Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 315, 2004 г.

А. Ф. Гришин, И. В. Поединцева

К ТАУБЕРОВОЙ ТЕОРЕМЕ КЕЛДЫША

Доказываются новые варианты тауберовой теоремы Келдыша. Приводятся примеры, показывающие, насколько точны условия в доказываемых теоремах. Среди промежуточных результатов новые варианты обращения правила Лопиталя.

Условимся о терминологии и обозначениях. В работе положительное число – это элемент полуоси $[0,\infty)$. Возрастающая функция f – это такая функция, что из неравенства $x_1 \le x_2$ следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$. Если f_1 и f_2 – положительные функции на полуоси $(0,\infty)$, то соотношение $f_1(x) << f_2(x)$ означает, что существуют числа R и M такие, что при $x \ge R$ выполняется неравенство $f_1(x) \le Mf_2(x)$. Аналогично понимается знак $>>$. Символом M мы будем обозначать строго положительные, вообще говоря различные, постоянные.

Пусть мы имеем равенство

$$\Phi(x) = \int\limits_0^\infty K(x,t)d\varphi(t). \tag{1}$$

Теоремы, в которых по асимптотическим свойствам функции φ находятся асимптотические свойства функции Φ, называются абелевыми теоремами. Теоремы, в которых по асимптотическим свойствам функции Φ находятся асимптотические свойства функции φ, называются тауберовыми. М.В.Келдыш ([1], перепечатка в [2]) нашел новый тип тауберовых теорем. Наряду с равенством (1) он рассматривал равенство

$$\Psi(x) = \int\limits_0^\infty K(x,t)d\psi(t).$$

При некоторых дополнительных условиях им было доказано, что из равенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{\Phi(x)} = 1$$

следует равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1.$$

В теореме Келдыша ядро имеет вид

$$K(x,t)=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{x}\right)^m},\quad m>0.$$

Ограничения на функции φ и ψ в этой теореме, как это часто бывает в первых вариантах доказательства, более сильные, чем это необходимо для получения заключения теоремы. Эти ограничения были значительно ослаблены в работе Б.И.Коренблюма [3] (см. также [4]), где они имеют следующий вид:

1) φ и ψ – возрастающие на полуоси $[0,\infty)$ функции, причем $\varphi(0)=\varphi(+0)=0$, $\psi(0)=\psi(+0)=0$,

2)

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty,$$

3) существуют числа $\alpha<m$ и x_0 такие, что при $y\geq x\geq x_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\leq\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}. \tag{2}$$

Отметим, что Коренблюм в [3] рассматривает достаточно общий класс ядер, содержащий в качестве своего элемента ядро из теоремы Келдыша.

В данной работе мы ограничиваемся ядром, которое рассматривал Келдыш. Здесь по сравнению с условиями Коренблюма ослабляются требования на монотонность функций φ и ψ, условие 2) заменяется на требование, чтобы функция φ не была тождественно равной нулю ни в какой окрестности бесконечности, неравенство (2) заменяется на более слабое

$$\varphi(y)\leq M\varphi(x)\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha},\quad y\geq x\geq x_0,\ M=M(\varphi,x_0). \tag{3}$$

Отметим еще, что условие (2) в теореме Коренблюма ослаблено до условия

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\leq(1+\varepsilon(x))\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha},\quad y\geq x,\quad \varepsilon(x)\to 0 \text{ при } x\to\infty \tag{4}$$

в работе В. И. Мацаева и Ю. А. Паланта [5]. Классы функций, удовлетворяющих условиям (3) и (4), различны. Эти классы были предметом специальных исследований. Об этом написано в книге [6, глава 2].

Скажем несколько слов о доказательствах. Келдыш доказывал свою теорему методами комплексного анализа. Доказательство Коренблюма чисто вещественное. Мы повторяем некоторые из его рассуждений. Вместе с тем, доказательство Коренблюма опирается на специальную теорему об аппроксимации винеровского типа, а в основе наших рассуждений лежат соображения компактности, в частности, теорема выбора Хелли [7, глава 8, §4]. Применение соображений компактности в тауберовых теоремах уже имеет достаточно длинную историю, смотри, например, [8, 9, 6], где имеются дальнейшие ссылки. В заметке используется хорошо развитая теория роста вещественных функций, которая сейчас наиболее полно изложена в [6].

Тауберовы теоремы Келдыша находят широкое применение в теории операторов. Так, его тауберова теорема была нужна Келдышу для доказательства своих результатов по теории операторов [10] (перепечатка в [2]). Точно так же обстоит дело и с тауберовой теоремой из работы [5]. Широко применяются тауберовы теоремы и в книге [11]. Отдельная глава этой книги посвящена тауберовым теоремам.

Основные результаты статьи – это теоремы 8 и 9.

Начнем изложение с выписывания необходимых определений и цитирования известных результатов, которые используются в заметке.

Пусть f – положительная функция на полуоси $[0,\infty)$. Обозначим через E множество тех α, для которых сущесвуют числа M и R такие, что выполняется неравенство $f(tr) \leq Mt^{\alpha}f(r)$ при $t \geq 1$, $r \geq R$. *Верхним индексом Матушевской* функции f называется число $\alpha(f) = \inf E$. Если множество E пустое, то полагают $\alpha(f) = +\infty$.

Обозначим через G множество тех чисел β, для которых существуют числа M и R такие, что выполняется неравенство $f(tr) \geq Mt^{\beta}f(r)$ при $t \geq 1$, $r \geq R$. *Нижним индексом Матушевской* функции f называется число $\beta(f) = \sup G$. Если множество G пустое, то полагают $\beta(f) = -\infty$.

Эти определения эквивалентны определениям из [6, раздел

2.1].

Отметим одно простое утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Пусть f – положительная на полуоси $(0,\infty)$ функция, которая не равна тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности. Пусть хотя бы одна из величин $\alpha(f)$, $\beta(f)$ конечна. Тогда существует окрестность бесконечности, в которой функция f строго положительна.

Следующее утверждение – это вариант известной теоремы о пиках Полиа.

Теорема 1 ([6, теорема 2.5.2]). *Пусть f – положительная измеримая на полуоси $(0,\infty)$ функция и выполняется хотя бы одно из неравенств $\beta(f)>-\infty$, $\alpha(f)<+\infty$. Тогда для каждого вещественного p такого, что*

$$\beta(f)\le p\le \alpha(f),$$

существуют бесконечно большие последовательности r_n, a_n и бесконечно малая последовательность δ_n (эти последовательности различные в двух написанных ниже неравенствах) такие, что

$$f(tr_n)\le(1+\delta_n)f(r_n)t^p,\qquad t\in\left[\frac{1}{a_n},a_n\right],$$

$$f(tr_n)\ge(1-\delta_n)f(r_n)t^p,\qquad t\in\left[\frac{1}{a_n},a_n\right],$$

и ни для каких других p таких последовательностей не существует.

