Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 312, 2004 г.

А. М. Вершик

МЕТРИКА КАНТОРОВИЧА: НАЧАЛЬНАЯ ИСТОРИЯ И МАЛОИЗВЕСТНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Введение: о первых работах по транспортной задаче

Жемчужиной в богатейшем научном наследии Л. В. Канторовича я бы назвал исследования по транспортной задаче. Красота и естественность постановки вопроса, фундаментальность основной теоремы (критерия оптимальности) и, наконец, богатство приложений (часть них реализована, но обнаруживаются все новые, в областях, открывающихся только сейчас) — все это позволяет отнести эти работы к классике математики 20-го века. Те же слова, несомненно, можно отнести и ко всему циклу работ по линейному программированию (из которого нельзя вырвать транспортную задачу), ставшему исходным пунктом для дальнейших исследований по математической экономике, но здесь мы остановимся только на замечательной роли того, что позже стали называть "задачей Монжа–Канторовича" и "транспортной метрикой"[1]. В этом введении мы не имеем в виду дать обзор по этой огромной теме, но назовем лишь самые первые постановочные работы Л.В. и его соавторов.

По-видимому, формулировка транспортной задачи появилась у Л.В. вскоре после определения общей модели задачи производственного планирования, т.е. в конце 30-х гг. (брошюра [1]).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 02-01-00093, и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2251.2003.1.

[1]У этой метрики не меньше десятка названий, поскольку она многократно переоткрывалась и переоткрывается до сих пор. Неоднократно на протяжении многих лет мне приходилось объяснять, что многие метрики, применяемые в теории меры, в эргодической теории, в функциональном анализе, в статистике и т.д., введенные в 50–80-х гг., – частные случаи общего определения транспортной метрики Канторовича. С тех пор написано много статей и книг (см., например, [28]), но, может быть, только сейчас (2004) стоит говорить о том, что известность основных фактов, открытых Л.В. и его соавторами, соответствует их значимости.

Однако, если датировать по первой публикации, то надо считать датой ее рождения 1942 год, когда вышла ставшая позже знаменитой заметка [2]. Сам по себе год выхода предопределял долгий путь, который предстояло пройти этой работе прежде чем стать известной специалистам. В ней четко сформулирована общая непрерывная транспортная задача на метрическом компакте, двойственная к ней задача и критерий оптимальности. Позже в небольшой заметке в "Успехах" [3] будет указана связь с задачей Монжа о засыпке рвов насыпями, т.е. с транспортной задачей на эвклидовой плоскости. С тех пор и общую задачу Канторовича иногда называют задачей Монжа–Канторовича (сокращенно – *МК-задачей*). Следующая работа [4], совместная с учеником Л.В., М. К. Гавуриным, была адресована уже скорее прикладникам и экономистам; в ней был развит метод потенциала (вариант метода разрешающих множителей, предложенного Л.В. в 1939 г.) для решения конечномерной транспортной задачи. Написанная задолго до публикации, она вышла только в 1949 г., и такая задержка связана не с условиями военного времени, а с условиями тогдашней советской практики, когда любая научная работа, хоть сколько-нибудь затрагивающая экономическую (не говоря уже о социально-экономической) проблематику, должна была проходить длительное и бессмысленное цензурирование; к тому же публикация была не в журнале, а в труднодоступном специальном сборнике.

До 1956 года, т.е. за 18 лет существования новой экономико-математической теории, Л.В. и его соавторами было опубликовано менее 10 печатных работ по этой тематике — я помню, как Г. Ш. Рубинштейн по моей просьбе осенью 1956 года написал полный список этих работ. И это, конечно, не потому, что не были написаны тексты на эти темы. Л.В. подготовил уже целую книгу по экономике, судьба которой является точной и мрачной иллюстрацией отношения системы к научным трудам, которые не укладываются в обязательные жесткие и потому бесплодные схемы. Книга в обновленном варианте была опубликована только почти через двадцать лет ([5]).

В 1955–56 гг. Л.В. решил "открыть" эту тематику; он начал делать публичные и специальные научные доклады, пропагандировать свою теорию. Момент для этого был выбран относительно удачный. Однако до широкого распространения и признания этих работ было еще очень далеко. Обо всем этом можно прочитать в книге [16] (в частности, в моей статье [17]), но подробная история всей этой эпопеи еще не написана.

