных с разложением (3). Для набора $\left\{e^{\#}_{-\alpha}\mid\alpha\in S(\Lambda)\right\}$ это означает, что в терминах дуальных элементов $e^*_{-\alpha_k}$ генераторы $e^{\#}_{-\alpha}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&e^{\#}_{-\alpha_t}=\left(e^*_{-\alpha_t}+e^*_{\alpha_{n-t}}\right)\qquad t=1,\dots,q-1,\widehat{q},q+1\dots,n-1;\\
&e^{\#}_{-\alpha_q}=e^*_{-\alpha_q}.\quad q=\left\{\begin{array}{cc} m & \text{для нечетных } m\\ m+1 & \text{для четных } m\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Переписывая r-матрицу

$$\begin{aligned}
&r_{rch}=r_{fch}+r_r=\\
&=\sum_{k=1}^{m}\xi_k\left(\left(H_{k,n-k+1}+H_k^{\perp}\right)\wedge E_{k,n-k+1}+\sum_{p=k+1}^{n-k}E_{k,p}\wedge E_{p,n-k+1}\right)
\end{aligned}$$

и картановские элементы

$$\begin{aligned}
&\left\{H_{k,n-k+1}+\widetilde{H}_k^{\perp}\mid k=1,\dots,m\right\}\\
&=\left\{\begin{array}{c}\left(H_{1,2}+\ldots+H_{2m-1,2m}\right),\left(H_{3,4}+\ldots+H_{2m-1,2m}\right),\\ \left(H_{3,4}+\ldots+H_{2m-3,2m-2}\right),\dots,H_{m,m+1}\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

мы замечаем, что линейная оболочка $\mathcal{L}\left\{H_{k,n-k+1}+\widetilde{H}_k^{\perp} \mid k=1,\ldots,m\right\}$ содержит набор $\{H_{2k-1,2k} \mid k=1,\ldots,m\}$ элементов Картана, дуальных к простым корням $\{\alpha_{2k-1}=\varepsilon_{2k-1}-\varepsilon_{2k} \mid 1,\ldots,m\}$. Подпространство $(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$ в $\mathfrak{g}^{\#}(r_{rch})$ определяется как ортогональное к набору генераторов Картана в r_{rch}. Как мы видим, это эквивалентно требованию, что $\mathfrak{h}_{\perp}^{*}$ ортогонально корням $\{\alpha_{2k-1} \mid 1,\ldots,m\}$. В результате операторы $\mathrm{ad}_{\left(e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(b)}}\right)}$ не могут сдвинуть элементы $(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$ в направлении $(-\alpha_k)^{(r)}$, и элементы $e^{\#}_{(-\alpha_k)^{(r)}}$ остаются квазипримитивными. □

Мы доказали, что есть возможность удлинить r_{rch} набором m жордановых членов, образованных независимыми генераторами Картана $\left\{\widetilde{H}_i^{\perp} \mid j=1,\ldots,m\right\}$ (принадлежащими подпространству примитивных генераторов $(\mathfrak{h}_{\perp})^{\#}$ в дуальной алгебре $\mathfrak{g}^{\#}(r_{rch})$)), и элементами

$$\left\{\begin{array}{c} \left(e_{-\alpha_{2k-1}}+e_{\alpha_{n-2k+1}}\right), e_{-\alpha_{2p-1}} \mid k=1,\ldots,p-1, \\ \widehat{p},p+1,\ldots,m \\ p=\left\{\begin{array}{ll} \frac{m+1}{2} & \text{для нечетных } m \\ \frac{m+2}{2} & \text{для четных } m \end{array}\right\} \end{array}\right\}, \tag{8}$$

соответствующими набору квазипримитивных генераторов $\left\{e^{\#}_{\left(-\alpha^{(r)}_{2k-1}\right)} \mid k=1,\ldots,m\right\}$. Точная форма дополнительных членов найдена.