В оригинальном доказательстве Дрейсина и Шиа [12] дополнительно требовалось, чтобы функция f была непрерывна. Однако, достаточно измеримости. Вопросы, связанные с отказом от измеримости, обсуждаются в [6].

В рассматриваемом круге вопросов представляет интерес связь между свойствами функций φ и Φ,

$$\Phi(r)=\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}=\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+1}},\quad m>-1.\tag{5}$$

Мы будем использовать представление (5), а не представление, которое рассматривал Келдыш

$$\Phi(x)=\int\limits_0^\infty\frac{d\varphi(t)}{\left(1+\frac{t}{x}\right)^{m}}.\tag{6}$$

Это не уменьшает общности рассуждений, так как интегрированием по частям от представления (6) можно прийти к представлению (5). Более того, если использовать представление (5), то условие монотонности функции φ не выглядит естественным и мы иногда будем отказываться от него. Излагаемые ниже результаты о связи между свойствами функций φ и Φ по существу известны, но приводятся в нужном нам оформлении и для полноты изложения.

Лемма 1. *Пусть φ – положительная измеримая функция на полуоси $(0,\infty)$, а функция Φ определяется формулой (5). Тогда функция $r\Phi(r)$ является возрастающей функцией на полуоси $(0,\infty)$, а функция $r^{-m}\Phi(r)$ – убывающей. Это эквивалентно тому, что выполняются неравенства*

$$\Phi(tr) \geq \frac{1}{t}\Phi(r), \qquad \Phi(tr) \leq t^m\Phi(r), \quad t \geq 1, \quad r > 0.$$

Утверждение леммы легко усмотреть из второго равенства в формуле (5).

Замечание. Заметим, что конечность функции $\Phi(r)$ хотя бы для одного $r \in (0,\infty)$ влечет конечность этой функции при всех $r \in (0,\infty)$. В принципе, для справедливости леммы не нужно требовать конечности Φ. Однако, если это не выполняется, то неравенства леммы превращаются в тривиальное неравенство $\infty \leq \infty$. Заметим еще, что лемма 1 является одним из фактов, порождаемых специфичностью рассматриваемого ядра.

Лемма 2. *Пусть φ – положительная измеримая на полуоси $(0,\infty)$ функция, причем $\beta(\varphi) > -\infty$. Тогда $\varphi(r) << \Phi(r)$, где Φ – функция, определяемая равенством (5).*

Доказательство. Пусть $\beta < \beta(\varphi)$. Тогда существуют числа R и M такие, что при $r \geq R$, $u \geq 1$ выполняется неравенство

$$\varphi(ur) \geq Mu^\beta\varphi(r).$$

Поэтому при таких r получаем

$$\Phi(r) \geq \int_1^\infty \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}} \geq M\varphi(r)\int_1^\infty \frac{u^\beta du}{(1+u)^{m+1}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Мы будем говорить, что положительные функции f и g имеют одинаковый рост на бесконечности, если

$$0 < \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r)}{g(r)} \le \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r)}{g(r)} < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $m > -1$, φ – положительная измеримая не равная тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности функция на полуоси $(0,\infty)$, Φ – конечная функция, определенная равенством (5). Для того, чтобы функции φ и Φ имели одинаковый рост на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\beta(\varphi) > -1$, $\alpha(\varphi) < m$.*

Доказательство. Предположим, что выполняются неравенства $\beta(\varphi) > -1$, $\alpha(\varphi) < m$. Пусть $\beta \in (-1, \beta(\varphi))$, $\alpha \in (\alpha(\varphi), m)$. Существуют числа R, M_1, M такие, что при $r \ge R$, $u \ge 1$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &\varphi(ur) \le M_1 u^\alpha \varphi(r), \\ &\varphi(ur) \ge M u^\beta \varphi(r), \end{aligned} \tag{7}$$

причем можно считать, что $\varphi(R) \ne 0$.

Из неравенства (7) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(ur) \le M_2 u^\beta \varphi(r), \quad u \in (0,1], \quad ur \ge R, \\ \varphi(v) \ge M\frac{\varphi(R)}{R^\beta} v^\beta, \quad v \ge R. \end{aligned} \tag{8}$$

Приведенные соотношения позволяют оценить при $r \ge R$ функцию Φ сверху:

$$\Phi(r) = \int_0^{\frac{R}{r}} \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}} + \int_{\frac{R}{r}}^1 \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}} + \int_1^\infty \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}$$

$$\le \int_0^{\frac{R}{r}} \varphi(ur)du + M_2\varphi(r)\int_0^1 \frac{u^\beta du}{(1+u)^{m+1}} + M_1\varphi(r)\int_1^\infty \frac{u^\alpha du}{(1+u)^{m+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{r\varphi(r)}\int_0^R \varphi(t)dt + M_2\int_0^1 \frac{u^\beta du}{(1+u)^{m+1}} + M_1\int_1^\infty \frac{u^\alpha du}{(1+u)^{m+1}}\right)\varphi(r).$$

Из этого и неравенства (8) следует, что

$$\Phi(r) << \varphi(r).$$

Вместе с леммой 2 это дает, что функции φ и Φ имеют одинаковый рост на бесконечности.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что функции φ и Φ имеют одинаковый рост на бесконечности. Из этого и леммы 1 следует, что $\alpha(\varphi) \leq \infty$. Предположим, что $\alpha(\varphi) \geq m$.

По теореме 1 существуют бесконечно большие последовательности r_n, a_n и бесконечно малая последовательность δ_n такие, что

$$\varphi(ur_n) \geq (1-\delta_n)\varphi(r_n)u^m, \quad u \in [1, a_n].$$

Из равенства (5) следует, что

$$\Phi(r_n) \geq \int_1^{a_n} \frac{\varphi(ur_n)du}{(1+u)^{m+1}} \geq (1-\delta_n)\varphi(r_n) \int_1^{a_n} \frac{u^m du}{(1+u)^{m+1}} \geq (1-\delta_n)\varphi(r_n) \ln a_n.$$

Это противоречит соотношению

$$\Phi(r) << \varphi(r).$$

Тем самым доказано, что $\alpha(\varphi) < m$. Аналогично доказывается, что $\beta(\varphi) > -1$. Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать такие теоремы.