Вернемся к транспортной задаче. Третьей важнейшей работой на эту тему была статья Л.В. и его ученика-соавтора Г. Ш. Рубинштейна [6]. Именно в ней была четко определена норма в пространстве мер, связанная с транспортной метрикой. Главное наблюдение состояло в том, что пространство, сопряженное пространству мер с этой нормой, есть пространство липшицевых функций, а критерий оптимальности есть просто двойственное определение нормы как супремума по сфере сопряженного пространства. До этой работы не было известно, является ли пространство липшицевых функций сопряженным к какому-либо банахову пространству. В то время (1956–57 гг.) я поддерживал тесный контакт с Л.В. и Г. Ш. Рубинштейном по поводу математико-экономической проблематики, и Г.Ш. подробно рассказывал мне об этапах их работы; в частности, он сказал, что Л.В. очень удовлетворен такой трактовкой транспортной задачи. После этой работы метрику стали часто называть метрикой Канторовича–Рубинштейна.

Здесь уместно сделать два замечания. Разумеется, идея двойственности содержалась с самого начала как в брошюре 1939 г. (метод разрешающих множителей), так и в заметке Л.В. в “Докладах” [7] — первой работе, в которой осмысливались связи функционального анализа и неклассических линейных экстремальных задач (вычисление норм и экстремумов); нелишне сказать, что это был еще один пример пользы функционального анализа для приложений; см. работу [8], посвященную применениям линейного программирования к вычислительной математике, и классическую работу Л.В. по методу Ньютона [9]. С другой стороны, прием, состоящий в объявлении целевой функции нормой в пространстве правых частей экстремальной задачи, а это и было сделано в [6], может быть с успехом применен ко многим экстремальным задачам (см., например, [10, 14]). Уже не раз отмечалось, что оба классика математической экономики 20-го века – фон Нейман и Канторович – вышли из функционального анализа.

Нельзя не сказать еще и о том, что с течением времени, по мере освоения теории неклассических экстремальных задач, стали очевидными и другие связи — с теорией линейных неравенств и теорией отделимости, чебышевскими приближениями и крейновской L-проблемой моментов, работами Г. Вейля о выпуклых многогранниках и выпуклой геометрией в целом, теорией поляр по Бурбаки и комбинаторикой и др.[2] Сегодня мы бы добавили к этому списку "тропическую" математику, или макс-плюс алгебру.

2. Основные определения

Транспортная задача по своей постановке и методам решения всегда занимала несколько особое положение среди задач линейного программирования. Далее я хочу рассказать о нескольких малоизвестных применениях транспортной метрики, но сначала напомним формулировку транспортной задачи.

Определение 1. *Пусть (X, r) – компактное метрическое пространство и μ_1, μ_2 – две вероятностные борелевские меры на X. Рассмотрим вариационную задачу Монжа–Канторовича (коротко – МК-задачу): определим*

$$k_r(\mu_1, \mu_2) = \inf_L \int r(x_1, x_2)\, dL, \tag{1}$$

где L пробегает все борелевские меры на произведении $X \times X$, маргинальные меры которых совпадают с мерами μ_1 и μ_2.

Величина $k_r(\mu_1, \mu_2)$ задает метрику на симплексе $V(X)$ вероятностных мер на компакте X, которая называется метрикой Канторовича *(или* транспортной метрикой*)* ([2]).

Замечание. Мера L – это "план перевозок масс μ_1 в массы μ_2", интеграл означает цену данного плана, а инфимум (метрика Канторовича) реализуется на оптимальном плане.

Теорема 1 (Канторович–Рубинштейн [6]). 1) *На векторном пространстве $V_0(X)$ всех борелевских мер ν с нулевым зарядом и конечной вариацией (т.е. таких, что положительная, ν^+, и отри-*

---

[2] Курс "Экстремальные задачи", который я читал на протяжении многих лет на мат-мехе ЛГУ, составлялся мной с учетом всех этих связей; фактически в нем синтезирован функциональный анализ с теорией экстремальных задач. Готовившийся на его основе учебник не был закончен, но часть материала курса вошла в учебник, написанный моим учеником А. И. Барвинком [15].

цательная, ν_-, части меры ν имеют одинаковую конечную вариацию) определим норму Канторовича–Рубинштейна $||\nu||_k$ элемента $\nu \in V_0(X)$ как расстояние Канторовича между положительной и отрицательной частями меры ν:

$$||\nu||_k = k_r(\nu_+, \nu_-).$$

Тогда пространство липшицевых (с точностью до аддитивной константы) функций с липшицевой нормой является сопряженным нормированным пространством к пространству $V_0(X)$ с нормой $||.||_k$.