В случае $sl(n)$, $n=2m+1$ набор (8) может быть записан в терминах матричных единиц $E_{i,j}$:

$$\left\{\begin{array}{c} \widehat{E}_k=E_{2k,2k-1}+E_{n-2k+1,n-2k+2}, \mid k=1,\ldots,p-1, \\ \widehat{p},p+1,\ldots,m \\ \widehat{E}_p=E_{2p,2p-1}; \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Чтобы построить m независимых жордановых членов, мы должны найти для каждого $\widehat{E}_k$ соответствующий $H_k^{\perp}$ со свойствами:

$$\begin{aligned} \left[H_k^{\perp}, \widehat{E}_l\right] &= \delta_{kl}\widehat{E}_k, \qquad k,l = 1,\dots,m; \\ H_k^{\perp} &\in \mathfrak{h}_{\perp}. \end{aligned} \tag{10}$$

Это дает $2m+1$ соотношений, которые полностью фиксируют набор $\left\{H_k^{\perp}\right\}$:

$$H_k^{\perp} = \sum_{v=1}^{n} \frac{4k-2}{n} E_{v,v} - \sum_{u=1}^{2k-1} \left(E_{u,u} + E_{n-u+1,n-u+1}\right), \tag{11}$$
$$k = 1,\dots,m.$$

Таким образом, мы нашли дополнительные члены $\sum h_{\perp_k} \wedge e_{-\alpha_k}$ в явном виде:

$$r_J = \sum_{k=1}^{m} H_k^{\perp} \wedge \widehat{E}_k. \tag{12}$$

Заметим, что это выражение само по себе, очевидно, является решением КУЯБ, т.е. пара $\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\#}(r_J)\right)$ является биалгеброй Ли, так же, как и $\left(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{\#}(r_{rch})\right)$. Вопрос заключается в том, является ли пара $\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\#}(r_{rch}+r_J)\right)$ биалгеброй Ли или, другими словами, является ли сумма r-матриц также решением КУЯБ.

Один простой пример показывает, что ответ отрицательный. В почти тривиальном и хорошо изученном случае $m=1$ $(n=3)$ было продемонстрировано (см. [8, 10]), что сумма $r_{rch(3)} + r_{J(3)}$ не удовлетворяет КУЯБ. Мы увидим ниже, что то же верно для любой алгебры $sl(n)$. В процессе построения решения уравнений Янга–Бакстера для $n=3$ было показано [8, 10], что $r_{rch(3)}$-матрица

$$r_{rch(3)} = 2H_{12} \wedge E_{13} + E_{12} \wedge E_{23}$$

может быть дополнена жордановым слагаемым в том случае, если последний деформирован:

$$r_{dj} = H^{\perp} \wedge \left(E_{21} + 2E_{13}\right), \qquad H^{\perp} = -\frac{1}{3}\left(E_{11} - 2E_{22} + E_{33}\right). \tag{13}$$

Заметим, что в соответствии со структурой (9) дуальных координат $\widehat{E}_k$ в случае $\mathfrak{g} = sl(3)$ мы имеем $\widehat{E}_1 = E_{21}$, и деформированное выражение (13) отличается от дополнительного жорданова члена $r_{J(3)} = H_1^{\perp} \wedge \widehat{E}_1$. Деформация в r_{dj} приводит к квазипримитивности $e^{\#}_{(-\alpha_1)^{(r)}}$ в $\left(sl(3), sl(3)^{\#}\left(r_{rch}\right)\right)$и согласуется с ней:

$$\delta_{rch}\left(E_{21}\right) = 2E_{13} \wedge E_{21}.$$

Этот пример показывает, что мы можем переопределить жорданов член в цепи

$$r'_{rch(3)} = 2\left(H_{12} + H^{\perp}\right) \wedge E_{13} + E_{12} \wedge E_{23},$$

и затем рассматривать r-матрицу

$$r_J = H^{\perp} \wedge E_{21}$$

как дополнительный член для дважды повернутой цепи $r'_{rch(3)}$,

$$r'_{rch(3)} + r_J = r_{rch(3)} + r_{dj}.$$

Чтобы получить необходимый результат, должны быть выполнены два условия: генератор $\widehat{E}$ должен быть элементом отраженного корня для одного из членов расширения ($E_{-\alpha_1}$ в нашем случае) и элемент Картана в соответствующем звене цепи (здесь $\widehat{H} = 2\left(H_{12} + H^{\perp}\right)$) должен подчиняться соотношению $\left(\widehat{H} - \left[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}\right]\right) \sim H^{\perp}$.