Теорема 3. *Пусть m – произвольное вещественное число, φ – положительная локально интегрируемая не равная тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности функция на полуоси $(0, \infty)$,*

$$A(r) = \int_1^{\infty} \frac{\varphi(ur)}{u^{m+1}} du, \qquad A(r) < \infty.$$

Для того, чтобы функции φ и A имели одинаковый рост на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\beta(\varphi) > -\infty$, $\alpha(\varphi) < m$.

Теорема 4. *Пусть m – произвольное вещественное число, φ – положительная измеримая не равная тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности функция на полуоси $(0,\infty)$,*

$$B(r)=\int\limits_0^1 \frac{\varphi(ur)}{u^{m+1}}du, \qquad B(r)<\infty.$$

Для того, чтобы функции φ и B имели одинаковый рост на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\beta(\varphi)>m$, $\alpha(\varphi)<\infty$.

Теоремы 3 и 4 лишь оформлением отличаются от теорем 2.6.1, 2.6.3 и замечаний к ним в [6]. Из теоремы 3 получается любопытное следствие.

Теорема 5. *Пусть m – произвольное вещественное число, φ – положительная измеримая функция на полуоси $(0,\infty)$, причем $\beta(\varphi)>-\infty$. Если существует число R такое, что семейство функций переменной u на полуоси $[1,\infty)$ вида*

$$\frac{1}{u^{m+1}}\frac{\varphi(ru)}{\varphi(r)}, \quad r\geq R,$$

имеет интегрируемую мажоранту на этой полуоси, то существует число $\alpha<m$ такое, что при $u\geq 1$ выполняется неравенство

$$\varphi(ru)<<u^{\alpha}\varphi(r).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$A(r)=\int\limits_1^\infty \frac{\varphi(ru)}{u^{m+1}}du.$$

Из условия $\beta(\varphi)>-\infty$, повторяя рассуждения из леммы 2, можно получить неравенство

$$\varphi(r)<<A(r).$$

Из условия теоремы следует, что существуют число R и интегрируемая на полуоси $[1,\infty)$ функция $a(u)$ такие, что

$$\frac{1}{u^{m+1}}\varphi(ru)\leq a(u)\varphi(r), \quad r\geq R, \quad u\geq 1.$$

Из этого следует, что $A(r) \leq \varphi(r) \int\limits_1^\infty a(u)du$ при $r \geq R$. Теперь теорема 3 дает $\alpha(\varphi) < m$, а это эквивалентно утверждению теоремы. Теорема доказана.

Следующая лемма – важный промежуточный результат. Доказательства последующих предложений из заметки, по существу, являются фрагментами доказательства этой леммы.

Лемма 3. *Пусть φ, ψ – положительные измеримые функции на полуоси $(0, \infty)$, удовлетворяющие условиям:*

1) *выполняется хотя бы одно из неравенств $\beta(\varphi) > -\infty$, $\beta(\psi) > -\infty$,*

2) *выполняется хотя бы одно из неравенств $\alpha(\varphi) < m$, $\alpha(\psi) < m$, где m – некоторое число, строго большее -1,*

3) *функции*

$$\Phi(r) = \frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+1}}, \quad \Psi(r) = \frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \frac{\psi(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+1}}$$

конечны, причем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^r \psi(t)dt}{\int\limits_0^r \varphi(t)dt} = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_{-1}(t) = \int\limits_0^t \varphi(u)du, \quad \psi_{-1}(t) = \int\limits_0^t \psi(u)du. \tag{9}$$

Имеем

$$\int\limits_0^\tau \frac{\varphi(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+1}} = \frac{\varphi_{-1}(\tau)}{\left(1+\frac{\tau}{r}\right)^{m+1}} + \frac{m+1}{r}\int\limits_0^\tau \frac{\varphi_{-1}(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+2}}. \tag{10}$$

Из ограниченности сверху по переменной τ интеграла в левой части равенства (10) следует ограниченность сверху интеграла из правой части этого равенства и сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_{-1}(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+2}}. \tag{11}$$

Таким образом, каждый из интегралов в равенстве (10) имеет предел при $\tau \to \infty$. Следовательно, внеинтегральный член также имеет предел. Этот предел с необходимостью равен нулю, иначе интеграл (11) был бы расходящимся. Переходя в равенстве (10) к пределу при $\tau \to \infty$, находим

$$\Phi(r) = \frac{m+1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\varphi_{-1}(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+2}} = \frac{m+1}{r}\int_0^\infty \frac{\varphi_{-1}(ur)}{(1+u)^{m+2}}du. \tag{12}$$

Аналогично

$$\Psi(r) = \frac{m+1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\psi_{-1}(t)dt}{\left(1+\frac{t}{r}\right)^{m+2}} = \frac{m+1}{r}\int_0^\infty \frac{\psi_{-1}(ur)}{(1+u)^{m+2}}du. \tag{13}$$

Так как $\beta(\varphi_{-1}) \geq 0$, $\beta(\psi_{-1}) \geq 0$, то по лемме 2 существуют числа $R > 0$ и M такие, что при $r \geq R$ будут выполняться неравенства

$$\varphi_{-1}(r) \leq Mr\Phi(r), \quad \psi_{-1}(r) \leq Mr\Psi(r). \tag{14}$$

Кроме того, мы можем считать, что при $r \geq R$ выполняются неравенства

$$\Phi(r) \leq 2\Psi(r), \quad \Psi(r) \leq 2\Phi(r).$$

Предположим теперь, что $\alpha(\varphi) < m$. Выберем $\alpha \in (\alpha(\varphi), m)$, $\alpha > -1$. Существуют числа $R > 0$ и M такие, что

$$\varphi(ru) \leq Mu^\alpha \varphi(r), \quad r \geq R, \quad u \geq 1.$$

Это дает при $r \geq R$, $u \geq 1$

$$\varphi_{-1}(ru) = \int_0^{ru} \varphi(\tau)d\tau = \varphi_{-1}(R) + \int_R^{Ru} \varphi(\tau)d\tau + \int_{Ru}^{ru} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \varphi_{-1}(R) + R\int\limits_1^u \varphi(vR)dv + ru\int\limits_{\frac{R}{r}}^1 \varphi(vru)dv \leq$$

$$\leq \varphi_{-1}(R) + MR\varphi(R)\int\limits_0^u v^\alpha dv + Mru^{\alpha+1}\int\limits_0^1 \varphi(rv)dv =$$

$$= \varphi_{-1}(R) + \frac{M}{\alpha+1}R\varphi(R)u^{\alpha+1} + Mu^{\alpha+1}\varphi_{-1}(r) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{-1}(R)}{u^{\alpha+1}\varphi_{-1}(r)} + \frac{M}{\alpha+1}\frac{R\varphi(R)}{\varphi_{-1}(r)} + M\right)u^{\alpha+1}\varphi_{-1}(r) \leq Mu^{\alpha+1}\varphi_{-1}(r). \tag{15}$$

