Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. Куценко

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ ЯКОБИ

Введение и основные результаты

При рассмотрении разных обратных задач одним из этапов является получение двусторонних оценок спектральных данных через потенциал. Этот вопрос часто сводится к задаче о двусторонних оценках параметров специальных конформных отображений (см., например, [5]). Отметим, что редко удается найти точные оценки в подобных задачах, иногда даже сложно найти порядок роста оценивающих функций, не говоря уже о точных константах-множителях (см., например, [5, 6]). В данной работе будут получены точные двусторонние оценки параметров конформных отображений, связанных с периодической матрицей Якоби, также будет показана “эквивалентность” (в виде гладкого гомеоморфизма) между двумя различными наборами параметров и даны их взаимные точные оценки. В качестве нормы возьмем максимум модуля компонент (т.е. $\|.\|_\infty$).

Итак, в случае периодической матрицы Якоби, конформное отображение задаётся следующим образом (см. [3, 8, 7]). Фиксируем $N \geqslant 2$. Пусть $u_n = \pi - \frac{\pi n}{N}$ и $h \in \mathbb{R}_+^{N-1}$, введем множества

$$P = \{z \in \mathbb{C}_+ : \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}, \quad K(h) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} \Gamma_n, \quad \Gamma_n = [u_n, u_n + ih_n]. \tag{1}$$

Хорошо известно, что существует единственное конформное отображение $z = z(k,h)$ области $K(h)$ на область $\mathbb{C}_+$ (см. например, [8]), с асимптотикой

$$k(z,h) = i \ln z + \pi - \frac{iQ^2(h)}{z^2} + O(z^{-3}), \quad |z| \to \infty, \tag{2}$$

здесь $k(z,h)$ – обратное отображение к $z(k,h)$, а $Q(h) > 0$. Ясно, что отображение $z(k,h)$ непрерывно в замыкании области $K(h)$, будем обозначать

$$\gamma_n(h) = z(\Gamma_n, h) = [z(u_n - 0, h), z(u_n + 0, h)] \subset \mathbb{R},$$

$$l_n(h) = |\gamma_n(h)|, \qquad l(h) = \{l_n(h)\}_{n=1}^{N-1},$$

здесь и далее $|.|$ также обозначает длину промежутка. По принципу симметрии $k(z,h)$ конформно продолжается в $\mathbb{C} \setminus \cup\gamma_n(h)$. Цель данной работы – получить двусторонние оценки величин $\|l(h)\|$ и $Q(h)$ через $\|h\|$, здесь и далее будем обозначать $\|x\| = \|x\|_\infty$ для $x \in \mathbb{R}^n$. В конце этого параграфа покажем связь указанных параметров с матрицей Якоби (более подробно см. в [3, 8, 7]). Определим функции

$$M_1(r) = \sup_{\|h\|=r} \|l(h)\|, \quad m_1(r) = \inf_{\|h\|=r} \|l(h)\|, \tag{3}$$

$$M_2(r) = \sup_{\|h\|=r} Q(h), \quad m_2(r) = \inf_{\|h\|=r} Q(h). \tag{4}$$

С помощью этих функций получаются точные оценки

$$m_1(\|h\|) \leqslant \|l(h)\| \leqslant M_1(\|h\|), \quad m_2(\|h\|) \leqslant Q(h) \leqslant M_2(\|h\|).$$

Первый результат говорит об “эквивалентности” параметров l и h

Предложение 1.1. *Отображение $l : \mathbb{R}_+^{N-1} \to \mathbb{R}_+^{N-1}$ – гомеоморфизм. Производная Фреше $\frac{\partial l}{\partial h}(s)$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}_+^{N-1}$ и обратима (как матрица).*

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть $c(r) = \cosh^{\frac{1}{N}}(Nr)$, тогда при четном $N = 2k$, $k \geqslant 2$, верны следующие соотношения:*

$$M_1(r) = 4\sinh r; \quad m_1(r) = c(r)2^{\frac{1}{N}} \prod_{m=1}^{k} \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} + O(c^{1-N}(r)),$$
$$r \to +\infty. \tag{5}$$

Пусть $A = (2N-2)^{\frac{2-N}{2N}}$, тогда при любом $N \geqslant 3$ верны соотношения

$$M_2(r) = c(r); \quad m_2(r) = Ac(r) + o(1), \quad r \to +\infty; \quad m_2(r) > Ac(r). \tag{6}$$

Из доказательства леммы 1.8 и формулировок лемм 1.11, 1.13 можно увидеть, при каких именно h достигаются экстремальные значения в (3), (4), а эти h единственны при фиксированном r для функций $m_1(r)$, $M_2(r)$ и в случае четного $N = 2k$ для $M_1(r)$. Теперь приведём точные оценки для суммы длин лакун. Заметим, что эти оценки не получаются непосредственно из предыдущей теоремы, а доказываются иными методами.

Предложение 1.3. *Пусть $N \geqslant 3$ и $|\gamma| = |\gamma(h)| = \sum_{n=1}^{N-1} G_n(h)$, тогда $m_3 < Q^2(h) < M_3$, здесь*

$$m_3 = m_3(h) = \frac{N-1}{2N^2}|\gamma|^2, \quad M_3 = M_3(h) = \frac{N^2 - \delta_N}{8N^2}(4 + |\gamma|)^2,$$

δ_N равно 1, если N нечётное, и равно 0, если N чётное. Оценки точны в следующем смысле:

$$\sup_{\|h\|=r} \frac{m_3(h)}{Q^2(h)} \to 1, \quad r \to \infty; \quad \inf_{\|h\|=r} \frac{M_3(h)}{Q^2(h)} \to 1, \quad r \to \infty.$$

Теперь немного про матрицу Якоби. В работе [3] строится естественный набор спектральных данных $H = (h_{1n}, h_{2n})_{n=1}^{N-1}$ и доказывается, что $H : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{R}^{2N-2}$ есть вещественно-аналитический изоморфизм, здесь $\mathcal{H}^2$ это пространство потенциалов, $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum x_n = 0\}$. А вот как связаны с этим наши параметры конформных отображений. Пусть $H = \{\|(h_{1n}(q), h_{2n}(q))\|_2\}_{n=1}^{N-1}$ и $q = (x, b) \in \mathcal{H}^2$, тогда $2NQ^2(h) = 2\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2$, где $a = \{e^{x_n}\}_{n=1}^N$, в этом случае $G(h)$ это так называемые длины спектральных лакун, то есть расстояния между соседними зонами спектра матрицы Якоби с потенциалом q. Отметим еще, что заданные таким образом h однозначно определяют спектр матрицы Якоби с потенциалом q, а значит, по предложению 1.1, лакуны $G(h)$ тоже однозначно определяют этот спектр. Все приведённые оценки легко переписываются на язык матрицы Якоби, и мы получаем точные оценки спектральных данных через норму потенциала.