Мы начинаем рассматривать общий случай и продемонстрируем, что аналогичная схема справедлива для $\mathfrak{g} = sl(n)$ и в частности для $n = 2m+1$.

Во-первых, надо вспомнить, что в произвольной полной цепи

$$r_{rch} = \sum_{k=1}^{m}\left(\widehat{H}_k \wedge E_{k,n-k+1} + \sum_{p=k+1}^{n-k} E_{k,p} \wedge E_{p,n-k+1}\right), \tag{14}$$

элементы Картана должны подчиняться условиям

$$\left[\widehat{H}_k, E_{l,n-l+1}\right] = \delta_{kl} E_{l,n-l+1}.$$

Это эквивалентно требованию

$$\widehat{H}_k = H_{k,n-k+1} + \sum \gamma_l H_l^{\perp}. \tag{15}$$

Построим дополнительные жордановы члены как в (12) и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} r_{ech} &= r_{rch} + r_J \\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\widehat{H}_l \wedge E_{l,n-l+1} + \sum_{p=l+1}^{n-l} E_{l,p} \wedge E_{p,n-l+1} + H_l^{\perp} \wedge \widehat{E}_l \right). \qquad (16) \end{aligned}$$

Чтобы найти выражения для модифицированных элементов Картана $\widehat{H}_{l,n-l+1}$, потребуем выполнения классического уравнения Янга–Бакстера,

$$[[r_{ech}, r_{ech}]] = [[r_{rch}, r_J]] + [[r_J, r_{rch}]] = 0. \qquad (17)$$

Это приводит к следующим условиям (в первом наборе мы дополним определение $\widehat{H}_k$ полагая $\widehat{H}_{m+1} = 0$):

$$\widehat{H}_k - \widehat{H}_{k+1} - 2H_{(2\chi(k)+1),2\chi(k)} \sim H^{\perp}_{\chi(k)},$$

$$k = 1, \dots, m,$$

$$\chi(k) = \tfrac{1}{4}\left(n + 2 + (n-2k)(-1)^k\right);$$

$$\sum_{k}^{m} \left[\widehat{H}_k, E_{2l+2,2l+1}\right] = 0, \quad l = 1, \dots, m;$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\widehat{H}_s, E_{\psi(s),\psi(s)+1}\right] &= E_{\psi(s),\psi(s)+1}, \\ \left[\widehat{H}_{s+1}, E_{\psi(s),\psi(s)+1}\right] &= -E_{\psi(s),\psi(s)+1}, \end{aligned}\right\}$$

$$s = 1, \dots, m-1,$$

$$\psi(s) = \tfrac{1}{2}\left(n + (n-2s)(-1)^{s+1}\right).$$

Среди этих соотношений независимыми будут только два первых набора. Они имеют единственное решение. Используя выражение (11) для $H_q^{\perp}$, получим окончательный ответ:

$$\widehat{H}_k = (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} \frac{2k-1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} - \sum_{j=1}^{k-1} \left(E_{j,j} + E_{n-j+1,n-j+1}\right) \\ +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} \left(E_{k,k} - E_{n-k+1,n-k+1}\right) \\ -E_{k,k} - E_{n-k+1,n-k+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Когда элементы Картана (15) выбраны в форме (18), r-матрица r_{ech} является решением КУЯБ с носителем $\mathfrak{g}_{ech}$, содержащим $\mathfrak{b}_+$