Вывод неравенства (15) мы поместили для полноты изложения. Его справедливость можно извлечь из рассуждений раздела 2.6 книги [6]. Теперь из равенства (12) и теоремы 2 делаем вывод, что

$$r\Phi(r) << \varphi_{-1}(r). \tag{16}$$

Аналогично, если $\alpha(\psi) < m$, то найдутся числа $\alpha \in (-1, m)$, $R > 0$, M такие, что

$$\psi_{-1}(ru) \leq Mu^{\alpha+1}\psi_{-1}(r), \quad r \geq R, \quad u \geq 1,$$

$$r\Psi(r) << M\psi_{-1}(r).$$

Утверждения, которые мы получили до сих пор, являются прямыми следствиями условий леммы и предыдущих утверждений. Переходим к существенной части доказательства. Введем два семейства функций

$$a_r(x) = \frac{\varphi_{-1}(rx)}{r\Phi(r)}, \quad b_r(x) = \frac{\psi_{-1}(rx)}{r\Phi(r)}, \quad x \in [0, \infty), \quad r \geq R,$$

где R – такое число, что при $r \geq R$ выполняются все неравенства, необходимые для справедливости полученных ранее соотношений. Это семейства возрастающих функций. Пусть $x \geq 1$, $\alpha(\varphi) < m$. Имеем

$$a_r(x) \leq Mx^{\alpha+1}\frac{\varphi_{-1}(r)}{r\Phi(r)} \leq Mx^{\alpha+1},$$

$$b_r(x) \le M\frac{rx\Psi(rx)}{r\Phi(r)} \le M\frac{rx\Phi(rx)}{r\Phi(r)} \le M\frac{\varphi_{-1}(rx)}{r\Phi(r)} \le Mx^{\alpha+1}.$$

Напомним, что одним символом M мы обозначаем не обязательно равные постоянные. Справедливость последней цепочки неравенств следует из неравенств (14), (16), (15).

Аналогичные неравенства выполняются и в случае, когда верно неравенство $\alpha(\psi) < m$. Таким образом, выполнение хотя бы одного из неравенств $\alpha(\varphi) < m$, $\alpha(\psi) < m$ влечет за собой существование чисел $\alpha \in (-1, m)$ и M таких, что на полуоси $[0, \infty)$ выполняются неравенства

$$a_r(x) \le M\max(1, x^{\alpha+1}), \quad b_r(x) \le M\max(1, x^{\alpha+1}), \quad r \ge R. \tag{17}$$

В частности, оба семейства равномерно ограничены на любом сегменте $[0, A]$.

Предположим теперь, что $\beta(\varphi) > -\infty$. По лемме 2 найдутся числа R и M такие, что

$$\varphi(r) \le M\Phi(r), \quad r \ge R.$$

С помощью этой оценки докажем равностепенную непрерывность семейства $a_r(x)$ на сегментах $[a, b] \subset (0, \infty)$. Пусть $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a, b]$. При условии $ar \ge R$ справедливы соотношения

$$a_r(x_2) - a_r(x_1) = \frac{1}{r\Phi(r)}\int_{rx_1}^{rx_2}\varphi(t)dt \le \frac{M}{r\Phi(r)}\int_{rx_1}^{rx_2}\Phi(t)dt$$

$$= M\frac{\Phi(\xi)}{\Phi(r)}(x_2 - x_1) \le M(a, b)(x_2 - x_1),$$

где ξ – некоторое число из сегмента $[rx_1, rx_2]$. Заметим, что последнее из написанных неравеств следует из леммы 1. Аналогично из неравенства $\beta(\psi) > -\infty$ следует неравенство

$$b_r(x_2) - b_r(x_1) \le M(a, b)(x_2 - x_1).$$

Переходим к заключительной части доказательства. Пусть некоторые бесконечно большая последовательность r_n и величина $s \in [0, \infty]$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{r_n}\psi(t)dt}{\int_0^{r_n}\varphi(t)dt} = s.$$

По теореме Хелли существует подпоследовательность R_n последовательности r_n такая, что последовательности $a_{R_n}(x)$ и $b_{R_n}(x)$ будут сходящимися на полуоси $[0,\infty)$. Обозначим

$$\nu_1(x) = \lim_{n\to\infty} a_{R_n}(x), \quad \nu_2(x) = \lim_{n\to\infty} b_{R_n}(x).$$

Далее из равенств (12), (13) следует

$$\frac{\Phi(R_n x)}{\Phi(R_n)} = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_{-1}(R_n x u)}{R_n \Phi(R_n)} \frac{du}{(1+u)^{m+2}}, \tag{18}$$

$$\frac{\Psi(R_n x)}{\Phi(R_n)} = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\psi_{-1}(R_n x u)}{R_n \Phi(R_n)} \frac{du}{(1+u)^{m+2}}. \tag{19}$$

Из (17) следует, что к интегралам в правых частях (18) и (19) применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости. В частности, эти интегралы имеют пределы. Тогда и левые части равенств (18) и (19) имеют пределы, скажем $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$. Переходя к пределу в равенствах (18) и (19), получим

$$\mu_1(x) = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\nu_1(xu)}{(1+u)^{m+2}} du,$$

$$\mu_2(x) = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\nu_2(xu)}{(1+u)^{m+2}} du.$$

Из леммы 1 можно вывести, что $\mu_1(x) > 0$ при $x > 0$. Тогда из условия 3) теоремы следует, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$. Это дает

$$\int\limits_0^\infty \frac{\nu(t)dt}{(t+x)^{m+2}} = 0, \quad x \in (0,\infty), \quad \nu(t) = \nu_1(t) - \nu_2(t).$$

Заметим, что

$$|\nu(t)| \le M \max(1, t^{\alpha+1}).$$

Из этого следует, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\nu(t)dt}{(t+z)^{m+2}},$$

где ветвь функции $(t+z)^{m+2}$ определяется условием $\arg(t+z)=0$ при $z>0$, определяет голоморфную функцию $N(z)$ в области $D=C\setminus(-\infty,0]$. Так как $N(z)=0$ при $z>0$, то $N(z)=0$ в области D. По теореме Фубини равенство $N(z)=0$ при $\Re z>0$ можно записать в виде

$$\int\limits_0^\infty \left(y^{m+1}\int\limits_0^\infty \nu(t)e^{-yt}dt \right) e^{-yz}\,dy=0.$$