Отображение $z(k, h)$. Здесь и далее будем обозначать через $\overline{A}$, ∂A замыкание и границу множества A, и через $e_j = \{\delta_{j,i}\}_{i=1}^m$ стандартный базисный вектор, здесь δ – символ Кронекера, а размерность m будет видна из контекста. Также, если $x \in \mathbb{R}^m$, то будем обозначать через x_k коэффициент при e_k в разложении вектора x по базису $\{e_j\}_{j=1}^m$. Введем еще обозначения и определим функции

$X(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^{N-1}$ и $E(t)=\{E_j(t)\}_{j=1}^{N-1}$, $E_j(t)=|p(x_j(t),t)|$, где

$$p(x,t)=\prod_{k=1}^{N}(x-t_k),\quad t=\{t_k\}\in\overline{\mathcal{P}}_0;\qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x_j(t),t)=0,$$
$$x_{N-1}(t)\leqslant ..\leqslant x_1(t), \tag{7}$$

$$\mathcal{P}_0=\{t\in\mathbb{R}^N:\quad t_N<...<t_1,\quad \sum_{k=1}^{N}t_k=0\},$$
$$\mathcal{P}_\alpha=\{t\in\mathcal{P}_0:\quad \|E(t)\|>\alpha\},\quad \alpha\geqslant 0. \tag{8}$$

Иными словами, $E(t)$ – это вектор высот полинома $p(x,t)$, если высота равна 0, то считаем ее столько раз, какова кратность корня производной. Легко заметить, что $E(\alpha t)=\alpha^N t$, $\alpha\geqslant 0$, так как $p(x,\alpha t)=\alpha^N p(y,t)$, $y=\frac{x}{\alpha}$, также видно, что $E(t+\alpha\sum\limits_{j=1}^{N-1}e_j)=E(t)$. Еще отметим, что

$$p(x,t)=\prod_{k=1}^{N}(x-t_k)=x^N-\frac{\|t\|_2^2}{2}x^{N-2}+O(x^{N-3}),\quad t\in\mathcal{P}_0, \tag{9}$$

так как $\sum t_k=0$. Здесь и далее будем обозначать $\|r\|_2^2=\sum_{k=1}^{m}r_k^2$ для $r\in\mathbb{R}^m$.

Теперь определим так называемые "лакуны" полинома. Пусть $t\in\mathcal{P}_2$, тогда

$$p(x,t^+)=p(x,t)+2,\quad t^+=t^+(t)\in\mathcal{P}_0;\quad p(x,t^-)=p(x,t)-2,$$
$$t^-=t^-(t)\in\mathcal{P}_0. \tag{10}$$

Функция $\widehat{G}(t)=\{\widehat{G}_j(t)\}_{j=1}^{N-1}$, $t\in\mathcal{P}_2$, определяется так:

$$\widehat{\gamma}_{2k-1}=[t^+_{2k},t^+_{2k-1}],\quad k=1,..,\left[\frac{N}{2}\right];\quad \widehat{\gamma}_{2k}=[t^-_{2k+1},t^-_{2k}],$$
$$k=1,..,\left[\frac{N-1}{2}\right],\quad \widehat{G}_j=|\widehat{\gamma}_j|, \tag{11}$$

здесь $[x]$ – ближайшее целое к x, которое не больше x. Промежутки $\widehat{\gamma}_j$ будем называть "лакунами" полинома $p(x,t)$. Известно (см., например, [8]), что функция $\theta(z,t)$,

$$\theta(z,t)=\frac{1}{N}\arccos\frac{p(z,t)}{2}=-\frac{(-1)^N}{N}\int\limits_{\alpha}^{z}\frac{\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)}{\sqrt{4-p^2(x,t)}}dx,\quad \alpha=\min t_i^{\pm}(t), \tag{12}$$

при любом $t\in\mathcal{P}_2$ осуществляет конформное отображение (по z) области $\mathbb{C}_+$ на область $K(h)$ (см. (1.1)) для некоторого $h=h(t)\in\mathbb{R}_+^{N-1}$, кстати $h_j(t)=\operatorname{arccosh}\frac{E_j(t)}{2}\geqslant 0$, $j=1..N-1$. Отметим, что в (12) выбирается ветвь радикала так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{4-p^2(x,t)}>0$ при $x<\alpha$ и чтобы множество разрезов этого радикала совпадало с $\{x\in\mathbb{R}:\ |p(x,t)|>2\}$, фактически $\theta(z)$ это интеграл Кристоффеля–Шварца. Из (1.9) и определения функции $\theta(z)$ следует, что

$$\theta(z,t)=i\ln z+\pi-\frac{i\|t\|_2^2}{2Nz^2}+O(z^{-3}),\quad |z|\to\infty.$$

Значит (см. (1.2)), $k(z,h(t))=\theta(z,t)$, так как такое конформное отображение единственно. Кроме того видно, что $l(h(t))=\widehat{G}(t)$, поскольку именно “лакуны” полинома $p(x,t)$ переходят в вертикальные разрезы при отображении $\theta(x,t)$. В итоге, объединяя всё вместе, получаем, что если $h_j=\frac{1}{N}\operatorname{arccosh}\frac{E_j(t)}{2}\geqslant 0$, $j=1..N-1$, для некоторого $t\in\mathcal{P}_2$, то

$$l(h)=\widehat{G}(t),\quad Q(h)=\frac{\|t\|_2}{\sqrt{2N}},\quad h=\{h_j\}_{j=1}^{N-1}. \tag{13}$$

Зависимость между корнями полинома и его высотами. Вначале приведём одну абстрактную лемму, на основе которой покажем гомеоморфность отображения E. Отображение между двумя топологическими пространствами $f:X\to Y$ будем называть локально обратимым, если для любого $x\in X$ существует открытое множество B_x, $x\in B_x\subset X$ такое, что образ $f(B_x)$ открыт и $f:B_x\to f(B_x)$ биекция.