и m элементов $\widehat{E}_k$ из отрицательного сектора разложения Картана. Эти элементы соответствуют набору m (взаимно ортогональных) отрицательных простых корней $\left\{-\alpha_k \mid \alpha_k \in S_{ch}^{\perp}(\Lambda)\right\}$ (5). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Полная цепь расширенных r-матриц для $sl(2m+1)$ может быть единственным образом объединена с набором m независимых жордановых членов: $r_{ech} = r_{rch} + r_J$. Подалгебра $\mathfrak{g}_c(r_{ech})$ является параболическим носителем в $sl(2m+1)$.*

4. Параметризация

Хорошо известно, что фактически канонические r-матрицы являются представителями параметризованного множества решений КУЯБ. Параметризация достигается с помощью автоморфизмов носителя r-матрицы (см. [6], где приведена параметризация канонической полной цепи). В нашем случае носитель $\mathfrak{g}_{ech}$ содержит подалгебру $\mathfrak{b}_+$ и m элементов $\widehat{E}_k$, принадлежащих $\mathfrak{n}_-$. Параметризованное многообразие r-матриц порождается автоморфизмом подалгебры $\mathfrak{g}_{ech}$:

- для носителя цепи $\mathfrak{g}_{fch}$:

Для каждого звена с номером i мы производим замену

$$\begin{aligned} E_{a,b} &\Longrightarrow \xi_i E_{a,b} \\ E_{c,d} &\Longrightarrow \frac{1}{\xi_i} E_{c,d}, \end{aligned}$$

где индексы для нечетных i будут

$$\begin{aligned} &a = i, \dots, n-i; \quad b = n+1-i, \dots, n; \\ &c = 1, \dots, i-1; \quad d = i, \dots, n-i; \end{aligned} \tag{19}$$

и для четных i –

$$\begin{aligned} &a = 1, \dots, i; \quad b = i+1, \dots, n+1-i; \\ &c = i+1, \dots, n+1-i; \quad d = n+2-i, \dots, n. \end{aligned} \tag{20}$$

(Для первого звена зона для $\frac{1}{\xi_1}$ вырождается в пустое множество.)

- для квазижордановой части параметризация вводится с помощью преобразований:

$$E_{a,b} \Longrightarrow \zeta_i E_{a,b};$$
$$E_{c,d} \Longrightarrow \frac{1}{\zeta_i} E_{c,d};$$

где для $i \leq \frac{m+1}{2}$ мы имеем

$$\begin{aligned} &a = 2i, \quad b = 2i-1; \\ &a = 2i, \dots, n-2i+1; \quad b = n-2i+2, \dots, n; \\ &c = 1, \dots, 2i-1; \quad d = 2i, \dots, n-2i+1. \end{aligned} \tag{21}$$

и для $i > \frac{m+1}{2}$ –

$$\begin{aligned} &a = 2i, \quad b = 2i-1; \\ &a = 1, \dots, n-2i+1; \quad b = n-2i+2, \dots, 2i-1; \\ &c = n-2i+2, \dots, 2i-1; \quad d = 2i, \dots, n. \end{aligned} \tag{22}$$

Применяя описанный выше автоморфизм, получим

$$\begin{aligned} &r_{ech}(\xi,\zeta) = r_{rch}(\xi) + r_J(\xi,\zeta) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\xi_l \widehat{H}_l \wedge E_{l,n-l+1} + \xi_l \sum_{p=l+1}^{n-l} E_{l,p} \wedge E_{p,n-l+1} + \zeta_l H_l^{\perp} \wedge \widehat{E}_l(\xi) \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь генераторы $\widehat{E}_k(\xi)$ зависят от параметров цепи:

$$\begin{aligned} &\widehat{E}_k(\xi) = E_{2k,2k-1} + \frac{\xi_{2k-1}}{\xi_{2k}} E_{n-2k+1,n-2k+2}, \qquad k = 1, \dots, p-1; \\ &\widehat{E}_p(\xi) = E_{2p,2p-1}; \\ &\widehat{E}_k(\xi) = E_{2k,2k-1} + \frac{\xi_{n-2k+1}}{\xi_{n-2k+2}} E_{n-2k+1,n-2k+2}, \qquad k = p+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{24}$$