Обозначим

$$g(y)=y^{m+1}\int\limits_0^\infty \nu(t)e^{-ty}dt.$$

Находим

$$|g(y)|\le My^{m+1}\left(\int\limits_0^1 e^{-ty}dt+\int\limits_1^\infty t^{\alpha+1}e^{-ty}dt\right)$$
$$\le My^{m+1}\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+2)}{y^{\alpha+2}}\right).$$

Отсюда следует, что функция

$$g_1(y)=\begin{cases} e^{-y}g(y), & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

принадлежит $L_1(-\infty,\infty)$. Равенство $N(1+i\tau)=0$ при $\tau\in(-\infty,\infty)$ можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^\infty g_1(y)e^{-i\tau y}\,dy=0.$$

По теореме единственности для преобразования Фурье в пространстве L_1 получаем, что $g_1(y)$ есть нулевой элемент этого пространства. Вместе с непрерывностью функции $g(y)$ на полуоси $(0,\infty)$ это дает

$$\int\limits_0^\infty \nu(t)e^{-ty}dt=0,\quad y>0.$$

Повторяя рассуждения, связанные с выходом в комплексную плоскость, или прямо применяя теорему единственности для преобразования Лапласа, получим, что $\nu_1(t)=\nu_2(t)$ почти всюду на полуоси $(0,\infty)$. Функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$ возрастающие, при этом одна из них непрерывна. Поэтому $\nu_1(x)=\nu_2(x)$ при $x>0$. В частности, $\nu_1(1)=\nu_2(1)$. Кроме того, из неравенства (16) и условия $\alpha(\varphi)<m$ и аналогичного неравенства для функции ψ_{-1} и условия $\alpha(\psi)<m$ следует, что хотя бы одна из величин $\nu_1(1)$, $\nu_2(1)$ строго положительна. Поэтому $\nu_1(1)=\nu_2(1)>0$. Отсюда следует, что $s=1$, а из этого, в свою очередь, следует утверждение леммы. Лемма доказана.

В следующих двух утверждениях указаны условия, при которых неравенства между интегралами от функций переносятся, в определенном смысле, на неравенства между функциями. Эти утверждения можно рассматривать как варианты обращения правила Лопиталя.

Лемма 4. *Пусть φ, ψ – положительные локально интегрируемые функции на полуоси $[0,\infty)$, причём функция φ не обращается тождественно в ноль ни в какой окрестности бесконечности, $\beta(\varphi)>-1$, $\alpha(\varphi)<\infty$, $\beta(\psi)>-\infty$. Тогда из неравенства*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^r\psi(t)dt}{\int\limits_0^r\varphi(t)dt}<\infty$$

следует неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\psi(r)}{\varphi(r)}<\infty.$$

Доказательство. Пусть $\beta_1\in(-1,\beta(\varphi))$, $\alpha_1>\alpha(\varphi)$, $\beta_2<\beta(\psi)$. Существуют числа $R>0$, M такие, что при $r\geq R$, $u\geq 1$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned}
&\varphi(ur)\leq Mu^{\alpha_1}\varphi(r),\\
&\varphi(ur)\geq Mu^{\beta_1}\varphi(r),\\
&\psi(ur)\geq Mu^{\beta_2}\psi(r).
\end{aligned}\tag{20}$$

Кроме того, можно считать, что $\varphi(R) \neq 0$ и что при $r \geq R$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^r \psi(t)dt \leq M \int\limits_0^r \varphi(t)dt.$$

Из неравенства (20) следуют неравенства

$$\begin{gathered}\varphi(v) \geq M\frac{\varphi(R)}{R^{\beta_1}}v^{\beta_1}, \quad v \geq R,\\ \varphi(ur) \leq Mu^{\beta_1}\varphi(r), \quad u \in (0,1], \quad ur \geq R. \end{gathered} \tag{21}$$

Далее оцениваем

$$\int\limits_{\frac{r}{2}}^r \psi(t)dt = \frac{r}{2}\int\limits_1^2 \psi\left(\frac{r}{2}u\right)du \geq M\frac{r}{2}\psi\left(\frac{r}{2}\right)\int\limits_1^2 u^{\beta_2}du.$$

Отсюда следует

$$\frac{r}{2}\psi\left(\frac{r}{2}\right) \leq M\int\limits_{\frac{r}{2}}^r \psi(t)dt \leq M\int\limits_0^r \psi(t)dt \leq M\int\limits_0^r \varphi(t)dt$$

$$= M\left(\int\limits_0^R \varphi(t)dt + r\int\limits_{\frac{R}{r}}^1 \varphi(ur)du\right) \leq M\left(\int\limits_0^R \varphi(t)dt\right.$$

$$\left.+Mr\varphi(r)\int\limits_0^1 u^{\beta_1}du\right) \leq M\left(\frac{\int\limits_0^R \varphi(t)dt}{r\varphi(r)} + \frac{M}{\beta_1+1}\right)\frac{r}{2}\varphi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Из этого и неравенства (21) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть φ, ψ – положительные локально интегрируемые, не равные тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности функции на полуоси $[0,\infty)$, причём $\beta(\varphi) > -1$, $\beta(\psi) >$*

-1, $\alpha(\varphi) < \infty$, $\alpha(\psi) < \infty$. *Тогда из неравенств*

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{\int\limits_0^r \psi(t)dt}{\int\limits_0^r \varphi(t)dt} \le \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\int\limits_0^r \psi(t)dt}{\int\limits_0^r \varphi(t)dt} < \infty$$

следуют неравенства

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} \le \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} < \infty.$$

Теорема доказывается применением леммы 4 к парам φ и ψ, а также ψ и φ.

Далее нас интересуют условия, при выполнении которых справедлива импликация

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int\limits_0^r \psi(t)dt}{\int\limits_0^r \varphi(t)dt} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} = 1. \tag{22}$$

Заметим, что если φ и ψ возрастающие функции, причём для некоторого α выполняется неравенство

$$\varphi(tx) \le t^\alpha \varphi(x), \quad x \ge x_0(\alpha), \quad t \ge 1,$$

то справедливость указанной импликации доказал Б. И. Коренблюм [3]. Случай $\varphi(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)$ – уточненный порядок в смысле Валирона, детально разобран в [13]. Далее будет приведено несколько новых условий, обеспечивающих справедливость импликации (22). Мы начнем со следующего промежуточного результата.