Лемма 1.3. *Пусть $X,Y\subset\mathbb{R}^N$ открытые и связные множества, а отображение $f:X\to Y$ локально обратимо, непрерывно вплоть до границы и $f(\partial X)\subset\partial Y$. В случае, если X неограничено, предположим, что $\|f(x)\|\to\infty$, $\|x\|\to\infty$. Тогда, если существует точка $y_0\in Y$, такая что $f^{-1}(y_0)=x_0$ состоит из одной точки, то f – биекция между X и Y.*

Доказательство. Рассмотрим множество $F = \{x \in X : f^{-1}(f(x)) = x\}$ и заметим, что $x_0 \in F$. Покажем, что множество F открыто. Рассуждаем от противного: пусть существуют $x \in F$ и последовательность $x_n \to x$ и $t_n \neq x_n$ такие, что $f(x_n) = f(t_n)$. Тогда последовательность $\|t_n\|$ ограничена, так как последовательность $f(t_n) \to f(x)$ ограничена и $t_n \notin B_x$ (B_x – некоторая окрестность точки x) в силу локальной обратимости отображения f, значит некоторая подпоследовательность t_k стремится к $t \neq x$. Но $t \notin \partial X$, так как $f(\partial X) \subset \partial Y \not\ni f(x) = f(t)$, значит $t \in X$ и $f(t) = f(x)$, $t \neq x$, что противоречит условию $x \in F$. Теперь покажем, что множество F замкнуто в X. Пусть $x_n \to x \in X$, $x_n \in F$. Если бы существовала точка $t \neq x$, $f(t) = f(x)$, то из-за локальной обратимости отображения f в точках t, x нашлись бы точки $y_n \neq x_n$, $f(y_n) = f(x_n)$, что противоречит условию $x_n \in F$, значит $x \in F$. То есть F открыто-замкнутое, непустое подмножество связного множества X, то есть $X = F$ и, значит, f – инъекция. Покажем, что f сюръекция. Рассуждаем от противного: пусть $H = Y \setminus f(X) \neq \varnothing$, тогда из-за связности множества Y и открытости множества $f(X)$, H не может быть открытым, то есть найдётся вектор $y \in H \subset Y$ такой, что $y \in \partial H \subset \partial f(X) \cup \partial Y \subset f(\partial X) \cup \partial Y \subset \partial Y$, то есть $y \in Y$ и $y \in \partial Y$, противоречие. В итоге f биекция. □

Следующая лемма также требуется для доказательства гомеоморфности отображения E и, на самом деле, представляет хорошо известные свойства полиномов Чебышева.

Лемма 1.4. *Пусть* $p(x, t^0) = 2\cos\left(N \arccos \frac{x}{2}\right)$. *Тогда если* $E(t) = \sum_{j=1}^{N-1} he_j$ *и* $t \in \mathcal{P}_0$, *то* $t = \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{N}} t^0$ *и* $\|t^0\|_2 = \sqrt{2N}$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $t_0 \in \mathcal{P}_0$, $\|t^0\|_2 = \sqrt{2N}$ и $E(t_0) = \sum_{j=1}^{N-1} 2e_j$. Теперь достаточно показать единственность с точностью до сдвига аргумента полинома, все высоты которого равны h. Пусть есть $p(x) = x^N + O(x^{N-1})$ и $\widehat{p}(x) = x^N + O(x^{N-1})$ с таким свойством. Пусть $x_N < \ldots < x_0$ и $\widehat{x}_N < \ldots < \widehat{x}_0$ – такие, что $p(x_j) = \widehat{p}(\widehat{x}_j) = (-1)^j h$, то есть все точки, кроме крайних, соответствуют экстремумам полиномов p и $\widehat{p}$. Можно считать, что $x_0 = \widehat{x}_0$ и $x_N \geqslant \widehat{x}_N$, тогда $\max\limits_{x \in [x_N, x_0]} |\widehat{p}(x)| = h$ и, значит, $p(x_j) - \widehat{p}(x_j) = (-1)^j h_j$, $h_j \geqslant 0$. То есть в каждом интервале $\sigma_j = [x_j, x_{j-1}]$ есть корень у $p - \widehat{p}$ и, если корень попал на границу интервала σ_j, то там он кратности не меньше 2, так как h это экстремальное значение для p и $\widehat{p}$. В итоге полином не более $(N-1)$-й степени $p-\widehat{p}$ имеет не менее N корней, то есть $p-\widehat{p}\equiv 0$. $\square$

Лемма 1.5. *Отображение $E:\mathcal{P}_0\to\mathbb{R}_+^{N-1}$ является гомеоморфизмом и непрерывно вплоть до границы. Кроме того, производная $\frac{\partial E}{\partial t}(s)$, $s\in\mathcal{P}_0$, существует и обратима.*

Доказательство. Непрерывность ясна. Далее фиксируем j, тогда $x_i(s)\neq x_j(s)$, $i\neq j$, значит $\frac{\partial p}{\partial^2 x}(x_j(s),s)\neq 0$ и по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки s существует и единственно решение уравнения $\frac{\partial p}{\partial x}(y(t),t)=0$, $y(s)=x_j(s)$; кроме того, решение $y(t)$ гладкое, из единственности следует, что $x_j(t)=y(t)$. Теперь в малой окрестности точки s имеем $E_j(t)=|p(x_j(t),t)|=p(x_j(t),t)\operatorname{sign}p(x_j(s),s)$ – тоже гладкая функция.

Если $t\in\mathcal{P}_0$, то $t=\sum\limits_{j=1}^{N-1}t_j\widehat{e}_j$, где $\widehat{e}_j=e_j-e_N$ – базис в $\mathcal{P}_0$, вдоль этих направлений и будем дифференцировать, обозначим $p\equiv p(x_i(s),s)$, $x_i\equiv x_i(s)$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_i}{\partial t_j}(s)&=(-1)^{\sigma_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x_i,s)\frac{\partial x_i}{\partial t_j}(s)-\frac{p}{x_i-s_j}+\frac{p}{x_i-s_N}\right)\\&=\frac{(-1)^{\sigma_i}(s_N-s_j)p}{(x_i-s_j)(x_i-s_N)}.\end{aligned}$$

В итоге матрицу $\frac{\partial E}{\partial t}(s)$ изоморфными преобразованиями можно привести к матрице $\{\frac{1}{x_i-s_j}\}_{i,j=1}^{N-1}$, у которой определитель не равен 0.

Отображение E локально обратимо и $E(\partial\mathcal{P}_0)\subset\partial\mathbb{R}_+^N$, так как если соседние корни равны, то соответствующая высота равна 0. Применяем лемму 1.3 к $f=E$, $X=\mathcal{P}_0$, $Y=\mathbb{R}_+^{N-1}$ и $y_0=\sum_{j=1}^{N-1}2e_j$, $E^{-1}(y_0)=t^0$ (см. лемму 1.4). $\square$

Оценки и асимптотики. Лемма 1.5 позволяет определить гладкие функции T и φ,

$$T(h)=\{T_j(h)\}_{j=1}^N=E^{-1}(h)\in\mathcal{P}_0,\quad \varphi(h)=\|E^{-1}(h)\|_2^2,\quad h\in\mathbb{R}_+^{N-1}. \tag{14}$$

В следующей лемме найдём производные этих функций.

