Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

М. А. Сычев

МЕРЫ ЯНГА КАК ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВАРИАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

1. Введение

Меры Янга были введены Л. С. Янгом [37] с целью найти расширение Соболевских функций, в котором разрешимы невыпуклые задачи вариационного исчисления.

Хорошо известная задача

$$J(u) = \int_0^1 \{(1-\dot{u}^2)^2 + u^2\}dx \to \min,\ u(0) = u(1) = 0$$

представляет пример задачи минимизации, неразрешимой в классе Соболевских функций. В этой задаче минимизирующие последовательности сходятся к функции $u_0 = 0$, а их производные сходятся к мере с носителем в $[0,1] \times \mathbf{R}$, которая может быть рассмотрена как семейство вероятностных мер $(\nu_x)_{x\in[0,1]}$, параметризованное параметром x, с $\nu_x = (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)$ для п.в. $x \in \Omega$. Здесь и далее δ_a обозначает меру Дирака с носителем в точке a.

Возникает новый объект, состоящий из Соболевской функции u_0 и семейства вероятностных мер $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ с центрами масс в $\dot{u}_0(x)$ для п.в. $x \in [0,1]$. Таким образом Л. С. Янг получил расширение Соболевских функций, известное в настоящее время как меры Янга (точные определения приведены в §2, 6).

Заметим, что примерно в то же время Н. Н. Боголюбовым была предложена конструкция для полунепрерывной снизу оболочки интегрального функционала J:

$$\tilde{J}(u) = \inf_{u_k \rightharpoonup u} \liminf_{k\to\infty} J(u_k)$$

(здесь $\rightharpoonup$ обозначает слабую сходимость).

Это исследование частично поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант No 03-01-00162.

Можно показать, что $\tilde{J}(u)$ является нечем другим как наименьшим значением функционала J в классе мер, ассоциированных с функцией u. Аппроксимируя специальные меры Янга градиентами слабо сходящихся последовательностей, Н. Н. Боголюбов доказал в [10], что $\tilde{J}$ имеет интегральное представление с интеграндом L^c, полученным для всех x и u как овыпукление $L(x, u, \cdot)$. Заметим также, что Л. С. Янг указал свойство интеграндов, отвечающее за совпадение изначального функционала и его полунепрерывной снизу оболочки на функции, см. [38, §56; 28].

Взаимодействие мер Янга и полунепрерывных снизу оболочек интегральных функционалов до сих пор является одним из развивающихся направлений вариационного исчисления, так как все еще существуют важные нерешенные задачи в этой области. Так, открытыми являются задачи математической теории упругости, заключающиеся в описании полунепрерывных снизу оболочек функционалов с интеграндами $L : \mathbf{R}^{3\times 3} \to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+ = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$), удовлетворяющими требованиям: $L(Du) \to \infty$ при $\det Du \to +0$ и $L(Du) = \infty$ при $\det Du \leqslant 0$; а также характеризация тех из них, которые уже являются полунепрерывными снизу относительно слабой сходимости, см. [2, 3]. Особый интерес представляют интегранды $L = L(Du)$, зависящие от главных инвариантов $Du^t Du$ и удовлетворяющие оценке $L(Du) \geqslant \alpha |Du|^p + \gamma$ с $\alpha > 0$, $p > n$, также с точки зрения некоторых проблем уравнений в частных производных, см. [16, 17, 18].

Подход в контексте мер Янга имеет преимущества. Действительно, построение полунепрерывной снизу оболочки или даже проверка полунепрерывности функционалов проблематичны. Существуют примеры полунепрерывных снизу относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$ функционалов, которые тем не менее не являются полунепрерывными снизу относительно слабой сходимости в их области определения, см. [9, 19, 24]. В то же время интегральные функционалы всегда полунепрерывны снизу в классе мер Янга и, более того, меры Янга, на которых значения функционала ограничены некоторой константой, образуют компактное множество, см. §2 и см. [29]. Разумеется для применения аппарата мер Янга к задачам

$$J(u) = \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))dx \to \min \tag{1.1}$$

необходимо знать какие меры порождаются градиентами Соболевских функций. Более того, действие этих мер Янга на интегранд должны приближаться действиями Соболевских функций. Эта задача была полностью решена Д. Киндерлерером и П. Педрегалом в [20–22] для случая интеграндов с p-ростом

$$c_1|Du|^p + c_2 \leqslant L(x,u,Du) \leqslant c_3|Du|^p + c_4,\ p>1,\ c_3 \geqslant c_1 > 0. \quad (1.2)$$

Более того, стало ясно какие трудности необходимо преодолеть для применения техники мер Янга в более общих случаях. Прежде всего они связаны с необходимостью использовать более гибкий, чем традиционный, подход, который был основан на использовании техники Банаховых пространств, см. [4, 6]. Как и логично было ожидать в такой ситуации, новый подход должен был также существенно повлиять и на общую теорию мер Янга. Действительно, оказалось, что предложенная в [29] характеризация мер Янга, см. теорему 2.2, и основные свойства таких объектов, см. теоремы 2.3–6, достаточны для альтернативного построения теории мер Янга, см. [29]. Относительно дальнейшего использования аппарата мер Янга в задачах (1.1), удалось характеризовать однородные меры, порождаемые градиентами, в случае произвольных интеграндов, [30]. Как следствие появился базис для получения результатов для новых классов функционалов. Тем более насущно стало изложение самого подхода, который так и не был опубликован в журнальной форме.