Заметим, что в множестве $r_{ech}(\xi,\zeta)$ параметры ζ_k и ξ_1 находятся в C^1 в то время, как $\{\xi_l \mid l = 2, \dots, m\} \in C^1 \setminus 0$. Мы не можем произвольно отключить звенья в цепи в $r_{ech}(\xi,\zeta)$. Это может быть сделано последовательно от первого звена к m-тому или во всей цепи одновременно. Полагая все ξ_k равными нулю, мы получим набор чисто жордановых членов, где вторые слагаемые в $\widehat{E}_k(\xi)$

имеют неопределенные коэффициенты. Очевидно, что дополнительные жордановы члены можно исключить в любом порядке. Когда все члены ζ_k равны нулю, полная цепь восстанавливается при специальном выборе (18) элементов Картана $\widehat{H}_l$.

5. Заключение

Мы доказали, что полная цепь r-матриц для $sl(2m+1)$ может быть достроена с помощью суммы независимых жордановых членов. Число таких членов может быть равно $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) - m$, так что носитель $\mathfrak{g}_{ech}$ расширенной цепи r_{ech} содержит подалгебру Бореля $\mathfrak{b}_+(\mathfrak{g})$ и m коммутирующих генераторов с отрицательными простыми корнями $\left\{e_{(-\alpha_{2k-1})} \mid k = 1, \dots, m\right\}$. Тем самым получены семейства решений КУЯБ с параболическими носителями.

Подобный результат может быть получен и для $sl(2m)$ алгебр. Здесь общая структура расширенной цепи та же

$$\begin{aligned} r_{ech} &= r_{rch} + r_J \\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\widehat{H}_l \wedge E_{l,n-l+1} + \sum_{p=l+1}^{n-l} E_{l,p} \wedge E_{p,n-l+1} \right) + \sum_{k=1}^{m-1} H_k^{\perp} \wedge \widehat{E}_k. \end{aligned}$$

По сравнению со случаем нечетного n, описанным выше, здесь размерность пространства $\mathfrak{h}_{\perp}$ будет равна $m-1 = 2m-1-f$. Это обеспечивает дополнительную свободу в выборе семейства $S_{ch}^{\perp}(\Lambda)$ ортогональных простых корней. Поскольку для четных n последнее звено полной цепи вырождается (содержит только жорданов член), отсутствуют такие координаты, как $\widehat{E}_p$ с $e^{\#}_{-\alpha_q} = e^{*}_{-\alpha_q}$. Все это приводит к изменениям в наборах $\left\{H_k^{\perp}\right\}$ и $\left\{\widehat{H}_l\right\}$. Тем не менее, главные свойства сохраняются: удлиненная цепь r_{ech} существует в форме $r_{rch} + r_J$, ее носитель является параболической подалгеброй в $sl(2m)$, содержит $\mathfrak{b}_+(\mathfrak{g})$ и $m-1$ коммутирующих генераторов с отрицательными простыми корнями.

Как объясняется в приложении A, среди классических алгебр Ли существует еще только один набор типа I – четно-нечетное семейство ортогональных алгебр $D_{t=2s+1}$. Используя те же инструменты как в разделе 3, можно проверить, что в этом случае также существуют удлиненные цепи. Пространство $\mathfrak{h}_{\perp}$ всегда одномерно и как результат дополнительная жорданова часть r_J содержит только один член.

Мы приходим к заключению, что для любой простой алгебры Ли всегда существует цепь расширенных жордановых r-матриц, с параболическим носителем. Для алгебр $\mathfrak{g}\left(\Lambda^{II}\right)$ это полные цепи r_{fch} , для алгебр $\mathfrak{g}\left(\Lambda^{II}\right)$ – удлиненные цепи r_{ech}.

Для алгебр серии A_{n-1} набор параболических r-матриц $b_{CG}(n)$ был сконструирован в [11]. Наборы $b_{CG}(n)$ и $r_{ech}(n)$ пересекаются в точке $n=3$: носитель $b_{CG}(n)$ является минимальной параболической подалгеброй, когда $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3)$.