Лемма 1.6. *Пусть $h \in \mathbb{R}_+^{N-1}$, обозначим $T = T(h)$, $T_j = T_j(h)$, $\varphi = \varphi(h)$, $x_j = x_j(T(h))$, тогда имеют место равенства (обозначения также см. в (7))*

$$2N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}\right)^{-1} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_j, T)\,\mathrm{sign}\,p(x_j, T) > 0,$$
$$\frac{\partial T_k}{\partial h_j} = \frac{1}{2N(T_k - x_j)}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}. \tag{15}$$

Доказательство. Раскрывая скобки и используя соотношение $\sum T_i = 0$, так как $T \in \mathcal{P}_0$, имеем

$$p(x, T) = \prod_{i=1}^{N}(x - T_i) = x^N - \frac{\varphi}{2}x^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-3} p_i x^i, \tag{16}$$

где функции $p_i = p_i(h)$ гладкие. Напомним, что везде в доказательстве мы используем обозначения, принятые в формулировке леммы. Далее, по определению функции E (см. (7)) имеем

$$p(x_k, T) = E_k(T)\,\mathrm{sign}\,p(x_k, T) = h_k\,\mathrm{sign}\,p(x_k, T),$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_k, T) = 0, \quad k = 1, .., N-1, \tag{17}$$

$$\delta_{k,j}\,\mathrm{sign}\,p(x_j, T) = \frac{\partial p}{\partial x}(x_k, T)\frac{\partial x_k}{\partial h_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}x_k^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-3}\frac{\partial p_i}{\partial h_j}x_k^i$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}x_k^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-3}\frac{\partial p_i}{\partial h_j}x_k^i, \tag{18}$$

здесь δ – символ Кронекера, равенство (18) получается дифференцированием равенства (17). Полином справа в (18) имеет степень $N-2$ и мы нашли все его корни, то есть

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}x^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-3}\frac{\partial p_i}{\partial h_j}x^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}\prod_{i\neq j}(x - x_i) =$$
$$-\frac{1}{2N(x - x_j)}\frac{\partial\varphi}{\partial h_j}\frac{\partial p}{\partial x}(x, T), \tag{19}$$

так как $\frac{\partial p}{\partial x}(x,T) = N\prod_{i=1}^{N-1}(x-x_i)$. Подставляя в (19) $x = x_j$ и используя (18), получаем первое равенство в (15). Далее из (16) и (19) имеем

$$-\frac{\partial T_j}{\partial h_k}\frac{\partial p}{\partial x}(T_j,T) = -\frac{\partial T_j}{\partial h_k}\prod_{i\neq j}(T_j-T_i) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}T_j^{N-2} + \sum_{i=0}^{N-3}\frac{\partial p_i}{\partial h_k}T_j^i = -\frac{1}{2N(T_j-x_k)}\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}\frac{\partial p}{\partial x}(T_j,T).$$

Так как $\frac{\partial p}{\partial x}(T_j,T)\neq 0$, мы получаем второе равенство в (15). □

Следствие 1.7. i) *Если* $E_j(t)\geqslant E_j(s)$, $j=1,..,N-1$, *то* $\|t\|_2\geqslant\|s\|_2$ *и равенство возможно только если* $E_j(t)=E_j(s)$, $j=1,..,N-1$.
ii) *Если* $E_j(t)>E_j(s)$ *для некоторого* j *и все остальные* $E_i(t)$ *совпадают с* $E_i(s)$, $i\neq j$, *тогда* $t_j-t_{j+1}>s_j-s_{j+1}$, *а* $t_i-t_{i+1}<s_i-s_{i+1}$ *при* $i\neq j$.

Рассмотрим функцию $\varphi_j(h)=\varphi(\sum_{i\neq j}2e_i+he_j)$, $h\geqslant 2$. Тогда по леммам 1.4, 1.6 имеем $\varphi_j(2)=2N$, $\frac{\partial\varphi_j}{\partial h}>0$ и, очевидно, $\varphi_j(h)\to\infty$, $h\to\infty$. Значит, однозначно определяются функции $h_j(r)$, $r\geqslant\sqrt{2N}$ такие, что $\varphi_j(h_j(r))=r^2$, функции $h_j(r)$ гладкие. В следующих леммах докажем несколько свойств функций $h_j(r)$.

Лемма 1.8. *Верны тождества*

$$\inf_{t\in\mathcal{P}_0,\ \|t\|_2=r}\|E(t)\| = \frac{2r^N}{(2N)^{\frac{N}{2}}},\quad r>0;$$
$$\sup_{t\in\mathcal{P}_2,\ \|t\|_2=r}\|E(t)\| = \max_k h_k(r),\quad r>\sqrt{2N}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\inf_{t\in\mathcal{P}_0,\ \|t\|_2=r}\|E(t)\|=\|E(s)\|$; такое $s\in\overline{\mathcal{P}}_0$ существует, так как функция E непрерывна и нижняя грань достигается на компакте. По следствию 1.7 i) и лемме 1.4 имеем

$$r=\|s\|_2\leqslant\|E^{-1}\left(\sum\|E(s)\|e_i\right)\|_2=\left(\frac{\|E(s\|)}{2}\right)^{\frac{1}{N}}\sqrt{2N},$$
$$\frac{2r^N}{(2N)^{\frac{N}{2}}}\leqslant\|E(s)\|,$$

и мы достигаем нижнюю грань при $t = E^{-1}\left(\sum_i \frac{2r^N}{(2N)^{\frac{N}{2}}} e_i\right)$, $\|t\|_2 = r$ и только при таком t.