В настоящей работе мы исправляем этот недостаток и излагаем соответствующие подходу результаты общей теории мер Янга в §2. В §3, 4 мы приводим доказательства утверждений сформулированных в §2. В §5 мы обсуждаем случай скалярных, $m=1$, задач (1.1) и доказываем теорему о полунепрерывных снизу оболочках в ситуации

$$c_1\theta(v) + c_2 \leqslant L(x,u,v) \leqslant c_3\theta(v) + c_4,\ c_3 \geqslant c_1 > 0, \quad (1.3)$$

где $\theta(v) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ непрерывная функция с более чем линейным ростом, т.е. $\theta(v)/|v| \to \infty$ при $|v| \to \infty$. Это несколько более общий результат, чем в [15, 12], В §6 мы обсуждаем векторный случай.

В данной работе Ω является Липшициевой областью. $B(a,\epsilon)$ обозначает шар с центром в точке a и с радиусом ϵ. $\langle L;\nu\rangle$ обозначает действие меры ν на интегранд L. l_F является аффинной функцией, градиент которой равен F.

2. Общая теория мер Янга

Напомним определение мер Янга, см. [37], стандартное в наши дни

Определение 2.1. *Семейство $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ вероятностных мер $\nu_x \in C_0(\mathbf{R}^l)'$, где Ω – ограниченное и измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$, называется мерой Янга, если существует последовательность измеримых функций $\xi_k : \Omega \to \mathbf{R}^l$ такая, что для каждого $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$*

$$\Phi(\xi_k) \rightharpoonup^* \bar{\Phi} \text{ в } L^\infty(\Omega), \text{ где } \bar{\Phi}(x) = \langle \Phi; \nu_x \rangle.$$

Мера Янга является однородной, если для всех x выполнено $\nu_x = \nu$ для некоторой вероятностной меры ν.

Напомним, что слабая* сходимость элементов множества $M_c(\mathbf{R}^l)$, являющегося множеством всех мер Радона с носителем в $\mathbf{R}^l$ и с вариацией, ограниченной c, эквивалентна сходимости в следующей метрике

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i ||\Phi_i||_C} \Big| \langle \Phi_i; \mu \rangle - \langle \Phi_i; \nu \rangle \Big|,$$

где $\{\Phi_i\} \subset C_c^\infty(\mathbf{R}^l)$ является последовательностью, задающей плотное множество элементов пространства

$$C_0(\mathbf{R}^l) = \{\Phi \in C(\mathbf{R}^l) : \lim_{v\to\infty} |\Phi(v)| = 0\}.$$

Индекс “c” в C_c^∞ означает компактность носителя.

Хорошо известно, что $(M_c(\mathbf{R}^l), \rho)$ является компактным метрическим пространством. Этот факт легко вытекает из теоремы Рисса. Для любой последовательности $\mu_n \in M_c(\mathbf{R}^l)$ существует подпоследовательность μ_{n_k} такая, что последовательность $\langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle$ сходится для каждого $i \in \mathbf{N}$. Тогда, функционал $f : C_0(\mathbf{R}^l) \to \mathbf{R}$, определенный для каждой функции Φ_i как

$$f(\Phi_i) := \lim_{k\to\infty} \langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle,$$

является линейным непрерывным функционалом, ограниченным по норме константой c. По теореме Рисса $f(\cdot) = \langle \cdot; \mu \rangle$ для некоторой $\mu \in M_c(\mathbf{R}^l)$. Тогда $\rho(\mu_{n_k}, \mu) \to 0$ при $k \to \infty$.

Метрика ρ характеризует меры Янга!

Теорема 2.2. *Семейство вероятностных мер $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является мерой Янга если и только если функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ является измеримой (здесь $c \geqslant 1$).*

Разумеется ранее уже использовались некоторые характеризации мер Янга. Следующее утверждение указывает другую удобную характеризацию из [36].

Теорема 2.3. *Пусть Ω является ограниченным измеримым подмножеством $\mathbf{R}^n$. Пусть $\nu_x \in M_c(\mathbf{R}^l)$ для п.в. $x \in \Omega$. Семейство $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ имеет измеримые действия на элементы пространства $C_0(\mathbf{R}^l)$ если и только если $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ является измеримой функцией.*

Тем не менее оказывается удачным использовать характеризацию из теоремы 2.2, так как измеримые функции $\Omega \to (M_c, \rho)$ обладают как достаточно общими абстрактными свойствами, см. теоремы 2.4, 2.5, так и позволяют использовать простые количественные оценки, см. теорему 2.6. Оказывается также возможным проверять принадлежность вероятностных мер к различным классам мер Янга, см. теорему 2.10.

Теорема 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ является измеримым множеством и пусть (K, d) является компактным метрическим пространством. Функция $\xi : \Omega \to (K, d)$ является измеримой в обычном Лебеговском смысле если и только если она имеет свойство Лузина: для каждого $\epsilon > 0$ существует компактное подмножество Ω_ϵ множества Ω такое, что $\mathrm{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leqslant \epsilon$ и функция $\xi\Big|_{\Omega_\epsilon}$ непрерывна.*

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства в случае K – подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ с евклидовой метрикой.

Пусть Ω является ограниченным измеримым подмножеством $\mathbf{R}^n$ и пусть (K, d) является компактным метрическим пространством. Отображение $V : \Omega \to 2^K$ называется замкнутым измеримым многозначным отображением, если множества $V(x) \subset K$ являются замкнутыми для п.в. $x \in \Omega$ и если для каждого замкнутого подмножества C пространства K множество $\{x \in \Omega : V(x) \cap C \neq \emptyset\}$ является измеримым.