Следующая проблема – построить в явном виде квантования r-матриц вида r_{ech}, иными словами, построить решения $\mathcal{F}_{ech}$ уравнений твиста [1], соответствующие r_{ech}. Очевидно, что искомое решение $\mathcal{F}_{ech}$ будет содержать твист полной цепи $\mathcal{F}_{fch}$ как фактор, $\mathcal{F}_{ech}=\mathcal{F}_J\mathcal{F}_{rch}$, так что достаточно найти фактор $\mathcal{F}_J$. Следует принять во внимание, что форма $\mathcal{F}_J$ может отличаться от канонической экспоненты $\exp(H\otimes\ln(1+E))$. Вид $\mathcal{F}_J$ может быть деформирован предшествующим фактором цепи $\mathcal{F}_{rch}$. Результаты, полученные выше, показывают, что в первом порядке по (общему) параметру квантования такая деформация может быть исключена, соответствующее преобразование координат всегда существует. Отдельное изучение будет посвящено построению твиста $\mathcal{F}_{ech}$ и близким проблемам.

Автор выражает благодарность профессору П. П. Кулишу за многочисленные весьма полезные обсуждения.

6. Приложение A. Последовательность $V_0\supset V_1\supset\ldots\supset V_{f-1}$ для простых алгебр Ли

- Серия A: для A_{n-1} реализуем корни в $\mathbf{R}^n$ в виде

  $$\varepsilon_i-\varepsilon_j \qquad i,j=1,2,\ldots,n.$$

  Пусть $\varepsilon_1-\varepsilon_n$ – исходный старший корень. Последовательное построение подсистем, ортогональных старшим корням, приводит к семейству

  $$\Lambda_k=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid i,j=(k+1),\ldots,(n-k)\,.\}$$

  Существует разница между нечетным и четным случаями, $n=2m$ и $n=2m+1$. Максимальная длина последовательности $\{\theta_s\}$ будет $f = m$. Размерность $\dim V_{f-1}$ является

$$\dim V_{f-1} = r - m = \left\{ \begin{cases} m-1 & \text{для} \quad n = 2m \\ m & \text{для} \quad n = 2m+1. \end{cases} \right.$$

- Серия B: для $so(2m+1)$ (B_p) корни могут быть выбраны в виде

$$\{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j = 1,2,\dots,m;\}\,.$$

  Старший корень – $\varepsilon_1 - \varepsilon_p$. В ортогональном подпространстве V_1 найдем корни

$$\left\{ \begin{matrix} \pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j = 2,\dots,m-1; \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_m, \qquad -\varepsilon_1 - \varepsilon_m. \end{matrix} \right\}$$

  и $\dim V_1 = m-1$. Максимальная длина m будет равна рангу. Алгебры B_m – алгебры типа II.

- Серия C: для $sp(m)$ (C_m) корни могут быть выбраны в виде

$$\{\pm 2\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i,j = 1,2,\dots,m;\}\,.$$

  Старший корень – $2\varepsilon_1$ и последовательность

$$\theta_0 = 2\varepsilon_1, \theta_1 = 2\varepsilon_2, \dots, \theta_{p-1} = 2\varepsilon_m$$

  содержит m элементов и образует базис корневого пространства V_0. Алгебры C_m являются алгебрами типа II.

- Серия D: для $so(2m)$ (D_m) строим корни в виде

$$\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid i \neq j; i,j = 1,2,\dots,m;\}\,.$$

  Здесь свойства зависят от четности m. Для m четных алгебры D_m принадлежат типу II. Для нечетных m имеем алгебры типа I. Последнее очевидно благодаря изоморфизму $so(6) \approx sl(4)$. Ситуация с четно-нечетной $so(4k+2)$-алгеброй отличается от случая серии A. Здесь размерность V_m всегда равна единице: $\dim V_m = 1$.