2) *План L в формуле (1) оптимален тогда и только тогда, когда существует липшицева функция U с липшицевой константой 1, т.е. функция, удовлетворяющая условию $|U(x) - U(y)| \leqslant r(x,y)$, такая, что*

$$U(x) - U(y) = r(x,y)$$

почти наверное относительно плана L.

Мы будем опускать индекс r в обозначении k_r, если метрика r фиксирована, а также индекс k в обозначении $||.||_k$.

Замечание 1. Метрика Канторовича индуцирует слабую топологию на симплексе вероятностных мер на компакте ([6]).

Замечание 2. В контексте решения конечномерной транспортной задачи оптимальная липшицева функция U есть не что иное, как потенциал Канторовича–Гавурина из работы [4].

Имеется огромное количество трудных задач, связанных с явным вычислением метрики Канторовича для различных компактов. Для $\mathbb{R}^2$ это классическая задача Монжа о перевозке песка. Для $\mathbb{R}^1$ есть хороший ответ: пусть ν_1, ν_2 – две вероятностные меры на $[0,1]$ и r – обычная (эвклидова) метрика; тогда $k_r(\nu_1,\nu_2) = \int_0^1 |\nu_1([0,t]) - \nu_2([0,t])|\,dt$, т.е. метрика Канторовича есть L^1-метрика для функций распределения. Никаких явных формул для $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, по-видимому, нет. Этой задаче посвящено много работ; мы упомянем только недавние обзоры [18, 20].

Но имеет смысл указать одну важную идею, которая появилась недавно и играет очень существенную роль в современных приложениях к гидродинамике и другим вопросам (см. [21]); я имею в виду *p-нормы Канторовича* (см. [19]). А именно, исходное определение метрики (и нормы) Канторовича похоже на определение L^1-нормы, но мы можем определить и аналог L_p-нормы:

$$k_p(\nu_1, \nu_2) = \inf_L \left[\int r(x_1, x_2)^p \, dL \right]^{1/p},$$

где инфимум, как и раньше, берется по всем транспортным планам L для пары вероятностных мер (ν_1, ν_2), и соответствующую норму

$$||\nu||_p = k_p(\nu_+, \nu_-)$$

для всех $p \geq 1$. Конечно, исходная метрика Канторовича (случай $p = 1$) имеет больший физический смысл, но случай $p = 2$ гораздо более удобен в техническом и геометрическом смысле. Соответствующая вариационная задача и уравнение Эйлера проще, чем в случае $p = 1$, и результаты работы [19] показывают, что для некоторой геометрической транспортной задачи уравнение Эйлера есть хорошо известное уравнение Монжа–Ампера (которое *а приори* не имеет ничего общего с задачей Монжа–Канторовича).

Упомянем еще один важный частный случай, который иногда также называют МК-задачей; мы будем называть его *сильной МК-задачей* (см. исходные обозначения): *найти*

$$\bar{k}(\mu_1, \mu_2) \equiv \inf_T \int r(x, Tx) \, d\mu_1(x), \tag{2}$$

где инфимум берется по всем измеримым отображениям T, таким, что $T\mu_1 = \mu_2$.

Вопрос о существовании минимума в (2) очень деликатен. Разумеется, $\bar{k}(\mu_1, \mu_2) \geq k(\mu_1, \mu_2)$, и вопрос о том, когда достигается равенство, труден и очень важен. В последнем параграфе мы предложим новый подход к обеим задачам.

Среди огромного количества приложений метрики Канторовича я хотел бы упомянуть только три примера, которые мало известны специалистам по применению этой метрики, но в то же время очень важны в теории динамических систем и функциональном анализе.

3. Итерированная метрика Канторовича и башня мер

Мы начнем с понятия башни мер, которое было определено в [11] и более подробно рассмотрено в [12, 13]. Пусть (X, r) –

произвольный метрический компакт (скажем, единичный отрезок с эвклидовой метрикой). Мы можем рассмотреть новый компакт $V(X)$, который есть компакт всех вероятностных борелевских мер на X, и снабдить его метрикой Канторовича. Таким образом, мы определили функтор F из категории метрических пространств в себя: $F : X \mapsto V(X)$, $r \mapsto k_r$; ясно, что F переводит каждый гомеоморфизм компакта X_1 в компакт X_2 в гомеоморфизм компакта $V(X_1)$ в компакт $V(X_2)$.