Теорема 2.5. *Для любого замкнутого измеримого многозначного отображения $V : \Omega \to 2^K$ существует измеримый селектор, т.е. функция $\nu : \Omega \to (K, d)$ такая, что $\nu(x) \in V(x)$ для п.в. $x \in \Omega$.*

Эта теорема была доказана впервые по-видимому в [23]. Более общие варианты подобных утверждений могут быть найдены также в [13].

Заметим, что сходимость $\langle \Phi; \nu^k_{(\cdot)} \rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ в L^∞ означает сходимость интегралов $\int_{\tilde\Omega} \langle \Phi; \nu^k_x \rangle dx$ к интегралу $\int_{\tilde\Omega} \langle \Phi; \nu_x \rangle dx$ для всех измеримых подмножеств $\tilde\Omega$ множества Ω. С другой стороны функционал $\Phi \to (1/\operatorname{meas} \tilde\Omega) \int_{\tilde\Omega} \langle \Phi; \nu_x \rangle dx$ является действием меры Радона на функции Φ (эта мера обычно обозначается $\mathrm{Av}(\nu_x)_{x \in \tilde\Omega}$):

$$\langle \Phi; \mathrm{Av}(\nu_x)_{x \in \tilde\Omega} \rangle := \frac{1}{\operatorname{meas} \tilde\Omega} \int\limits_{\tilde\Omega} \langle \Phi; \nu_x \rangle dx, \ \forall \Phi \in C_0(\mathbf{R}^l).$$

Для сравнения действий семейств мер $(\nu^1_x)_{x \in \tilde\Omega}$ и $(\nu^2_x)_{x \in \tilde\Omega}$ мы должны научиться оценивать $\rho(\mathrm{Av}(\nu^1_x)_{x \in \tilde\Omega}, \mathrm{Av}(\nu^2_x)_{x \in \tilde\Omega})$.

Теорема 2.6. *Пусть $\nu^1, \nu^2 : \Omega \to (M_c, \rho)$ являются измеримыми функциями.*

1\. *Если $\rho(\mathrm{Av}(\nu^1_x)_{x \in \tilde\Omega}, \mathrm{Av}(\nu^2_x)_{x \in \tilde\Omega}) \leqslant \delta$ с $\tilde\Omega \subset \Omega$ таким, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \tilde\Omega) \leqslant \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho(\mathrm{Av}(\nu^1_x)_{x \in \Omega}, \mathrm{Av}(\nu^2_x)_{x \in \Omega}) \leqslant (2c+1)\delta$.*

2\. *Если $\rho(\nu^1_x, \nu^2_x) \leqslant \delta$ для п.в. $x \in \tilde\Omega \subset \Omega$ с $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \tilde\Omega) \leqslant \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho(\mathrm{Av}(\nu^1_x)_{x \in \Omega}, \mathrm{Av}(\nu^2_x)_{x \in \Omega}) \leqslant (2c+1)\delta$.*

Теоремы 2.2-6 указывают свойтва мер Янга, достаточные для построения общей теории и, прежде всего, для получения теоремы о компактности и теоремы существования меры Янга.

Теорема 2.7 (компактность). *Пусть Ω является измеримым ограниченным подмножеством $\mathbf{R}^n$ и пусть $\nu^k : \Omega \to (M_c, \rho)$, $k \in \mathbf{N}$, являются измеримыми функциями. Тогда существует подпоследовательность $(\nu^k_x)_{x \in \Omega}$ (индексация сохраняется) и функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ такие, что $\langle \Phi; \nu^k_{(\cdot)} \rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ в $L^\infty(\Omega)$ для каждого $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$.*

Теорема 2.8 (существование). *Пусть $\theta : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ такая непрерывная функция, что $\theta(v) \to \infty$ при $|v| \to \infty$, и пусть $\xi_k : \Omega \to \mathbf{R}^l$*

является последовательностью измеримых функций с

$$\int_\Omega \theta(\xi_k(x))dx \leqslant c < \infty,\ k \in \mathbf{N}.$$

Тогда ξ_k содержит подпоследовательность порождающую меру Янга.

Напомним, что интегранд $L(x,u) : \Omega \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ является Каратеодориевым, если функция L измерима по x и непрерывна по v. В этом случае по любому $\epsilon > 0$ найдется подмножество Ω_ϵ множества Ω такое, что $\mathrm{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leqslant \epsilon$ и функция $L : \Omega_\epsilon \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ непрерывна, см. [15].

Для работы с интегральными функционалами важными являются

Теорема 2.9. *Пусть Ω является ограниченным измеримым подмножеством $\mathbf{R}^n$ и пусть $L(x,v) : \Omega \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ является ограниченным снизу интеграндом Каратеодори. Предположим, что существует последовательность измеримых функций $\xi_i : \Omega \to \mathbf{R}^l$, порождающая меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$.*

Тогда

$$\liminf_{i\to\infty} \int_\Omega L(x,\xi_i(x))dx \geqslant \int_\Omega \langle L(x,\cdot);\nu_x\rangle dx.$$

Более того, $\lim_{i\to\infty}\int_\Omega L(x,\xi_i(x))dx \to \int_\Omega \langle L(x,v);\nu_x\rangle dx < \infty$ если и только если функции $L(\cdot,\xi_i(\cdot))$, $i \in \mathbf{N}$, являются равномерно суммируемыми. В этом случае $L(\cdot,\xi_i(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot,v);\nu_{(\cdot)}\rangle$ в L^1.