7. Приложение В

Здесь мы представляем конструкцию удлиненной полной цепи для типичного случая $\mathfrak{g} = sl(11)$.

r-матрица полной периферической цепи для $sl(11)$ – это

$$r_{rch}(\gamma)=\sum_{k=1}^{5}\left(\widehat{H}_k(\gamma)\wedge E_{k,12-l}+\sum_{s=k+1}^{11-k}E_{k,s}\wedge E_{s,12-k}\right).$$

Периферическая свобода сосредоточена в генераторах $\widehat{H}_k(\gamma)=H_{k,n-k+1}+\sum\gamma_l H_l^{\perp}$. Условия (10) определяют элементы Картана

$$H_k^{\perp}=\sum_{v=1}^{11}\frac{4k-2}{11}E_{v,v}-\sum_{u=1}^{2k-1}\left(E_{u,u}+E_{n-u+1,n-u+1}\right).$$

Метод координат дуальной алгебры позволяет найти набор генераторов $\left\{\widehat{E}_k\right\}$, в которых присоединенное действие $\mathfrak{g}_c^{\#}$ приводимо,

$$\begin{aligned}
&\widehat{E}_1=E_{2,1}+E_{10,11}, && \widehat{E}_4=E_{8,7}+E_{4,5},\\
&\widehat{E}_2=E_{4,3}+E_{8,9}, && \widehat{E}_5=E_{10,9}+E_{2,3}.\\
&\widehat{E}_3=E_{6,5},
\end{aligned}$$

Пары $\left\{H_k^{\perp},\widehat{E}_k\right\}$ фиксируют жорданову r-матрицу

$$r_J=\sum_{k=1}^{5}H_k^{\perp}\wedge\widehat{E}_k.$$

Потребовав, чтобы сумма $r_{rch}(\gamma)+r_J$ удовлетворяла КУЯБ,

$$[[r_{rch}(\gamma)+r_J,r_{rch}(\gamma)+r_J]]=0,$$

получим необходимые условия для координат $\widehat{H}$ в виде ситемы уравнений

$$\sum_{k=1}^{5}\left[\widehat{H}_k(\gamma),E_{2l,2l-1}\right]=0;\qquad l=1,\dots,5;$$

$$\begin{aligned}
&\left[\widehat{H}_1(\gamma),E_{10,11}\right]=E_{10,11}, && \left[\widehat{H}_2(\gamma),E_{10,11}\right]=-E_{10,11},\\
&\left[\widehat{H}_2(\gamma),E_{2,3}\right]=E_{2,3}, && \left[\widehat{H}_3(\gamma),E_{2,3}\right]=-E_{2,3},\\
&\left[\widehat{H}_3(\gamma),E_{8,9}\right]=E_{8,9}, && \left[\widehat{H}_4(\gamma),E_{8,9}\right]=-E_{8,9},\\
&\left[\widehat{H}_4(\gamma),E_{4,5}\right]=E_{4,5}, && \left[\widehat{H}_5(\gamma),E_{4,5}\right]=-E_{4,5};
\end{aligned}$$

$$\left(\widehat{H}_1(\gamma)-\widehat{H}_2(\gamma)-2H_{1,2}\right)\sim H_1^{\perp},\left(\widehat{H}_2(\gamma)-\widehat{H}_3(\gamma)-2H_{9,10}\right)\sim H_5^{\perp},$$
$$\left(\widehat{H}_3(\gamma)-\widehat{H}_4(\gamma)-2H_{3,4}\right)\sim H_2^{\perp},\left(\widehat{H}_4(\gamma)-\widehat{H}_5(\gamma)-2H_{7,8}\right)\sim H_4^{\perp},$$
$$\left(\widehat{H}_5(\gamma)-2H_{5,6}\right)\sim H_3^{\perp};$$

Эти соотношения имеют единственное решение:

$$\widehat{H}_1=2\sum_{i=1}^{5}\left(H_{2i-1,2i}+H_i^{\perp}\right),\qquad \widehat{H}_4=2\sum_{i=3}^{4}\left(H_{2i-1,2i}+H_i^{\perp}\right),$$
$$\widehat{H}_2=2\sum_{i=2}^{5}\left(H_{2i-1,2i}+H_i^{\perp}\right),\qquad \widehat{H}_5=2\left(H_{5,6}+H_3^{\perp}\right).$$
$$\widehat{H}_3=2\sum_{i=2}^{4}\left(H_{2i-1,2i}+H_i^{\perp}\right),$$