Лемма 5. *Пусть φ и ψ – положительные функции на полуоси $[0, \infty)$, удовлетворяющие условиям:*

1) *функции φ и ψ не равны тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности,*
2) *выполняются неравенства $\beta(\varphi) > -1$ и $\beta(\psi) > -1$,*
3) *выполняется хотя бы одно из неравенств $\alpha(\varphi) < \infty$, $\alpha(\psi) < \infty$,*
4) $\psi_{-1}(r) \sim \varphi_{-1}(r), \quad r \to \infty.$

Тогда для любой бесконечно большой последовательности r_n существует подпоследовательность R_n такая, что для почти всех $x \in [0, \infty)$ существует предел

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(R_n x)}{\varphi(R_n x)},$$

и функция $S(x)$ равна единице почти всюду на полуоси $[0, \infty)$.

Доказательство. Будем считать, что $\alpha(\varphi) < \infty$. Тогда из условий леммы и леммы 4 следует, что найдутся числа M, $R > 1$, $\beta > -1$, $\alpha > \beta$ такие, что

$$\varphi(ur) \le M u^\beta \varphi(r), \quad u \in (0,1), \quad ur \ge R,$$

$$\psi(ur) \le M u^\beta \psi(r), \quad u \in (0,1), \quad ur \ge R,$$

$$\varphi(ur) \le M u^\alpha \varphi(r), \quad u \ge 1, \quad r \ge R,$$

$$\psi(r) \le M\varphi(r), \quad r \ge R.$$

Можно также считать, что $\varphi(r) > 0$, $\psi(r) > 0$ при $r \ge R$. Рассмотрим два семейства функций переменной x на полуоси $[0, \infty)$:

$$c_r(x) = \frac{\varphi(rx)}{\varphi(r)}, \quad r \ge R,$$

$$d_r(x) = \frac{\psi(rx)}{\varphi(r)}, \quad r \ge R.$$

Пусть A – произвольное число больше 1. Имеем

$$\int_0^A c_r(x)dx \le \frac{1}{\varphi(r)} \int_0^{\frac{R}{r}} \varphi(rx)dx + M\int_{\frac{R}{r}}^1 x^\beta dx + M\int_1^A x^\alpha dx$$

$$\le \frac{1}{r\varphi(r)} \int_0^R \varphi(t)dt + M \le M\frac{R^\beta}{\varphi(R)} \int_0^R \varphi(t)dt + M = M.$$

Напоминаем, что символом M мы обозначаем не обязательно равные постоянные. Аналогично

$$\int_0^A d_r(x)dx \le M\frac{R^\beta}{\varphi(R)} \int_0^R \psi(t)dt + M = M.$$

Точно так же, если E – произвольное измеримое множество на сегменте $[0, A]$, то

$$\int\limits_E c_r(x)dx \le M\frac{R^\beta}{\varphi(R)}\int\limits_{E\cap[0,A]}\varphi(t)dt + M\int\limits_{E\cap[0,1]}t^\beta dt + M\int\limits_{E\cap[1,A]}t^\alpha dt,$$

$$\int\limits_E d_r(x)dx \le M\frac{R^\beta}{\varphi(R)}\int\limits_{E\cap[0,A]}\psi(t)dt + M\int\limits_{E\cap[0,1]}t^\beta dt + M\int\limits_{E\cap[1,A]}t^\alpha dt.$$

Таким образом, $c_r(x)$, $d_r(x)$ – это равномерно интегрируемые, ограниченные в пространстве $L_1([0, A])$ семейства. Известно ([14, гл.4, §8, пункт 9]), что такие семейства слабо компактны в пространстве $L_1([0, A])$. Из этого следует, что из любой последовательности функций из этих семейств можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $L_1([0, A])$. Применяя диагональный процесс Кантора, получаем, что из любой последовательности функций из семейства $c_r(x)$, а также из семейства $d_r(x)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в L_1 на любом конечном сегменте полуоси $[0, \infty)$.

Далее мы рассматриваем специальную бесконечно большую последовательность r_n. В то же время для заключения справедливости леммы нужно было бы рассматривать произвольную бесконечно большую последовательность. Однако специфика последовательности никак не используется в дальнейшем доказательстве. Она используется в дальнейшем тексте статьи при доказательстве других утверждений.

Пусть теперь последовательность $r_n \to \infty$ и величина $s \in [0, \infty]$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(r_n)}{\varphi(r_n)} = s.$$

Пусть R_n такая подпоследовательность последовательности r_n, что существуют слабые пределы

$$\lim_{n\to\infty} c_{R_n}(x) = c(x), \quad \lim_{n\to\infty} d_{R_n}(x) = d(x)$$

(имеется в виду слабая сходимость в L_1 на любом конечном сегменте). Напишем теперь равенства

$$\frac{\varphi_{-1}(R_n x)}{R_n\varphi(R_n)} = x\int\limits_0^1 \frac{\varphi(R_n x u)}{\varphi(R_n)}du, \tag{23}$$

$$\frac{\psi_{-1}(R_n x)}{R_n \varphi(R_n)} = x \int_0^1 \frac{\psi(R_n x u)}{\varphi(R_n)} du. \tag{24}$$

Если перейти к переменной xu, из слабой сходимости видно, что интегралы имеют предел при каждом x. Тогда и левые части равенств (23) и (24) имеют пределы, скажем $C(x)$, $D(x)$, и справедливы равенства

$$C(x) = x \int_0^1 c(xu) du,$$

$$D(x) = x \int_0^1 d(xu) du.$$

Из условия 4) леммы можно вывести, что $C(x) = D(x)$. Это дает

$$\int_0^x c(t) dt = \int_0^x d(t) dt.$$

Поэтому $c(x) = d(x)$ почти всюду на $[0, \infty)$. Из неравенств $c_r(x) \geq Mx^\alpha$, при $x \in (0, 1)$, $xr \geq R$ и $c_r(x) \geq Mx^\beta$ при $x \geq 1$, $r \geq R$ следует, что $c(x) > 0$ при $x > 0$. Таким образом, функция $S(x)$ определена и равна 1 почти всюду на полуоси $[0, \infty)$. Лемма доказана.

Замечание. При доказательстве леммы 5 мы получили, что функции $c(x)$ и $d(x)$ определены не всюду, а почти всюду и что равенство $c(x) = d(x)$ выполняется также почти всюду. Если бы слабую сходимость функций c_{R_n} и d_{R_n} удалось заменить сходимостью п.в. и было бы доказано, что сходимость имеет место и в точке 1 и что выполняется равенство $c(1) = d(1)$, то из этого следовало бы, что определенное в тексте доказательства число s обязано быть равным 1 и что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} = 1. \tag{25}$$

Тем не менее, как показывает нижеследующий пример, из условий леммы 5 равенство (25) не вытекает.