Очевидно, что пространство (X, r) изометрически вкладывается в $(V(X), k_r)$ при помощи отображения $x \mapsto \delta_x$.

Будем итерировать эту процедуру:

$$(X, r) \longrightarrow (V(X), k_r) \longrightarrow (V(V(X)), k_{k_r}) \longrightarrow \ldots.$$

Положим $V^n = V(V^{n-1}(X))$ и $k_r^n = k_{k_r^{n-1}}$ и введем обозначение F_n для отображения $(V^{n-1}, k_r^{n-1}) \mapsto (V^n, k_r^n)$.

Можно рассмотреть *индуктивный предел* этой последовательности метрических пространств с изометрическими вложениями:

$$(V^\infty, k_r^\infty) \equiv \operatorname{ind}\lim_n((V^n, k_r^n), F_n).$$

Этот индуктивный предел (метрическое пространство) называется *бесконечной башней мер*; он играет ключевую роль в теории фильтраций сигма-алгебр, порожденных случайными процессами, и ее разнообразных приложениях.

С другой стороны, при $n \geqslant 2$ имеется естественная проекция

$$P_n : V^n \longrightarrow V^{n-1}, \qquad P_n(\mu) = \bar{\mu},$$

где $\bar{\mu}$ обозначает барицентр меры μ, который корректно определен для мер на аффинных компактах (так что проекция определена для V^n, $n \geq 2$), и мы имеем последовательность

$$(V^1(X), k_r) \longleftarrow (V^2(X), k_r^2) \longleftarrow \ldots.$$

Таким образом, определен *проективный предел*

$$\overline{V}^\infty \equiv \operatorname{proj}\lim_n(V^n(X), P_n).$$

Поскольку имеет место соотношение $P_n F_n = \mathrm{Id}_{n-1}$, индуктивный предел V^∞ естественно вкладывается в проективный предел:

$$V^\infty \subset \overline{V}^\infty;$$

однако в отличие от индуктивного предела на проективном пределе нет естественной метрики.[3]

Основное приложение этой башни мер заключается в следующем. Пусть имеется "метрическая тройка" (X, r, μ), т.е. пространство с мерой, снабженное метрикой или полуметрикой, и убывающая последовательность измеримых разбиений этого пространства (дискретная фильтрация) $\{\xi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$; здесь ξ_0 тривиально и $\xi_n > \xi_{n+1}$.

Сначала рассмотрим одно разбиение ξ; для почти всех точек $a \in X/\xi$ фактор-пространства по этому разбиению корректно определена условная мера на элементе разбиения ξ, соответствующем точке a. Будем рассматривать ее как меру на (X, r); таким образом, мы имеем отображение $f_\xi : X/\xi \to V(X, r)$, которое сопоставляет почти всем точкам $a \in X/\xi$ (условную) меру на (X, r). Удобно рассматривать это отображение как функцию из (X, μ) в $V(X)$.

Теперь зададим метрику (или полуметрику) на X/ξ следующим образом: для почти всех пар точек $a, b \in X/\xi$ определим расстояние между ними как расстояние Канторовича между соответствующими условными мерами. Таким образом, мы определили метрику (или полуметрику) на подмножестве полной меры в фактор-пространстве X/ξ; ее также можно рассматривать как полуметрику в исходном пространстве (X, μ).

Применим этот процесс к убывающей последовательности разбиений $\{\xi_n\}$: начнем с разбиения ξ_1, затем определим метрику на X/ξ_1, отображение $f_1 : X \to V(X, r)$ и разбиение ξ_2/ξ_1; теперь мы имеем отображение из X/ξ_2 в $V^2(X)$, новую метрику на X/ξ_2 и отображение $f_2 :\to V^2(X, r)$.

Продолжая этот процесс, мы получаем отображения f_n из (X, μ) в итерированные пространства $V^n(X, r)$ или в индуктивный предел (V^∞, k_r^∞).

Одним из основных результатов теории убывающих последовательностей ([11, 12]) является следующая теорема.

Теорема 2. *Убывающая однородная последовательность измеримых разбиений* стандартна *(см. определения в* [11, 12]*) тогда и*

[3] Индуктивные системы, в которых есть проекции, являющиеся правыми обратными к вложениям, можно назвать *индо-проективными системами*; они встречаются довольно часто.

только тогда, когда последовательность мер $f_n * \mu$ (иными словами, последовательность распределений отображений f_n относительно меры μ), рассматриваемая как последовательность мер на индуктивном пределе $(V^\infty, {k_r}^\infty)$, стремится к δ-мере.