Итак, установлено, что удлиненная цепь для $sl(11)$ будет иметь вид

$$r_{ech}=\sum_{k=1}^{5}\left(\widehat{H}_k\wedge E_{k,12-l}+\sum_{s=k+1}^{11-k}E_{k,s}\wedge E_{s,12-k}\right)+\sum_{k=1}^{5}H_k^{\perp}\wedge\widehat{E}_k.$$

Это выражение является представителем 10-мерного многообразия решений

$$r_{ech}=\sum_{k=1}^{5}\xi_k\left(\widehat{H}_k\wedge E_{k,12-l}+\sum_{s=k+1}^{11-k}E_{k,s}\wedge E_{s,12-k}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{5}\zeta_k H_k^{\perp}\wedge\widehat{E}_k(\xi),$$
$$\xi_{2,\dots,5}\in\mathbb{C}^1\setminus 0,\xi_1,\zeta_k\in\mathbb{C}^1.$$

Здесь координаты $\widehat{E}_k(\xi)$ параметризованы следующим образом:

$$\widehat{E}_1(\xi)=E_{2,1}+\frac{\xi_1}{\xi_2}E_{10,11},\qquad \widehat{E}_4(\xi)=E_{8,7}+\frac{\xi_4}{\xi_5}E_{4,5},$$
$$\widehat{E}_2(\xi)=E_{4,3}+\frac{\xi_3}{\xi_4}E_{8,9},\qquad \widehat{E}_5(\xi)=E_{10,9}+\frac{\xi_2}{\xi_3}E_{2,3},$$
$$\widehat{E}_3(\xi)=E_{6,5}.$$

Литература

1. В. Г. Дринфельд, — Доклады АН СССР **273** (1983), 531.
2. A. N. Kirillov , N. Yu. Reshetikhin, — Commun. Math. Phys. **134** (1990), 421–431.
3. P. Etingof, O. Schiffman, T. Schedler, — JAMS **134** (2000), 595–609.
4. A. Alekseev, A. Lachowska, *Invariant ∗-product on coadjoint orbits and the Shapovalov pairing.* 12p., math.QA/0308100.
5. А. Элашвили, *Функциональный анализ и его приложения.* **16** (1982), 94–95.
6. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, M. A. del Olmo, — J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 8671 (math.QA/9908061).
7. Д. Н. Ананикян, П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, — Алгебра и анализ **14**(3) (2002), 27–54.
8. V. D. Lyakhovsky, *Twist deformations in dual coordinates.* 17p., math.QA/0312185.
9. L. C. Kwek, V. D. Lyakhovsky, — Czech. Journ. Phys. **51** (2001), 1374–1379.
10. V. D. Lyakhovsky, M. E. Samsonov, — J. Algebra its Appl. **1** (2002), 413–424.
11. M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, — Lett. Math. Phys. **40** (4) (1997), 337–353.

Lyakhovsky V. D. On classical r-matrices with parabolic carrier.

Using the graphic presentation of the dual Lie algebra $\mathfrak{g}^{\#}(r)$ for simple algebra $\mathfrak{g}$ it is possible to demonstrate that there always exist solutions r_{ech} of the classical Yang–Baxter equation with parabolic carrier. To obtain r_{ech} in the explicit form we find the dual coordinates in which the adjoint action of the carrier $\mathfrak{g}_c$ becomes reducible. This allows to find the structure of the Jordanian r-matrices r_J that are the candidates for enlarging the initial full chain r_{fch} and realize the desired solution r_{ech} in the factorized form $r_{ech} \approx r_{fch} + r_J$. We obtain the unique transformation: the canonical chain is to be substituted by a special kind of peripheric r-matrices: $r_{fch} \longrightarrow r_{rfch}$. To illustrate the method the case of $\mathfrak{g} = sl(11)$ is considered in full details.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 26 декабря 2004 г.