Далее, пусть $\sup\limits_{t\in\mathcal{P}_2,\ \|t\|_2=r} \|E(t)\| = \|E(\widehat{s})\|$, $\widehat{s} \in \overline{\mathcal{P}}_2$, и пусть $E_j(\widehat{s}) = \|E(\widehat{s})\| \geqslant E_i(\widehat{s})$, $i = 1,..,N-1$. Тогда по следствию 1.7 i) и по определению функции $h_j(r)$ имеем

$$\|E^{-1}(\sum_{i\neq j} 2e_i + \|E(\widehat{s})\|e_j)\|_2 \leqslant \|\widehat{s}\|_2 = r = \|E^{-1}(\sum_{i\neq j} 2e_i + h_j(r)e_j)\|_2,$$

откуда снова по следствию 1.7 получаем $E(\widehat{s}) \leqslant h_j(r)$. Значит, верхняя грань достигается при $t = E^{-1}(\sum\limits_{i\neq j} 2e_i + h_j(r)e_j)$ и только при таком t. □

Лемма 1.9. *Пусть $f_j(r) = N^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{N}{j}-1\right)^{\frac{N}{2}-j} r^N$, тогда имеют место оценка и асимптотика*

$$h_j(r) < f_j(r), \quad r \geqslant \sqrt{2N}; \qquad h_j(r) = f_j(r) + o(r^{N-1}), \quad r \to \infty. \quad (21)$$

Доказательство. Ясно, что при достаточно больших $r = \|t\|_2$, $t = E^{-1}(\sum\limits_{i\neq j} 2e_i + h_j(r)e_j)$, у полинома $p(x,t)$ расстояние между j-м и $(j+1)$-м корнем становится большим, и напротив, чтобы остальные высоты были равны 2, нужно чтобы расстояния между другими корнями были маленькими; очевидно, они должны стремиться к 0, когда $r \to \infty$. То есть полином будет выглядеть так:

$$p(x,t) = \prod_{i=1}^{j}(x - s + \varepsilon_i) \prod_{i=j+1}^{N}(x + t - \varepsilon_i), \quad \max|\varepsilon_i| \to 0, \quad r \to \infty, \quad (22)$$

для достаточно больших положительных s, t. Из условий $t \in \mathcal{P}_2$ и $\|t\|_2 = r$ получаем

$$-j\frac{s}{r} + (N-j)\frac{t}{r} + \delta_1 = 0, \quad j\left(\frac{s}{r}\right)^2 + (N-j)\left(\frac{t}{r}\right)^2 + \delta_2 = 1,$$
$$\delta_1, \delta_2 \to 0, \quad r \to \infty. \quad (23)$$

Отсюда $\frac{s}{r} \approx \sqrt{\frac{N-j}{Nj}}$, $\frac{t}{r} \approx \sqrt{\frac{j}{(N-j)N}}$. Обозначим $g_k(y,\alpha) = \left(y - \alpha\sqrt{N-jNj}\right)^j \left(y + \alpha\sqrt{j(N-j)N}\right)^{N-j}$. Тогда (22) влечет

$$p(x,t) = r^N g_k(y,1) + o(r^{N-1}), \quad y = \frac{x}{r}, \quad r \to \infty, \tag{24}$$

здесь $\frac{o(r^{N-1})}{r^{N-1}} \to 0$ равномерно при ограниченных y. Значит, чтобы получить асимптотику для $h_j(r)$, нужно сосчитать максимальную высоту полинома $g_j(y,1)$. Легко проверить, что все экстремумы этого полинома равны 0, кроме одного, который по модулю равен $\alpha_j = N^{-\frac{N}{2}} \left(\frac{N}{j} - 1\right)^{\frac{N}{2}-j}$, и мы получаем требуемую асимптотику для $h_j(r)$. Далее, пусть $p(x,t) = g_j(x,r)$, тогда $t \in \overline{\mathcal{P}}_0$, $\|t\|_2 = r$ и $\|E(t)\| = E_j(t) = \alpha_j r^N = f_j(r)$, $E_i(t) = 0$, $i \neq j$. Теперь оценка $f_j(r) > h_j(r)$ получается из следствия 1.7 и определения функции $h_j(r)$. $\square$

Лакуны. Напомним, что функция $\widehat{G}$, изображающая длины лакун полинома, определена в (11). Мы будем работать со следующей функцией

$$G(h) = \widehat{G}(T(h)), \quad h \in (2,+\infty)^{N-1}. \tag{25}$$

Заметим, что $\|G(h)\| < \|G(\alpha h)\|$ при $\alpha > 1$, так как $G(\alpha h)$ – это лакуны полинома $\alpha p(\alpha^{-\frac{1}{N}} x, T(h))$, которые, как нетрудно проверить, больше лакун полинома $p(x,T(h))$, которые в свою очередь равны $G(h)$. Далее будем оценивать $\|G(h)\|$ через $\|h\|$. Вначале установим основную лемму.

Лемма 1.10. *Отображение $G : (2,+\infty)^{N-1} \to \mathbb{R}_+^{N-1}$ является гомеоморфизмом и непрерывно вплоть до границы. Кроме того, производная $\frac{\partial G}{\partial t}(s)$, $s \in \mathcal{P}_2$, существует и обратима.*

Доказательство. Пусть $h \in E(\mathcal{P}_2)$; введем обозначения

$$y^- = y^-(h) = h - 2\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j e_j, \quad y^+ = y^+(h) = h + 2\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j e_j,$$
$$T = T(h).$$

Тогда в обозначениях (10), (11) имеем $T(y^-) = t^-$ и $T(y^+) = t^+$. Ясно, что

$$X(t^-) = X(t^+) = X(T), \qquad \varphi(y^-) = \varphi(y^+) = \varphi(h), \tag{26}$$

так как от добавления к полиному константы точки его экстремумов не меняются и так как $-\frac{\varphi}{2}$ – это коэффициент при x^{N-2} (см. (16)) и он тоже не меняется от добавления к полиному константы. Обозначим $\varphi = \varphi(h)$, тогда, используя определение (25) отображения G и (11), а также (15), (16) и формулы перед (26), имеем

$$\frac{\partial G_{2k}}{\partial h_j} = \frac{\partial T_{2k}}{\partial h_j}(y^-) - \frac{\partial T_{2k+1}}{\partial h_j}(y^-)$$

$$= \left(\frac{1}{t_{2k}^- - x_j(T)} - \frac{1}{t_{2k+1}^- - x_j(T)}\right)\frac{1}{2N}\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial G_{2k-1}}{\partial h_j} = \left(\frac{1}{t_{2k-1}^+ - x_j(T)} - \frac{1}{t_{2k}^+ - x_j(T)}\right)\frac{1}{2N}\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}. \tag{28}$$