Обсуждение этой тематики см. в [12] и последующих статьях.

4. Метрика Канторовича в теории Орнстейна

В начале 70-х гг. Дональд Орнстейн решил давно стоявшую в эргодической теории проблему – он дал необходимые и достаточные условия на стационарный случайный процесс с дискретным временем, при которых сдвиг в пространстве траекторий этого процесса изоморфен сдвигу Бернулли, и, используя этот результат, доказал, что колмогоровская энтропия является полным инвариантом сдвигов Бернулли ([24]). Мы сформулируем основную теорему, чтобы проиллюстрировать роль метрики Канторовича, которая была переоткрыта Д. Орнстейном (он называл ее $\bar{d}$-метрикой).

Пусть пространство состояний S стационарного процесса конечно и μ – стационарная мера в $S^{\mathbb{Z}}$, порожденная этим процессом. Вопрос состоит в следующем: когда существует изоморфизм (в смысле теории меры) пространства Бернулли ${S'}^{\mathbb{Z}}$ с продакт-мерой и пространства $(S^{\mathbb{Z}}, \mu)$, коммутирующий со сдвигом? Это хорошо известная проблема изоморфизма в эргодической теории. Ясно, что критерий существования изоморфизма должен выражаться в терминах скорости убывания корреляции между прошлым и будущим процесса. Известно много условий подобного рода, которые иногда называются “условиями перемешивания”. Большинство из таких условий, рассматривавшихся в теории стационарных процессов, слишком сильны (условия Колмогорова, Розенблатта, Ибрагимова и др.). Оказалось, что нужное понятие связано с метрикой Канторовича на пространстве слов с метрикой Хэмминга, – это было открыто Д. Орнстейном. Наша интерпретация слегка отличается от оригинальной, но она ближе к предыдущему контексту (см. [29]).

Пусть $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, – стационарный случайный процесс с конечным пространством состояний S и μ – мера на $S^{\mathbb{Z}}$, инвариантная относительно сдвига. Определим пространство “прошлого” процесса: $\mathrm{Past} = \prod_{-\infty}^{0} S$; проекцию меры μ на Past будем обозначать через μ^-. Зафиксируем точку $x^- = (x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots) \in \mathrm{Past}$ и рассмотрим условное распределение на фрагментах будущего длины n при фиксированном прошлом x^-:

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n | x^-);$$

это мера на пространстве S^n фрагментов будущего длины n, которая определена для почти всех точек $x^- \in \mathrm{Past}$; эта мера является элементом $V(S^n)$, поэтому почти всюду определено отображение $F_n : \mathrm{Past} \to V(S^n)$.

Рассмотрим метрику Хэмминга на S^n:

$$h_n(x, y) = \frac{1}{n} \#\{i \in (1, \ldots, n) : x_i \neq y_i\},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in S^n$, а $\#$ обозначает число элементов множества, и пусть k_{h_n} – метрика Канторовича на пространстве мер $V(S^n, h_n)$ на фрагментах будущего длины n.

Теорема 3 ([24, 25]). *Рассмотрим стационарный процесс $\{\xi_n\}, n \in \mathbb{Z}$, и порожденный им правый сдвиг в пространстве реализаций. Обратимое кодирование этого сдвига в сдвиг Бернулли (иными словами, сохраняющий меру изоморфизм сдвига в пространстве реализаций процесса и сдвига Бернулли) существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \int \int_{x^-\in \mathrm{Past},\, y^- \in \mathrm{Past}} k_{h_n}(P(*|x^-), P(*|y^-))\, d\mu^-(x^-)\, d\mu^-(y^-) = 0$$

(интеграл берется от значения метрики Канторовича для пары условных мер, соответствующих парам точек из $\mathrm{Past} \times \mathrm{Past}$*, по продакт-мере $\mu^- \times \mu^-$).*

Буквальный смысл приведенного условия очень прозрачен: оно означает, что условное распределение на будущем при фиксированном прошлом асимптотически не зависит от прошлого; грубо говоря, есть только один тип распределения на будущем. Однако более точный смысл этих слов существенно зависит от выбора метрики на пространстве реализаций процесса (следует выбирать метрику Хэмминга) и метрики на пространствах мер (здесь нужно использовать метрику Канторовича); заключение теоремы окажется, вообще говоря, ложным, если заменить метрику Канторовича какой-нибудь другой (например, вариационной метрикой).