Пример 1. Пусть $\alpha > 0$. Определяем функцию φ следующим образом:

$$\varphi(r) = r^{\alpha} + n(r),$$

где $n(r)$ – возрастающая функция с точками роста $r_n = 2^{n!}$, $n = 1, 2, ...$, причём $n(r) = 0$ при $r \in [0, r_1)$, $n(r) = r_k^{\alpha}$ при $r \in [r_k, r_{k+1})$, $k = 1, 2, ...$ Функцию ψ определяем следующим образом:

$$\psi(r) = r^{\alpha} + \overline{n}(r),$$

где $\overline{n}(r)$ – непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция, которая совпадает с $n(r)$ всюду, кроме интервалов $(r_k - 1, r_k)$, а на сегментах $[r_k - 1, r_k]$ является линейной. Для функций φ и ψ выполняются все условия леммы 5. Очевидно, что функция $\psi(r)/\varphi(r)$ не имеет предела при $r \to \infty$.

Укажем дополнительные условия, обеспечивающие равенство (25).

Теорема 7. *Пусть в дополнение к условиям леммы* 5 *выполняются условия*

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ \tau\to 1}} \frac{\varphi(\tau r)}{\varphi(r)} = 1, \quad \lim_{\substack{r\to\infty\\ \tau\to 1}} \frac{\psi(\tau r)}{\psi(r)} = 1. \tag{26}$$

Тогда выполняется равенство (25).

Доказательство. Обозначим

$$g(\lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)}, \quad \underline{g}(\lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)}.$$

Из условий (26) следует, что обе эти функции непрерывны в точке $\lambda = 1$. Пусть R_n – та последовательность из текста доказательства леммы 5, которая определяет функции $c(x)$ и $d(x)$. Введем функции

$$\overline{c}(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n)}, \quad \underline{c}(x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n)}.$$

Заметим, что из любой подпоследовательности $c_{R_{n_j}}$ функций из доказательства леммы 5, определяющих функцию c, можно сформировать выпуклые комбинации, сходящиеся к c п.в. на $\mathbb{R}$. Написав $\frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n)} = \frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n x_1)} c_{R_n}(x_1)$, отсюда легко вывести, что для каждого x при п.в. x_1 (исключительное множество меры 0 зависит от x) справедливы неравенства

$$\overline{c}(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n x_1)} c(x_1)$$

$$\leq g\left(\frac{x}{x_1}\right) c(x_1),$$

$$\underline{c}(x) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(R_n x)}{\varphi(R_n x_1)} c(x_1) \geq \underline{g}\left(\frac{x}{x_1}\right) c(x_1),$$

$$\overline{c}(x) - \underline{c}(x) \leq \left(g\left(\frac{x}{x_1}\right) - \underline{g}\left(\frac{x}{x_1}\right)\right) c(x_1). \tag{27}$$

Заметим, что из ограничений на функцию φ следует, что выполняются неравенства $c(x_1) \leq M{x_1}^{\beta}$ при $x_1 \in (0,1)$ и $c(x_1) \leq M{x_1}^{\alpha}$ при $x_1 > 1$. Переходя в неравенстве (27) к пределу при $x_1 \to x$, получим $\overline{c}(x) - \underline{c}(x) \leq 0$, $\underline{c}(x) = \overline{c}(x)$. Если аналогичным образом ввести функции $\overline{d}(x)$ и $\underline{d}(x)$, то получим, что $\underline{d}(x) = \overline{d}(x)$. Таким образом, в дополнение к утверждению леммы 5 мы получаем, что слабую сходимость в ней можно заменить сходимостью всюду и функции $c(x)$ и $d(x)$ определены на всей полуоси $(0,\infty)$. Из соотношений (26) вытекает, что эти функции будут непрерывными. Теперь из равенства "$c(x) = d(x)$ почти всюду" следует, что это равенство выполняется всюду. В частности, $d(1) = c(1) = 1$. Из этого, как сказано в замечании к лемме 5, вытекает равенство (25). Теорема доказана.

Заметим, что выполнение только одного из условий (26) не обеспечивает выполнения равенства (25). Приведем сооветствующий пример.

Пример 2. Пусть $\varphi(r) = r^{\alpha}$,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n, r_n + 1],$$

где r_n – последовательность из примера 1,

$$\psi(r) = r^{\alpha}\left(1 + \chi_E(r)\right),$$

где χ_E – характеристическая функция множества E.

Для функций φ и ψ выполняются все условия теоремы 7, кроме условия

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ \tau\to 1}} \frac{\psi(\tau r)}{\psi(r)} = 1.$$

Очевидно, что функция $\psi(r)/\varphi(r)$ не имеет предела при $r \to \infty$.

Если для функции φ выполняется равенство из условия (26), то будем говорить, что функция φ *мультипликативно непрерывна в бесконечности.*

В теореме 7 приведен вариант условий, гарантирующих справедливость импликации (22). Сохраняя заключение теоремы 7, одно (любое) из условий (26) можно заменить на условие возрастания. Получаются три различных варианта теоремы 7.

Комбинируя эти варианты и лемму 3, получаем варианты тауберовых теорем, типа теоремы Келдыша. Поскольку такие теоремы – основная цель работы, ниже мы приводим, по возможности, независимую от остального текста формулировку такой теоремы.

Теорема 8. *Пусть φ и ψ – положительные функции на полуоси $[0,\infty)$, удовлетворяющие условиям:*

1) *функции φ и ψ не равны тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности,*
2) *φ – мультипликативно непрерывная в бесконечности функция, причем $\beta(\varphi) > -1$,*
3) *ψ – возрастающая функция,*
4) *выполняется хотя бы одно из неравенств $\alpha(\varphi) < m$, $\alpha(\psi) < m$, где $m > -1$,*
5) *функции*

$$\Phi(r) = \int_0^\infty \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}, \Psi(r) = \int_0^\infty \frac{\psi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}$$

конечны, причём

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\varphi(r)} = 1.$$

Доказательство. Если выполняются условия теоремы, то тем самым выполняются условия леммы 3. Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^r \psi(t)dt}{\int\limits_0^r \varphi(t)dt}=1.$$

Далее, пусть $c(x)$ и $d(x)$ – это те функции, которые построены при доказательстве леммы 5. Там доказано, что $c(x) = d(x)$ почти всюду на полуоси $(0,\infty)$. В условиях теоремы можно считать, что эти функции представляются соответствующими поточечными пределами на всей полуоси $(0,\infty)$, например то, что функцию $d(x)$ можно представить таким образом, следует из теоремы Хелли. Кроме того, функция $c(x)$ является непрерывной, а функция $d(x)$ – возрастающей. Это обеспечивает равенство $c(x) = d(x)$ на полуоси $(0,\infty)$. В частности, $c(1) = d(1) = 1$. Из этого следует равенство (25). Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в теореме 8 в качестве функции φ можно взять функцию вида $\varphi(t) = t^{\nu}e^{f(\ln t)}$, $\nu < m$, где f – ограниченная равномерно непрерывная на вещественной оси функция. Заметим, что такому условию удовлетворяют непрерывные почти периодические функции.