Покажем, что $\frac{\partial G}{\partial h}$ является матрицей с диагональным преобладанием. Далее в лемме будем предполагать N четным, в случае нечётного N доказательство аналогично. Используя (27), (28) и группируя нужным образом слагаемые, получаем

$$\left(\frac{1}{2N}\frac{\partial \varphi}{\partial h_j}\right)^{-1}\left(\left|\frac{\partial G_j}{\partial h_j}\right| - \sum_{i\neq j}\left|\frac{\partial G_i}{\partial h_j}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{x_j(T) - t_1^-} + \sum_{i=2}^{N-2}\left(\frac{(-1)^i}{t_{i-1}^+ - x_j(T)} - \frac{(-1)^i}{t_i^- - x_j(T)}\right) +$$

$$+\frac{1}{t_N^- - x_j(T)} > 0, \qquad t_{i+3}^- < t_{i+2}^- < t_{i+1}^+ < t_i^+ < t_{i+1}^- < t_i^-,$$
$$1 \leqslant i \leqslant N-3;$$

отметим, что положительность правой части равенства следует из указанной упорядоченности корней и из неравенства $t_N^- < x_j(T) < t_1^-$. Теперь из $\frac{\partial \varphi}{\partial h_j} > 0$ (см. (15)) следует диагональное преобладание и обратимость матрицы $\frac{\partial G}{\partial h}$. То есть отображение G локально изоморфно. Далее, пусть $t \in \mathcal{P}_2$ и обозначим $s = \{t_j - t_{j+1}\}_{j=1}^{N-1}$; пусть $\alpha \geqslant 1$, тогда

$$p(x, \alpha t) \pm 2 = \alpha^N(p(y,t) \pm 2\alpha^{-N}), \quad y = \frac{x}{\alpha};$$
$$G(E(\alpha t)) = \alpha s + O(\alpha^{1-N}), \quad \alpha \to +\infty. \tag{29}$$

Отметим, что асимптотика следует из первого соотношения в (29) и определения отображения G. Возьмем достаточно большое число α и допустим, что $G(E(\alpha t)) = G(E(\widehat{t}_\alpha))$ для некоторого $\widehat{t}_\alpha \in \mathcal{P}_2$. Похожими методами, как и в (29), можно показать, что

$$\begin{aligned}\widehat{t}_\alpha = \alpha t + O(\alpha^{1-N}), \quad t^{\pm}(E(\widehat{t}_\alpha)) &= t^{\pm}(E(\alpha t)) + O(\alpha^{1-N}) \\ &= \alpha t + O(\alpha^{1-N}), \quad \alpha \to +\infty. \end{aligned} \tag{30}$$

Обозначим $t^{\pm} = t^{\pm}(E(\alpha t))$, $\widehat{t}^{\pm} = t^{\pm}(E(\widehat{t}_\alpha))$. Из сказанного выше видно, что интервалы $\gamma_i^{\pm} = [t_{2i}^{\pm}, t_{2i-1}^{\pm}]$, $\widehat{\gamma}_i^{\pm} = [\widehat{t}_{2i}^{\pm}, \widehat{t}_{2i-1}^{\pm}]$ пересекаются при достаточно больших α и, поскольку они имеют одинаковую длину (так как $G_i(E(t_\alpha)) = G_i(E(\widehat{t}_\alpha)))$, возможны только три варианта взаимного расположения этих промежутков:

$$\begin{gathered} t_{2i}^{\pm} = \widehat{t}_{2i}^{\pm} < t_{2i-1}^{\pm} = \widehat{t}_{2i-1}^{\pm}, \quad t_{2i}^{\pm} < \widehat{t}_{2i}^{\pm} < t_{2i-1}^{\pm} < \widehat{t}_{2i-1}^{\pm}, \\ \widehat{t}_{2i}^{\pm} < t_{2i}^{\pm} < \widehat{t}_{2i-1}^{\pm} < t_{2i-1}^{\pm}. \end{gathered}$$

Обозначим $p(x) = p(x, \alpha t)$, $\widehat{p}(x) = p(x, \widehat{t}_\alpha)$. Используя последнюю формулу, соотношения

$$\begin{gathered} |p(x)| = |\widehat{p}(y)| = 2, \quad x \in \partial\gamma_i^{\pm}, \quad y \in \partial\widehat{\gamma}_i^{\pm}; \\ |p(x)| \geqslant 2, \quad |\widehat{p}(x)| \geqslant 2, \quad x \in \gamma_i^{\pm} \cap \widehat{\gamma}_i^{\pm}, \end{gathered}$$

и то что p и $\widehat{p}$ одного знака на $\gamma_i^{\pm} \cap \widehat{\gamma}_i^{\pm}$, получаем, что существует точка $s_i \in \gamma_i^{\pm} \cap \widehat{\gamma}_i^{\pm}$, для которой $p(s_i) = \widehat{p}(s_i)$, $i = 1, .., N-1$; все эти точки различны. Так как полином $p - \widehat{p}$ имеет степень $N-2$ (обсуждалось в (16)), то $p \equiv \widehat{p}$ и, значит, $\alpha t = t_\alpha$ и $G^{-1}(G(E(\alpha t))) = E(\alpha t)$ – прообраз состоит из одной точки. Теперь всё готово для применения леммы 1.3 при $f = G$, $X = (2, +\infty)^{N-1}$, $Y = \mathbb{R}_+^{N-1}$ (условия $f(\partial X) \subset \partial Y$; $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$, и непрерывность вплоть до границы проверяются достаточно просто). $\square$

Доказательство предложения 1.1. Следует из леммы 1.10 и соотношений (25), (13). $\square$

Лемма 1.11. *Пусть $u \geqslant 2$, тогда имеет место тождество*

$$\sup_{\|h\|=u} \|G(h)\| = \|G(ue_k + 2\sum_{i \neq k} e_i)\|.$$

Доказательство. Можно считать, что $u > 2$. Пусть $\sup\limits_{\|h\|=u} \|G(h)\| = \|G(h^0)\| = \|G_{j^0}(h^0)\|$ для некоторого j^0. Предположим, что у вектора h^0 компонента $h^0_{j^0}$ строго меньше u, тогда, применяя следствие 1.7 ii) для $t = t^{\pm}(\widehat{h})$ (здесь $\widehat{h} = h^0 - h^0_{j^0} e^0_j + u e_{j^0}$, $\|\widehat{h}\| = u$) и для $s = t^{\pm}(h^0)$ (см. (10), (11)), получаем $\|G(\widehat{h})\| > \|G(h^0)\|$, что противоречит определению точки h^0; значит $h^0_{j^0} = u$. Используя следствие 1.7 ii) для остальных h^0_i, $i \neq j^0$, можно показать, что $h^0_i = 2$, $i \neq j^0$. Таким образом, $h^0 = u e_{j^0} + 2\sum_{i \neq j^0} e_i$. Теперь докажем, что $j_0 = k$, для этого введем функции

$$h^j = h^j(r) = r e_j + 2\sum_{i \neq j} e_i, \quad l_j = l_j(r) = G_j(h^j(r)),$$
$$r > 2, \quad j = 1, ..., N-1. \tag{31}$$