Последняя формулировка также мотивирует определение так называемой *вторичной энтропии* стационарного процесса (см. [25]). Определим M_n^+ как образ меры μ^- (см. выше) под действием отображения $F_n : \mathrm{Past} \to V(S^n, h_n)$; это мера на пространстве $V(S^n, h_n)$. В случае автоморфизмов Бернулли по теореме Орнстейна мера M_n^+ стремится к δ-мере при $n \to \infty$. Но для общего колмогоровского стационарного процесса (К-автоморфизма) это не так. Точнее, если автоморфизм не является автоморфизмом Бернулли, то предел существует, но не является δ-мерой. Поэтому естественно ввести характеристику предельной меры. А именно, мы можем рассмотреть так называемую ε-энтропию меры M_n^+. Это понятие также использует метрику Канторовича. Для произвольной вероятностной борелевской меры ν в метрическом пространстве (X, d) *ε-энтропия* $h_\varepsilon(\nu)$ (как функция ε) определяется следующим образом:

$$h_\varepsilon(\nu) = \inf\{H(l) : k_d(l, \nu) < \varepsilon\},$$

где инфимум берется по всем дискретным мерам l на (X, d) и $H(l)$ есть обычная энтропия дискретной меры: $H(l) = -\sum l_i \ln l_i$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\sum_i l_i = 1$, $l_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Асимптотика величины $h_\varepsilon(M_n^+)$ по n называется *вторичной энтропией* процесса. Открытый вопрос состоит в том, какой тип может иметь эта асимптотика. Предположительно, вторичная энтропия является метрическим инвариантом К-автоморфизмов.

5. Приложение к классификации метрических пространств

Рассмотрим польское (= метрическое, полное, сепарабельное) пространство с вероятностной борелевской мерой. Мы называем такое пространство *метрической тройкой* (другое название – mm-пространство ([22])). Две тройки (X, ρ, μ) и (X', ρ', μ') изоморфны, если существует отображение $T : X \to X'$, которое является изометрией и сохраняет меры: $\rho'(Tx, Ty) = \rho(x, y)$ и $T\mu = \mu'$.

Мы рассматриваем метрику как измеримую функцию двух переменных

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(Приведенная ниже теорема верна для произвольной симметричной измеримой функции ρ, не только для метрики.)

Пусть X^∞ – произведение бесконечного числа копий пространства X. Определим отображение

$$F : X^\infty \longrightarrow M_\infty(\mathbb{R})$$

пространства X^∞ в множество симметричных матриц следующим образом: $F(x) = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$, где $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $r_{i,j} = \rho(x_i, x_j)$.

Обозначим через D_ρ образ меры μ^∞ под действием отображения F; меру D_ρ на $M_\infty(\mathbb{R})$ будем называть *матричным распределением* функции ρ.

В работе [23] мы рассмотрели и классифицировали общие (несимметричные) измеримые функции $f(x, y)$ двух переменных на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$ с точностью до отображений вида $T_1 \times T_2$, где T_1, T_2 – сохраняющие меру автоморфизмы пространства (X, μ). Мы также определили для этого случая матричное распределение, которое является полным инвариантом для так называемых чистых функций. Но теперь нам нужна другая классификация. Мы также рассматриваем произвольные измеримые (несимметричные) функции f на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$, где (X, μ) – пространство Лебега с непрерывной мерой; но классифицируем их с точностью до отображений вида $T \times T$, где T – автоморфизм пространства (X, μ) (иными словами, $T_1 = T_2$). А именно, определим отображение

$$F_f : X^\infty \longrightarrow M_\infty(\mathbb{R}),$$

где $F_f(x) = \{f(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^\infty$ и $x = (x_1, x_2, \dots) \in X^\infty$; здесь $M_\infty(\mathbb{R})$ – множество произвольных (вообще говоря, несимметричных) матриц. Мы называем образ меры μ^∞ под действием отображения F_f, который является мерой на $M_\infty(\mathbb{R})$, *симметричным матричным распределением* функции f и обозначаем его через D_f^{symm}.

Теорема 4 (Gromov [22], Вершик [23]). 1) *Две метрические тройки (X, ρ, μ) и (X', ρ', μ') изоморфны тогда и только тогда, когда их матричные распределения совпадают:*

$$D_\rho = D_{\rho'}.$$

Иными словами, матричное распределение метрики является полным инвариантом метрической тройки.

2) ([23]) *Симметричное матричное распределение* D_f^{symm} *измеримой функции* $f(\cdot,\cdot)$ *двух переменных является полным метрическим инвариантом функции, рассматриваемой с точностью до автоморфизмов вида* $T \times T$, *где* T – *автоморфизм пространства* (X, μ).