Пример 3. Пусть $m = 2$,

$$\varphi(t)=\frac{t^2}{1+\ln^2 t},\qquad \psi(t)=\frac{t^2}{1+\ln^2 t}(1+\eta\cos\ln t).$$

Если $|\eta|$ достаточно малое число, то функция ψ будет возрастающей. В этом случае показывается, что для функций φ и ψ будут выполняться все условия теоремы 8, за исключением условия 4). Очевидно, что для таких функций φ и ψ при $\eta \neq 0$ заключение теоремы не верно.

Наконец, приведем теорему, в которой заключение леммы 3 получается при меньших ограничениях на функции φ и ψ, чем в лемме 3.

Теорема 9. *Пусть φ и ψ – положительные измеримые функции на полуоси $[0,\infty)$, удовлетворяющие условиям:*

1) *функции не равны тождественно нулю ни в какой окрестности бесконечности,*

2) *выполняется хотя бы одно из неравенств* $\alpha(\varphi) < m$, $\alpha(\psi) < m$, *где* $m > -1$,
3) *функции*

$$\Phi(r) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}, \quad \Psi(r) = \int\limits_0^\infty \frac{\psi(ur)du}{(1+u)^{m+1}}$$

конечны, причём

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Psi(r)}{\Phi(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r \psi(t)dt}{\int_0^r \varphi(t)dt} = 1.$$

Доказательство. В интегралах, определяющих функции Φ и Ψ, произведем интегрирование по частям. Мы получим

$$r\Phi(r) = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_{-1}(ur)}{(1+u)^{m+2}}, \quad r\Psi(r) = (m+1)\int\limits_0^\infty \frac{\psi_{-1}(ur)}{(1+u)^{m+2}}.$$

Применяя к функциям φ_{-1}, ψ_{-1} лемму 3, находим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_{-2}(r)}{\varphi_{-2}(r)} = 1,$$

где $f_{-2}(r) = \int_0^r f_{-1}(t)dt$. Предположим теперь, что $\alpha(\varphi) < m$. В этом случае семейство функций

$$c_r(x) = \frac{\varphi_{-1}(rx)}{\varphi_{-1}(r)}, \quad r \geq R,\ x \in [0,\infty)$$

будет равностепенно непрерывным на любом сегменте $[a,b] \subset (0,\infty)$ при соответствующем выборе числа R, которое может зависеть от a. Действительно, пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \leq x_2$. Имеем

$$c_r(x_2) - c_r(x_1) = \frac{\int_{rx_1}^{rx_2} \varphi(t)dt}{\int_0^r \varphi(t)dt}.$$

Пусть $A = \inf\{\varphi(t) : t \in [\frac{1}{2}\tilde{a}r, \tilde{a}r]\}$, где $\tilde{a} = \min(1, a)$. Справедливо неравенство

$$\int_0^r \varphi(t)dt \geq \frac{1}{2}Ar\tilde{a}.$$

Выбираем произвольным образом $\gamma > \alpha(\varphi)$. Тогда существуют величины $R = R(a)$ и M такие, что выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leq M\left(\frac{2b}{\tilde{a}}\right)^{\gamma} A, \quad t \in [ar, br], : r \geq R.$$

Из приведенных неравенств следует утверждение о равностепенной непрерывности.

Если теперь в рассуждениях из доказательства леммы 5 считать за функции φ и ψ функции φ_{-1} и ψ_{-1}, то в рассматриваемом случае можно дополнительно считать, что функции $c(x)$ и $d(x)$, полученные там, будут представляться соответствующими поточечными пределами на всей полуоси $(0, \infty)$, причем $c(x)$ будет непрерывной, а $d(x)$ – возрастающей функцией. В этом случае из равенства $c(x) = d(x)$ почти всюду следует, что это равенство выполняется на всей полуоси. В частности $d(1) = c(1) = 1$. Это доказывает теорему.

Авторы благодарят А. И. Ильинского за обсуждения и конструктивную критику, что было весомой помощью при написании статьи.

Литература

1. М. В. Келдыш, *Об одной тауберовой теореме.* — Труды МИАН СССР **38** (1951), 77–86.
2. М. В. Келдыш, *Избранные труды.* Математика. Наука, М. (1985).
3. Б. И. Коренблюм, *Общая тауберова теорема для отношения функций.* — ДАН СССР **88**, No. 5 (1953), 745-748.
4. Б. И. Коренблюм, *Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций.* — Труды ММО **7** (1958), 121–148.
5. В. И. Мацаев, Ю. А. Палант, *О распределении спектра полиномиального операторного пучка.* — ДАН Арм. ССР **42**, No. 5 (1966), 836–845.
6. N. H. Bingham, C. H. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambrige university press. Cambrige, London, New York, New Roshelle, Melburn, Sydney, (1987).
7. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* Наука, М. (1974).
8. U. Stadtmüller, R. Trauntner, *Tauberian theorems for Laplas transforms.* — J. für die reine und angewandte Mathematik **310** (1979), 283-290.

9. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*. Наука, М. (1986).
10. М. В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных операторов*. — ДАН СССР **77**, No. 1 (1951), 11–14.
11. А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений*, Наука, М. (1985).
12. D. Drasin, D. F. Shea, *Polya peaks and the oscillation of positive functions*. Proceedings of AMS, **34** (1972), 403–411.
13. А. Ф. Гришин, *Простейшая тауберова теорема*. — Матем. заметки **74** (2003), вып. 2, 221–229.
14. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, ИЛ., М., (1962).

Grishin A. F., Poedintseva I. V. Towards the Tauberian theorem of Keldysh.

New versions of the Tauberian theorem of Keldysh are proved. We give examples to show the sharpness of the conditions of these theorems. Among auxiliary results, new cases of inversion of the de l'Hospital rule are obtained.

Поступило 20 мая 2004 г.

Харьковский
национальный университет
им. В. Н. Каразина

E-mail: grishin@univer.kharkov.ua.

Харьковский
национальный университет
им. В. Н. Каразина

E-mail: Irina. V.Poedintseva@univer.kharkov.ua