Теорема 2.10. *Пусть $\theta : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ является непрерывной функцией с более чем линейным ростом. Пусть $M(A)$ является выпуклым подмножеством множества вероятностных мер с центром масс в A. Тогда вероятностная мера μ с центром масс в A принадлежит замыканию $M(A)$ в энергии, т.е. для некоторых $\nu_k \in M(A)$ выполнено $\nu_k \rightharpoonup^* \mu$ и $\langle\theta;\nu_k\rangle \to \langle\theta;\mu\rangle$, $k \to +\infty$, если и только если*

$$\langle\theta+\Phi;\mu\rangle \geqslant \inf_{\nu\in M(A)}\langle\theta+\Phi;\nu\rangle \tag{2.1}$$

для любой функции $\Phi \in C_c^\infty$.

3. Доказательство основных свойств измеримых функций $\Omega \to M_c(R^l)$

В этом параграфе мы докажем основные свойства мер Янга – теоремы 2.2, 2.3, 2.6. Однако начнем с теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.3. Предположим, что семейство $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ имеет измеримые действия на элементы Φ пространства $C_0(\mathbf{R}^l)$. Пусть также $\{\Phi_i\} \in C_0(\mathbf{R}^l)$ задает множество, всюду плотное в $C_0(\mathbf{R}^l)$. Для любых наперед заданных $\epsilon > 0$ и $i \in \mathbf{N}$ существует компактное множество $\Omega_i \subset \Omega$ такое, что ограничение $\langle \Phi_i; \nu_{(\cdot)} \rangle : \Omega \to \mathbf{R}$ на Ω_i является непрерывным и $\mathrm{meas}(\Omega \setminus \Omega_i) \leqslant \epsilon/2^i$. Тогда $\mathrm{meas}(\Omega \setminus \cap\Omega_i) \leqslant \epsilon$ и ограничения всех функций $\langle \Phi_i; \nu_{(\cdot)} \rangle$, $i \in \mathbf{N}$, на $\cap\Omega_i$ являются непрерывными, что и влечет непрерывность функции $\nu : \cap\Omega_i \to (M_c, \rho)$. Тогда $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ является измеримой функцией.

Обратно, пусть ν является измеримой функцией $\Omega \to (M_c, \rho)$. Тогда, по теореме 2.4, свойство Лузина выполнено для ν. Таким образом, для любого фиксированного $\epsilon > 0$ существует компактное подмножество Ω_ϵ множества Ω такое, что $\mathrm{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leqslant \epsilon$ и ограничение ν на Ω_ϵ является непрерывным в метрике ρ, что, в свою очередь, влечет непрерывность ограничения функций $\langle \Phi_i; \nu_{(\cdot)} \rangle$ на Ω_ϵ для каждого $i \in \mathbf{N}$. Плотность $\{\Phi_i\}$, $i \in \mathbf{N}$, в $C_0(\mathbf{R}^l)$ влечет непрерывность ограничения $\langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ на Ω_ϵ для каждого $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$. Таким образом $\langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle : \Omega \to \mathbf{R}$ является измеримой функцией для каждого $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$, что и завершает доказательство. •

Доказательство теоремы 2.6основано на формуле, задающей метрику ρ, и аддитивности $\mathrm{Av}(\nu_x)_{x\in\Omega}$ как функции множества.

Пусть функции $\Psi_i := \Phi_i/||\Phi_i||_C$, $i \in \mathbf{N}$, задают метрику ρ, т.е.

$$\rho(\nu^1, \nu^2) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\langle \Psi_i; \nu^1 \rangle - \langle \Psi_i; \nu^2 \rangle|.$$

Аддитивность позволяет утверждать, что для каждой функции $\Psi \in C_0(\mathbf{R}^l)$, каждого измеримого отображения $\mu : \Omega \to (M_c, \rho)$, и каждого измеримого подмножества $\tilde{\Omega}$ множества Ω выполнено

$$\langle \Psi; \mathrm{Av}(\mu_x)_{x\in\Omega} \rangle = \frac{\mathrm{meas}\,\tilde{\Omega}}{\mathrm{meas}\,\Omega} \langle \Psi; \mathrm{Av}(\mu_x)_{x\in\tilde{\Omega}} \rangle +$$

$$\frac{\operatorname{meas}(\Omega\setminus\tilde\Omega)}{\operatorname{meas}\Omega}\langle\Psi;\operatorname{Av}(\mu_x)_{x\in(\Omega\setminus\tilde\Omega)}\rangle.$$

Из этого тождества следует также

$$\rho(\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in\Omega},\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in\Omega})=\sum_i\frac{1}{2^i}|\langle\Psi_i;\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in\Omega}\rangle-\langle\Psi_i;\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in\Omega}\rangle|\leqslant$$

$$\frac{\operatorname{meas}\tilde\Omega}{\operatorname{meas}\Omega}\ \rho(\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in\tilde\Omega},\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in\tilde\Omega})+$$

$$\frac{\operatorname{meas}(\Omega\setminus\tilde\Omega)}{\operatorname{meas}\Omega}\ \rho(\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in(\Omega\setminus\tilde\Omega)},\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in(\Omega\setminus\tilde\Omega)}).\tag{3.1}$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (3.1) не превышает $2c\delta$, если $\operatorname{meas}(\Omega\setminus\tilde\Omega)\leqslant\delta\operatorname{meas}\Omega$, так как $\rho(\mu^1,\mu^2)\leqslant 2c$ для каждых $\mu^1,\mu^2\in M_c$. Что касается первого слагаемого, оно не превосходит δ в силу условий леммы. Таким образом

$$\rho(\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in\Omega},\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in\Omega})\leqslant(2c+1)\delta.$$