Предположим, что для некоторого $r_0 > 2$ оказались равны соседние лакуны, то есть $l_{j+1}(r_0) = l_j(r_0) = l^0$ для некоторых $l^0 > 0$ и $1 \leqslant j \leqslant N-2$. Будем считать j чётным (в случае нечётного j всё аналогично), введём обозначения (T см. в (14))

$$t^0 = T(h^{j+1}(r_0)) - t^+_{j+2}(h^{j+1}(r_0)) \sum_{i=1}^{N} e_i,$$
$$\widehat{t}^0 = T(h^j(r_0)) - t^-_{j+1}(h^j(r_0)) \sum_{i=1}^{N} e_i,$$

обозначим $p(x) = p(x, t^0)$, $\widehat{p}(x) = p(x, \widehat{t}^0)$ и $x^0 = X(t^0)$, $\widehat{x}^0 = X(\widehat{t}^0)$ (см. (7)), тогда

$$p(x^0_i) = (-1)^i 2, \quad i \neq j+1, \quad \widehat{p}(\widehat{x}^0_i) = (-1)^i 2, \quad i \neq j,$$
$$p(x^0_{j+1}) = -\widehat{p}(\widehat{x}^0_j) = -r_0, \tag{32}$$

$$p(0) = -\widehat{p}(0) = p(l^0) = -\widehat{p}(l^0) = -2, \quad -p(x) > 2,$$
$$\widehat{p}(x) > 2, \quad x \in (0, l^0). \tag{33}$$

Еще заметим, что $x_{n+1}, \widehat{x}_n \in (0, l^0)$; теперь теми же методами, что и в доказательстве леммы 1.4, можно показать, что у полинома $p + \widehat{p}$ на интервале $[-\infty, 0]$ не меньше $N - j - 1$ корней, на промежутке $(0, l^0)$ не меньше двух корней и на интервале $[l^0, +\infty)$ не меньше j корней, то есть $p+\widehat{p}\equiv 0$, чего не может быть, так как $p+\widehat{p}=2x^N+o(x^N)$. Значит, наше предположение относительно r_0 неверно и всегда $l_j(r)\neq l_{j+1}(r)$ при всех $r>2$, $1\leqslant j\leqslant N-1$. Возьмём r достаточно большим. Напомним, что мы уже изучали полиномы, у которых одна высота большая, а остальные равны 2, в лемме 1.9. Действуя теми же методами, можно показать, что

$$\tau_j=t_j^j-t_{j+1}^j=\frac{r^{\frac{1}{N}}}{(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^\alpha}+o(r^{\frac{1}{N}}),\quad \alpha=\frac{j}{N};\quad t^j=t^j(r)=T(h^j(r)).$$

То есть при достаточно больших r имеем $\tau_j<\tau_{j+1}$, $1\leqslant j\leqslant k-1$. Но ясно, что $l_j=\tau_j+o(1)$, $r\to\infty$ (метод такой же, как и в (30)), значит, при достаточно больших r имеем неравенство $l_j(r)<l_{j+1}(r)$, $1\leqslant j\leqslant k-1$, а так как $l_j(r)\neq l_{j+1}(r)$, $r>2$, и эти функции непрерывны, то неравенство “$<$” сохраняется при всех $r>2$. В итоге, возвращаясь к нашему u, получаем $l_k(u)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} l_j(u)$ и, значит, $j^0=k$; так как в h^0 достигается верхняя грань (см. (31) и выше), также имеем $h^0=ue_k+2\sum_{i\neq k}e_i$. $\square$

Следствие 1.12. *Пусть $N=2k$, тогда имеет место тождество*

$$\sup_{\|h\|=u}\|G(h)\|=4\sinh\left(\frac{1}{N}\operatorname{arccosh}\frac{u}{2}\right). \tag{34}$$

Доказательство. Используем обозначения, принятые в доказательстве леммы 1.11. В случае $N=2k$ экстремальный полином выписывается в явном виде:

$$p(x,T(h^0))=2(-1)^k\cos\left(k\arccos\left(-\frac{x^2}{2}+\beta\right)\right),$$
$$\beta=\cosh\left(\frac{1}{k}\operatorname{arccosh}\frac{u}{2}\right),$$

так как у этого полинома все высоты равны 2, кроме центральной (k-й), которая равна u, откуда и находим $\|G(h^0)\|$. $\square$

Лемма 1.13. *Пусть $u\geqslant 2$, тогда имеют место соотношения*

$$\inf_{\|h\|=u}\|G(h)\|=\|G(h^0)\|=g(u),\quad h^0=h^0(u)=G^{-1}(g(u)\sum_{m=1}^{N-1}e_m),$$
$$\|h^0\|=u.$$

Иными словами, нижняя грань достигается тогда, когда все лакуны одинаковой длины.

Доказательство. От противного: пусть одна из лакун $G_j(h^0)$ строго меньше $g(u)$. Возьмем $h^\varepsilon = h^0 + \varepsilon e_j$, $\varepsilon > 0$, тогда, применяя следствие 1.7.ii) для $t = t^{\pm}(T(h^\varepsilon))$, $s = t^{\pm}(T(h^0))$ (напомним, что $t^{\pm}$ определено в (10), а T в (14)) и используя определение отображения G (см. (11), (25)), получаем, что $\|G(h^\varepsilon)\| < \|G(h^0)\|$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но так как $\|h^0\| < \|h^\varepsilon\|$, то по замечанию после (25) имеем $\|G(\frac{\|h^0\|}{\|h^\varepsilon\|}h^\varepsilon)\| < \|G(h^\varepsilon)\| < \|G(h^0)\|$, и это противоречит тому, что в h^0 достигается нижняя грань нормы G.
□

Следствие 1.14. *Пусть $N = 2k$, тогда в обозначениях леммы* 1.13 *имеет место асимптотика*

$$g(u) = u^{\frac{1}{N}} \prod_{m=1}^{k} \left(m - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} + O(u^{\frac{1}{N}-1}), \quad u \to +\infty. \tag{35}$$