Теперь мы применим эту классификацию к МК-задачам. Пусть X – метрический компакт с метрикой ρ; мы хотим "транспортировать" вероятностную борелевскую меру μ_1 в другую вероятностную борелевскую меру μ_2. Таким образом, мы имеем две метрические тройки (X, ρ, μ_1) и (X, ρ, μ_2). Удобнее привести задачу к более симметричной форме и иметь одну метрическую тройку. Будем рассматривать только непрерывные меры; тогда можно выбрать некоторый сохряняющий меру изоморфизм $T : (X, \mu_2) \to (X, \mu_1)$. Пусть $f(x, y) = \rho(x, Ty)$, так что f – неотрицательная измеримая (вообще говоря, несимметричная) функция двух переменных – "сдвинутая метрика". Теперь мы можем рассматривать только одну меру $\mu_1 \equiv \mu$ и функцию f на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$.

В терминах сдвинутой метрики МК-задача может быть сформулирована следующим образом: *найти*

$$k \equiv \inf_L \int f(x_1, x_2)\, dL,$$

где L *пробегает все борелевские меры на произведении* $X \times X$, *у которых обе маргинальные меры совпадают с мерой* μ; таким образом, L принадлежит множеству *бистохастических мер*, или, иными словами, L есть элемент полугруппы *полиморфизмов с инвариантной непрерывной мерой* μ (см. определение в [26]). Тем самым МК-задача становится вариационной задачей на выпуклом множестве бистохастических мер (или на полугруппе полиморфизмов).

Сильная МК-задача формулируется следующим образом: *найти*

$$\bar{k} \equiv \inf_T \int f(x, Tx)\, d\mu(x),$$

где T *пробегает все сохраняющие меру* μ *преобразования пространства* (X, μ), *а* f – *функция, задаваемая формулой* $f(x, y) = \rho(x, Ty)$. В этом случае мы имеем вариационную задачу на группе сохраняющих меру преобразований.

Теперь мы можем применить определенное выше симметричное матричное распределение D_f функции f как измеримой функции (сдвинутой метрики) на пространстве $(X \times X, \mu \times \mu)$. Поскольку D_f является полным инвариантом тройки (X, f, μ), *все свойства МК-задачи (обычной и сильной) могут быть выражены в терминах* D_f как меры на пространстве матриц $M_\infty(\mathbb{R})$. Но это означает, что у нас есть *случайная матрица* с распределением D_f, которую мы можем использовать для анализа задачи. Здесь мы опишем только один пример применения такого подхода.

Пусть $r = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$ – случайная матрица с распределением D_f. Новая версия МК-задачи выглядит следующим образом. Выберем случайную матрицу r, рассмотрим при каждом n обычную конечную транспортную задачу и определим

$$k_n r \equiv \inf_l \sum_{i,j=1}^n l_{i,j} r_{i,j},$$

где $l = \{l_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ – бистохастическая матрица (т.е. $\sum_{i=1}^n l_{i,j} = \sum_{j=1}^n l_{i,j} = 1$, $l_{i,j} \ge 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$) и $r_n = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ – n-фрагмент случайной матрицы r (которая есть случайная матрица, построенная по сдвинутой метрике, как описано выше). Величина $k_n(r)$ является случайной величиной, зависящей от случайной матрицы r.

Теорема 5. *В предыдущих обозначениях*

$$\lim_{n\to\infty} k_n(r) = k$$

по мере D_f, *где* k *– решение исходной МК-задачи, т.е. последовательность случайных величин* $k_n(r)$ *сходится* по мере D_f *к решению МК-задачи.*

Естественная гипотеза: *для почти каждого выбора матрицы* $r = \{r_{i,j}\}$ *относительно меры* D_f *верно то же утверждение:*

$$D_f\{r : \lim_{n\to\infty} k_n(r) = k\} = 1,$$

что означает сходимость случайной величины $k_n(r)$ *к значению* k *с вероятностью единица относительно выбора матрицы* r *по мере* D_f.

Заметим, что мы аппроксимируем МК-задачу простейшей конечномерной задачей линейного программирования – задачей о назначениях. По теореме Биркгофа–фон Неймана ее решением является перестановка, т.е. элемент симметрической группы, или экстремальная точка выпуклого множества бистохастических матриц (так называемого венгерского многогранника). Тем не менее вопрос о том, когда сильная МК-задача имеет решение и как его аппроксимировать перестановками, значительно более труден.