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что в первом слагаемом мы можем использовать оценку

$$\rho(\operatorname{Av}(\nu_x^1)_{x\in\tilde\Omega},\operatorname{Av}(\nu_x^2)_{x\in\tilde\Omega})=\sum_i\frac{1}{2^i\operatorname{meas}\tilde\Omega}|\int\limits_{\tilde\Omega}(\langle\Psi_i;\nu_x^1\rangle-\langle\Psi_i;\nu_x^2\rangle)dx|$$

$$\leqslant\int\limits_{\tilde\Omega}\sum_i\frac{1}{2^i\operatorname{meas}\tilde\Omega}|\langle\Psi_i;\nu_x^1\rangle-\langle\Psi_i;\nu_x^2\rangle|dx=\frac{1}{\operatorname{meas}\tilde\Omega}\int\limits_{\tilde\Omega}\rho(\nu_x^1,\nu_x^2)dx\leqslant\delta.$$

Доказательство леммы завершено. •

Доказательство теоремы 2.2. Если $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является мерой Янга, то $\langle\Phi;\nu_{(\cdot)}\rangle:\Omega\to\mathbf{R}$ является измеримой функцией для любой $\Phi\in C_0(\mathbf{R}^l)$ в силу определения 2.1. По теореме 2.3 функция $\nu:\Omega\to\langle M_1,\rho\rangle$ измерима.

Обратно, пусть функция $\nu:\Omega\to\langle M_1,\rho\rangle$ измерима. По теореме 2.4 она обладает свойством Лузина, а по теореме 2.5 может быть аппроксимирована в смысле сходимости почти всюду в метрике ρ кусочно-постоянными отображениями $\nu:\Omega\to\langle M_1,\rho\rangle$. Таким образом достаточно доказать утверждение для постоянного отображения $\nu:\Omega\to\langle M_1,\rho\rangle$.

Ситуацию можно еще упростить, так как вероятностная мера ν может быть аппроксимирована в метрике ρ выпуклыми комбинациями масс Дирака. Таким образом осталось рассмотреть случай когда

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} c_i \delta_{v_i}.$$

Пусть $C = [-a, a]^n$, где $a > 0$ настолько велико, что $\Omega \subset C$. Пусть C_j^1, $j = 1, \ldots, 2^n$, квадранды C. Для каждого $j \in \mathbf{N}$ можно разбить C_j^1 на кубы одинакового размера. Тогда, для каждого $i \in \mathbf{N}$ задано разбиение C на кубы C_j^i, $j = 1, \ldots, 2^{ni}$. Пусть $\Omega_j^i = \Omega \cap C_j^i$. Для каждого $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{in}\}$ определим кусочно-постоянную функцию $\xi_i : \Omega \to \{v_1, \ldots, v_k\}$ в множестве Ω_j^i таким образом, что

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega_j^i : \xi_i(x) = v_m\} = c_m \operatorname{meas} \Omega_j^i, \ 1 \leqslant m \leqslant k.$$

Тогда $\operatorname{Av}(\delta_{\xi_{i+i'}})_{\Omega_j^i} = \nu$, где $i, i' \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{ni}\}$. Тогда для любой функции $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$ выполнено $\Phi(\xi_i) \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$, $i \to \infty$, с $\nu_{(\cdot)} = \nu$ п.в.

Доказательство теоремы 2.2 завершено. •

4. Вытекающие свойства мер Янга

В этом параграфе мы докажем теоремы 2.7, 2.10. Теорема 2.8 – прямое следствие теоремы 2.7, а теорема 2.9 получается из теоремы 2.8 применением леммы Фату.

Доказательство теоремы 2.7. Пусть $C = [-a, a]^n$, где $a > 0$ настолько велико, что $\Omega \subset C$. Пусть также C_j^1 $(j = 1, \ldots, 2^n)$ обозначают квадранды C. Для каждого $i \in \mathbf{N}$ рассмотрим аналогичные разбиения C_j^i на кубы одинакового размера. Тогда, для каждого $i \in \mathbf{N}$ задано также разбиение множества C на кубы C_j^i, $j = 1, \ldots, 2^{ni}$. Пусть $B_j^i = \Omega \cap C_j^i$.

Применяя стандартный диагональный процесс можно найти подпоследовательность $(\nu_x^k)_{x \in \Omega}$ (индексацию не меняем) такую, что $\operatorname{Av}(\nu_x^k)_{x \in B_j^i} \rightharpoonup^* \nu_j^i$ в $C_0(\mathbf{R}^l)'$ для каждого $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \ldots, 2^{ni}\}$. Теорема будет доказана, если будет указана функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$, у которой ν_j^i являются средними на B_j^i.

Рассмотрим последовательность вспомогательных функций $\mu_i : \Omega \to M_c$ с $\mu_i(x) = \nu_j^i$ для $x \in B_j^i$, $j \in \{1, \ldots, 2^{ni}\}$. Ясно, что для каждого фиксированного $i \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \dots, 2^{ni}\}$, среднее $\mu_{i'}(x)$ на B^i_j равняется ν^i_j, если $i' \geqslant i$.

Рассмотрим следующее подмножество Ω полной меры

$$\Omega_0 := \cap_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{ni}} \tilde{B}^i_j,$$

где $\tilde{B}^i_j := \operatorname{int} C^i_j \cap \Omega$. Для каждого $x \in \Omega_0$ найдется единственная последовательность $B^i_{j(i)}$ такая, что $x \in B^i_{j(i)}$, $i \in \mathbf{N}$ (заметим, что $B^{i+1}_{j(i+1)} \subset B^i_{j(i)}$). Для этих x определяем $V(x)$ как множество всех предельных точек последовательности $\nu^i_{j(i)}$. Для остальных x положим $V(x) = M_c$. Целью дальнейших рассуждений будет показать, что V допускает измеримый селектор $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ и что для каждого такого селектора выполнено $\operatorname{Av}(\nu_x)_{x \in B^i_j} = \nu^i_j$. Тогда теоремы 2.2, 2.6 завершают доказательство.