Доказательство. Оставим те же обозначения, что и в лемме 1.13. Ясно, что $g(u) \to +\infty$, когда $u \to +\infty$. Действуя так же, как при выводе (29), (30), можно показать, что

$$T_m(h^0) - T_{m+1}(h^0) = g(u) + O(g(u)^{1-N}), \quad u \to +\infty$$

(T определено в (14)). То есть получаем

$$T(h^0) = g(u) \sum_{m=1}^{k} \left(m - \frac{1}{2}\right)(e_{k+1-m} - e_{k+m}) + O(g(u)^{1-N}), \quad u \to +\infty,$$

$$p(x, T(h^0)) = g(u)^N f(u, y), \quad y = \frac{x}{g(u)}, \quad u \to +\infty, \tag{36}$$

$$f(u, y) = \prod_{m=1}^{k} \left(y - m + \frac{1}{2} + O(g(u)^{-N})\right)\left(y + m - \frac{1}{2} + O(g(u)^{-N})\right),$$
$$u \to +\infty. \tag{37}$$

Так как у полинома $p(y, s^0) = \prod_{m=1}^{k}(y^2 - (m - \frac{1}{2})^2)$ максимальная высота $\|E(s^0)\| = |p(0, s^0)|$ (показать это можно, например, по индукции), то из (36) и (37) мы получаем

$$u = \|h^0\| = g(u)^N \prod_{m=1}^{k} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + O(1), \quad u \to +\infty,$$

откуда находим (35). $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Из первой формулы (20) с помощью (14) получаем, что $\inf\limits_{Q(h)=c(r)} \|h\| = r$, откуда, с учетом определения M_2 (см. (4)), мы получаем первую формулу в (6). Вторую формулу в (6) получаем похожим образом из второй формулы (20) и из (21) с помощью (3) и той же формулы (13), замечая, что $\max_j h_j(r) < \max_j f_j(r) = f_1(r)$. Формулы (5) получаются из (34), (35) с применением формул (25), (13) и определений (3). $\square$

Доказательство предложения 1.3. Рассмотрим множество $S_\beta = \{x \in \mathcal{P}_0 : \ x_1 - x_N = \beta\}$, $\beta > 0$. Нетрудно проверить следующее:

$$\min_{x \in S_\beta} \|x\|_2^2 = \|x^0\|_2^2 = \frac{N-1}{N}\beta^2, \quad \max_{x \in S_\beta} \|x\|_2^2 = \|x^1\|_2^2 = \frac{N^2 - \delta_N}{4N}\beta^2, \tag{38}$$

$$x^0 = \sum_{n=2}^{N} a(e_1 - e_n), \quad x^1 = \sum_{n=1}^{m} a(N-m)e_n - \sum_{n=m+1}^{N} ame_n, \quad a = \frac{\beta}{N},$$
$$m = \frac{N - \delta_N}{2}. \tag{39}$$

В обозначениях (10) пусть $t \in \mathcal{P}_2$ и $t^\pm = t^\pm(t)$, тогда можно показать, что

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{N} (t_k^{\varepsilon_k} - t_k^{-\varepsilon_k}) \leqslant 4, \quad \varepsilon_k = (-1)^k.$$

Это так называемая оценка длин спектральных зон (см. [9]). Первое неравенство очевидно, во втором нужно заметить, что при $t^0 = E^{-1}(\sum 2e_n)$ будет равенство, а если высоты полинома $p(x,t)$ больше 2 (то есть больше высот полинома $p(x, t^0)$, в нашем случае это так, поскольку $t \in \mathcal{P}_2$), то каждое из слагаемых только уменьшится (поскольку применимо следствие 1.7.ii к полиному $p(x,T) = p^2(x,t) - 4$), и мы получим требуемое неравенство. Добавляя к этому неравенству $|\hat\gamma| = \sum_{n=1}^{N-1} \hat G_n$, $\hat G_n = \hat G_n(t)$ (см. (11)), получаем

$$|\hat{\gamma}| \leqslant t_1^- - t_N^- \leqslant 4 + |\hat{\gamma}|. \tag{40}$$

Теперь, учитывая, что $\|t^-\|_2^2 = \|t\|_2^2$, и принимая во внимание второе равенство в (13), а также применяя для $t^- \in S_\beta$, $\beta = t_1^- - t_N^-$ тождества (38) и неравенства (40) и учитывая, наконец, первое равенство в (13), мы получаем искомые оценки. Нетрудно увидеть, что

$$\frac{m_3(re_1)}{Q^2(re_1)} \to 1, \quad r \to \infty; \quad \frac{M_3(re_m)}{Q^2(re_m)} \to 1, \quad r \to \infty, \quad m = \frac{N + \delta_N}{2}; \tag{41}$$

заметим, что полиномы, у которых одна высота большая, а остальные по модулю равны 2 (это соответствует re_1 и re_m в (41)), неоднократно изучались в этой работе (см. лемму 1.9, (22)–(24)) и получить для них (41) не представляет большого труда.

Литература

1. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* "Наукова думка," Киев (1977).
2. P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices.* — Invent. Math. **37** No. 1 (1976), 45–81.
3. E. Korotyaev, A. Kutsenko, *Inverse problem for the periodic Jacoby matrices.* — Preprint 2004.
4. Y. Last, *On the measure of gaps and spectra for discrete* 1*D Schrodinger operators.* — Comm. Math. Phys. **149**, No. 2 (1992), 347–360.
5. P. Kargaev, E. Korotyaev, *Inverse problems generated by conformal mappings on complex plane with parallel slits.* — Sfb 288 Preprint No. 458.
6. P. Kargaev, E. Korotyaev, *Inverse Problem for the Hill Operator, the Direct Approach.* — Invent. Math. **129**, No. 3 (1997), 567–593.
7. E. Korotyaev, I. Krasovsky, *Spectral estimates for periodic Jacobi matrices.* — Comm. Math. Phys. **234**, No. 3 (2003), 517–532.
8. L. Perkolab, *An inverse problem for a periodic Jacobi matrix.* — (Russian) Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. **42** (1984), 107–121.
9. P. Deift, B. Simon, *Almost periodic Shrödinger operators* III *The absolutely continuous spectrum in one dimension.* — Commun. Math. Phys., **90** (1983), 389–411.

Kutsenko A. A. Estimates of parameters of conformal mappings related to a periodic Jacobi matrix.

We study the conformal mappings of the band without some vertical symmetric slits into the plane without horizontal slits (which lie on the real axis). Sharp two-sided estimates involving the lengths of slits and other parameters are obtained. In terms of the spectral theory of Jacobi matrices, we obtain sharp estimates involving isospectral parameters and the norm of potentials.

С.-Петербургский
государственный университет,
Institut für Mathematik, Universität Potsdam,
E-mail: kucenko@math.uni-potsdam.de

Поступило 13 октября 2004 г.