Приведенные выше теорема и гипотеза типичны для приложений нашего метода к различным задачам с интегральным ядром — мы получаем вероятностную аппроксимацию функционала или вариационной задачи, используя случайный выбор значений функции. Мы вернемся к этому в других публикациях.

Литература

1. Л. В. Канторович, *Математические методы организации и планирования производства.* Изд-во ЛГУ, Л. (1939).
2. Л. В. Канторович, *О перемещении масс.* — Докл. АН СССР **37**, вып. 7–8 (1942), 227–229.
3. Л. В. Канторович, *Об одной проблеме Монжа.* — Успехи мат. наук **3**, вып. 2 (1948), 225–226.
4. М. Л. Гавурин, Л. В. Канторович, *Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков.* — В сб. "Проблемы повышения эффективности работы транспорта". Изд-во АН СССР, М., Л. (1949), сс. 110–138.
5. Л. В. Канторович, *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.* Изд-во АН СССР, М. (1960).
6. Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, *Об одном пространстве вполне аддитивных функций.* — Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия **7**, вып. 2 (1958), 52–59.
7. Л. В. Канторович, *Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем.* — Докл. АН СССР **28**, вып. 3 (1940), 212–215.
8. Л. В. Канторович, *О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений.* — Сиб. мат. журн. **3**, вып. 5 (1962), 701–709.
9. Л. В. Канторович, *Функциональный анализ и прикладная математика.* — Успехи мат. наук **3**, вып. 6 (1948), 89–185.
10. А. М. Вершик, *Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования.* — Успехи мат. наук **25**, вып. 5 (1970), 117–124.
11. А. М. Вершик, *Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения.* — Докл. АН СССР **193**, вып. 4 (1970), 748–751.
12. А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и анализ **6**, вып. 4 (1994), 1–68.

13. M. Émery, *Espaces probabilisés filtrés: de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via les idées de Tsirelson.* Séminaire BOURBAKI, 53 année, 2000–2001, no. 882, Novembre 2000. Русский перевод: М. Эмери, *Вероятностные пространства с фильтрацией: от теории Вершика к броуновскому движению через идеи Цирельсона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 236–269.

14. А. М. Вершик, М. М. Рубинов, *Общая теорема двойственности в линейном программировании.* — В сб. “Математическая экономика и функциональный анализ”. Наука, М. (1974), с. 35–55.

15. A. Barvinok. *A Course in Convexity.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2002).

16. *Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый*, т. 1. Издат. СО РАН, Новосибирск (2002).

17. А. М. Вершик, *О Л. В. Канторовиче и линейном программировании.* — В сб. “Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый”, т. 1. Изд-во СО РАН, Новосибирск (2002), сс. 130–152.

18. C. Villani, *Topics in Optimal Transportation.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2000).

19. Y. Brenier. *Extended Monge–Kantorovich theory.* — Lecture Notes in Math. **1813** (2003), 91–122.

20. W. Gangbo, R. J. McCann, *The geometry of optimal transportation.* — Acta Math. **177**, No. 2 (1966), 113–161.

21. У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова.* Фазис, М. (1998).

22. M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces.* Birkhäuser, Boston (1999).

23. А. М. Вершик, *Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы.* — Функц. анал. и прил. **36**, вып. 2 (2002), 12–28.

24. D. Ornstein, *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems.* Yale Univ. Press, New Haven–London (1974).

25. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — Успехи мат. наук **55**, вып. 4 (2000), 59–128.

26. А. М. Вершик, *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 26–61.

27. A. Vershik, *Polymorphims, Markov processes, random perturbations of K-automorphisms*, in preparation.

28. S. T. Rachev, *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models.* Wiley, Chichester (1991).

29. А. М. Вершик, *О работах Д. Орнштейна, условиях слабой зависимости и о классах стационарных процессов.* — Теор. вероятн. и примен. **21**, No. 3 (1976), 673–675.

Vershik A. M. The Kantorovich metric: initial history and little-known applications.

We remind of the history of the transportation metric (Kantorovich metric) and the Monge–Kantorovich problem. We describe several little-known applications: the first one concerns the theory of decreasing sequences of partitions (tower of measures and iterated metric), the second one concerns Ornstein's theory of Bernoulli automorphisms ($\bar{d}$-metric), and the third one is the formulation of the strong Monge–Kantorovich problem in terms of matrix distributions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 25 августа 2004 г.