Ясно, что для каждого $x \in \Omega_0$ множество $V(x)$ замкнуто. Тогда $V : \Omega \to 2^{M_c}$ является компактным многозначным отображением. Отображение также является измеримым как предел кусочно-постоянных функций μ_i. Действительно, если O является открытым подмножеством M_c и если $O_m = \{\nu \in O : \rho(\nu, M_c \setminus O) > 1/m\}$, то

$$V^{-1}(O) = (\Omega \setminus \Omega_0) \cup \cup_m (\cap_k \cup_{i \geqslant k} \mu_i^{-1}(O_m)),$$

что и влечет измеримость $V^{-1}(O)$. По теореме об измеримых селекторах (теорема 2.5) V допускает измеримый селектор $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$.

Пусть $B = B^{i_0}_{j_0}$, $\mu = \nu^{i_0}_{j_0}$. Для завершения доказательства теоремы осталось установить, что $\operatorname{Av}(\nu_x)_{x \in B} = \mu$. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Существует компактное множество $\Omega_\epsilon \subset \Omega_0 \cap B$ такое, что $\operatorname{meas}(B \setminus \Omega_\epsilon) < \epsilon \operatorname{meas} B$, и сужение функции $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ на Ω_ϵ является непрерывным (см. теорему 2.4). Пусть i' настолько большое, что диаметры $B^{i'}_{j'} \subset B$ не превосходят δ, где δ достаточно мало чтобы обеспечить $\rho(\nu(x), \nu(y)) \leqslant \epsilon$ для $x, y \in \Omega_\epsilon$ таких, что $|x - y| \leqslant \delta$.

Пусть $\tilde{\Omega}_\epsilon$ является компактным подмножеством Ω_ϵ, состоящим из Лебеговских точек Ω_ϵ, таким, что $\operatorname{meas}(B \setminus \tilde{\Omega}_\epsilon) < \epsilon \operatorname{meas} B$. Для каждого $x \in \tilde{\Omega}_\epsilon$ существует $i \geqslant i'$ и $j \in \{1, \dots, 2^{ni}\}$ такие, что $x \in B^i_j \subset B$ и $\rho(\nu^i_j, \nu(x)) < \epsilon$ (автоматически $\rho(\nu^i_j, \nu(y)) < 2\epsilon$ для всех $y \in B^i_j \cap \tilde{\Omega}_\epsilon$). Тогда существует конечное покрытие множества $\tilde{\Omega}_\epsilon$ множествами B^i_j ($i \geqslant i'$, $j \in \{1, \dots, 2^{ni}\}$) такими, что

$\rho(\nu_j^i,\nu(y)) < 2\epsilon$ для всех $y \in B_j^i \cap \tilde{\Omega}_\epsilon$. Любые два элемента этого покрытия или не пересекаются или один из них является вложенным в другой. Тогда существует также подпокрытие состоящее из непересекающихся множеств $\tilde{B}_1,\dots,\tilde{B}_m$. Пусть $\tilde{\nu}_1,\dots,\tilde{\nu}_m$ являются средними ν_j^i ассоциированными с $\tilde{B}_1,\dots,\tilde{B}_m$.

Пусть $\tilde{\nu}_x$ равняется $\tilde{\nu}_1,\dots,\tilde{\nu}_m$ на множествах $\tilde{B}_1,\dots\tilde{B}_m$ соответственно. В оставшемся множестве $B\setminus\cup_{i=1}^m\tilde{B}_i$ мы определяем $\tilde{\nu} := \mathrm{Av}(\nu_x)_{x\in(B\setminus\cup_i\tilde{B}_i)}$. Тогда $\mathrm{Av}(\tilde{\nu}_x)_{x\in B} = \mu$. Согласно конструкции неравенство $\rho(\nu(x),\tilde{\nu}(x)) \leqslant 2\epsilon$ выполнено для всех $x\in\tilde{\Omega}_\epsilon$, где $\mathrm{meas}(B\setminus\tilde{\Omega}_\epsilon) \leqslant \epsilon\,\mathrm{meas}\,B$. В силу теоремы 2.6 получаем $\rho(\mathrm{Av}(\tilde{\nu}_x)_{x\in B},\mathrm{Av}(\nu_x)_{x\in B}) \leqslant (2c+1)2\epsilon$. Так как $\epsilon>0$ может быть выбрано произвольно маленьким и $\mathrm{Av}(\tilde{\nu}_x)_{x\in B}=\mu$ получаем, что $\mathrm{Av}(\nu_x)_{x\in B}=\mu$.

Теорема доказана. •

Доказательство теоремы 2.10. Если $\nu\in M(A)$, то неравенство (2.1) разумеется выполнено. Если $\nu \not\in M(A)$, то

$$|\langle L;\nu\rangle - \langle L;\mu\rangle| + \rho(\nu,\mu) \geqslant \epsilon > 0,\ \forall\mu\in M(A).$$

Пусть $\Phi_i\in C_c^\infty$, $i\in\mathbf{N}$, – функции, задающие метрику ρ. Тогда для некоторого $k\in\mathbf{N}$ выполнено

$$|\langle L;\nu\rangle - \langle L;\mu\rangle| + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i||\Phi_i||_C}|\langle\Phi_i;\nu\rangle - \langle\Phi_i;\mu\rangle| \geqslant \epsilon/2.$$

Множество

$$K = \{(\langle L;\mu\rangle, \langle\Phi_1/2||\Phi_1||_C;\mu\rangle,\dots,\langle\Phi_k/2^k||\Phi_k||_C;\mu\rangle) :\ \mu\in M(A)\}$$

является выпуклым подмножеством $\mathbf{R}^{k+1}$ и

$$(\langle L;\nu\rangle, \langle\Phi_1/2||\Phi_1||_C;\nu\rangle,\dots,\langle\Phi_k/2^k||\Phi_k||_C;\nu\rangle) \notin clK.$$

Так как $L\to\infty$ при $|v|\to\infty$, то для некоторого $c\in\mathbf{R}^{k+1}$ с $c_1>0$ получаем

$$\langle c_1L + \sum_{i=1}^k c_{i+1}\Phi_i;\nu\rangle \leqslant \inf_{\mu\in M(A)}\langle c_1L + \sum_{i=1}^k c_{i+1}\Phi_i;\mu\rangle - \epsilon_0,\ \epsilon_0>0,$$

что противоречит (2.1). •

5. Скалярный случай

В этом параграфе мы рассмотрим случай Каратеодориевых интеграндов $L : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющих условию

$$c_1\theta(v) + c_2 \leqslant L(x,u,v) \leqslant c_3\theta(v) + c_4,\ c_3 \geqslant c_1 > 0, \tag{5.1}$$

где $\theta(v) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ непрерывная функция с более чем линейным ростом.

Нетрудно показать, что овыпукление θ^{**} функции θ задано следующим образом

$$\theta^{**}(v) = \min\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i L(v_i) : c_i \geqslant 0, v_i \in \mathbf{R}^l, \sum c_i = 1, \sum c_i v_i = v\}$$

и является выпуклой функцией со значениями в $\mathbf{R}^+$, которая также имеет более чем линейный рост. Более того, овыпукление L по v (L^{**}) является Каратеодориевым интеграндом, выпуклым по v и удовлетворяющим оценке

$$c_1\theta^{**}(v) + c_2 \leqslant L^{**}(x,u,v) \leqslant c_3\theta^{**}(v) + c_4, \tag{5.2}$$

см. [31].

Теорема о виде полунепрерывной снизу оболочки в случае выпуклых $\theta(v)$ была доказана в [15] для функций линейных на границе. Теорема передоказавалась при менее ограничительных условиях, см. например [12]. В [31] мы показали, что теорема верна на всех функциях для интеграндов L, удовлетворяющих только оценке снизу

$$L(x,u,v) \geqslant \alpha|\cdot|^{n+\epsilon} + \beta,\ \alpha > 0,\ \epsilon > 0,\ \beta \in \mathbf{R}.$$

Этот случай логично возник при анализе современного состояния математической теории упругости, так как соответствует ситуации, когда полная энергия задается только интегральным слагаемым. Тем не менее теорема остается верной и для случая (5.1) на функциях u, допускающих расширение на большую область с сохранением ограниченности энергии. Таким образом случай, когда плотность энергии (интегранд) сравнима с однородной (без зависимости от (x,u)) плотностью, также поддается анализу. Ниже мы покажем как теория мер Янга позволяет коротко доказать этот результат.

Теорема 5.1. *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ является Каратеодориевым интеграндом, который удовлетворяет условию (5.1). Пусть $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $J^{**}(u) < \infty$, и существует область $\tilde{\Omega}$ и Соболевское расширение $\tilde{u}$ функции u на $\tilde{\Omega}$ такие, что $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ и $\int_{\tilde{\Omega}} \theta^{**}(D\tilde{u})dx < \infty$.*

Тогда найдется последовательность $u_k \in W^{1,1}$ такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,1}(\Omega)$, $J(u_k) \to J^{**}(u)$.

Замечание. Полунепрерывность функционалов с выпуклыми по Du интеграндами является давно известным фактом, см. [27, 28].

Для доказательства теоремы нам понадобится одна лемма из [31].

Лемма 5.2. *Пусть $a \in \mathbf{R}^n$ и пусть $a = c_1a_1 + c_2a_2$, где $c_2, c_1 > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^n$. Пусть также $\epsilon > 0$. Найдется кусочно-афинная функция $\phi \in l_a + W_0^{1,\infty}(\Omega)$ такая, что $D\phi \in \{a_1\} \cup B(a_2, \epsilon)$ и*

$$|\operatorname{meas}\{D\phi = a_1\} - c_1 \operatorname{meas}\Omega| \leqslant \epsilon \operatorname{meas}\Omega,$$

$$|\operatorname{meas}\{D\phi \in B(a_2, \epsilon)\} - c_2 \operatorname{meas}\Omega| \leqslant \epsilon \operatorname{meas}\Omega.$$

Доказательство следующего утверждения можно найти в [20]. Так как оно играет важную роль в теории градиентных мер Янга, мы приводим здесь короткие доказательства.

Лемма 5.3. *Пусть $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Тогда*

1. *существует последовательность $\phi_j \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $j \in \mathbf{N}$, такая, что $\phi_j \rightharpoonup^* 0$ и $D\phi_j$ порождает однородную меру Янга $\operatorname{Av}(\delta_{D\phi})_\Omega$;*
2. *множество мер $\operatorname{Av}(\delta_{D\phi})_\Omega$, где $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, выпукло.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что Ω содержит начало координат. Для любого $\epsilon > 0$ определим функцию

$$\phi_\epsilon : \epsilon\Omega \to \mathbf{R}^m$$

следующим образом: $\phi_\epsilon(x) = \epsilon\phi(x/\epsilon)$. Тогда

$$\operatorname{Av}(D\phi_\epsilon)_{\epsilon\Omega} = \operatorname{Av}(D\phi)_\Omega, \ ||\phi_\epsilon||_{L^\infty(\epsilon\Omega)} \leqslant \epsilon||\phi||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.3}$$

1. По хорошо известной теореме Витали для любого открытого множества $\tilde{\Omega}$ и любого $\epsilon > 0$ можно найти разбиение $\tilde{\Omega}$ на не более чем счетный набор взаимонепересекающихся множеств

$a_i + \epsilon_i\Omega$, с $\epsilon_i \leqslant \epsilon$, $i \in \mathbf{N}$, и множество нулевой меры. Для каждого $i \in \mathbf{N}$ полагаем

$$\tilde{\phi}(x + a_i) = \phi_{\epsilon_i}(x), \; x \in \epsilon_i \Omega.$$

Используя (5.3) получаем

$$\mathrm{Av}(D\tilde{\phi})_{\tilde{\Omega}} = \mathrm{Av}(D\phi)_{\Omega}, \; ||\tilde{\phi}||_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leqslant \epsilon ||\phi||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.4}$$

Для каждого $j \in \mathbf{N}$ разобьем множество Ω на подмножества Ω_j^i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{nj}$, как в доказательстве теоремы 2.2. В каждом Ω_j^i можно определить функцию $\phi_j^i \in W_0^{1,\infty}(\Omega_j^i; \mathbf{R}^m)$ со свойствами (5.4). Тогда функции ϕ_j, равные ϕ_j^i в Ω_j^i, обладают требуемыми свойствами: $\phi_j \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $||\phi_j||_{L^\infty} \leqslant 1/j$, $\mathrm{Av}(\delta_{D\phi_{j+j'}})_{\Omega_j^i} = \mathrm{Av}(\delta_{D\phi})_{\Omega}$.

Если $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ – мера Янга, порождаемая подпоследовательностью $D\phi_j$, то по теореме 2.5, 2.6

$$\mathrm{Av}(\nu_x)_{\Omega_j^i} = \mathrm{Av}(\delta_{D\phi})_{\Omega}$$

и тогда $\nu_{(\cdot)} = \mathrm{Av}(\delta_{D\phi})_{\Omega}$ п.в. Тогда вся последовательность $D\phi_j$ порождает меру Янга $\mathrm{Av}(\delta_{D\phi})_{\Omega}$ и $\phi \rightharpoonup^* 0$ в $W^{1,\infty}$.

2. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in M(0)$, т.е. существуют $\phi_1, \phi_2 \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ такие, что

$$\mathrm{Av}(\delta_{D\phi_1})_{\Omega} = \nu_1, \; \mathrm{Av}(\delta_{D\phi_2})_{\Omega} = \nu_2.$$

Пусть $c_1, c_2 \geqslant 0$ такие, что $c_1 + c_2 = 1$. Множество Ω можно разбить на два липшицевых подмножества со свойствами

$$\operatorname{meas}\Omega_1 = c_1 \operatorname{meas}\Omega, \; \operatorname{meas}\Omega_2 = c_2 \operatorname{meas}\Omega.$$

Существуют функции $\tilde{\phi}_1 \in W_0^{1,\infty}(\Omega_1; \mathbf{R}^m)$, $\tilde{\phi}_2 \in W_0^{1,\infty}(\Omega_2; \mathbf{R}^m)$ со свойствами

$$\mathrm{Av}(\delta_{D\tilde{\phi}_1})_{\Omega_1} = \nu_1, \; \mathrm{Av}(\delta_{D\tilde{\phi}_2})_{\Omega_2} = \nu_2.$$

Для функции $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ равной $\tilde{\phi}_1$ в Ω_1 и $\tilde{\phi}_2$ в Ω_2 выполнено

$$\mathrm{Av}(\delta_{D\phi})_{\Omega} = c_1\nu_1 + c_2\nu_2.$$

Таким образом множество $M(0)$ выпукло. •

Доказательство теоремы 5.1. Сразу заметим, что в силу (5.2) можно найти последовательность $u_j \in C^\infty(\Omega)$ такую, что $u_j \to u$ в

$W^{1,1}$ и $J^{**}(u_j) \to J^{**}(u)$, $j \to \infty$. Действительно, усреднения функции $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbf{R}$ с радиусом $1/j$ удовлетворяют этим требованиям. Таким образом достаточно ограничиться случаем $u \in C^1$.

Лемма 5.2 и теорема 2.10 позволяют показать, что любая вероятностная мера ν с центром масс в A и с $\langle \theta^{**}; \nu \rangle < \infty$ порождается как мера Янга последовательностью $D\phi_k$, где $\phi_k \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $\phi_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}$ и

$$\int\limits_{\Omega} \theta(D\phi_k)dx \to \langle \theta^{**}; \nu \rangle \operatorname{meas} \Omega.$$

Действительно пусть $M(A)$ является замыканием в энергии $\int \theta$ класса мер $\operatorname{Av}(\delta_{D\phi})_\Omega$ с $\phi \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega)$. По лемме 5.3 и теореме 2.10 $\nu \in M(A)$ если и только если для каждой $\Phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ выполнено

$$\langle L + \Phi; \nu \rangle \geqslant \inf_{\mu \in M(A)} \langle L + \Phi; \mu \rangle.$$

На основании лемм 5.2, 5.3 мы можем показать по индукции, что любая выпуклая комбинация масс Дирака с центром масс в A принадлежит $M(A)$. Тогда правая часть равна $(L+\Phi)^{**}(A)$, а относительно левой в силу выпуклости $(L+\Phi)^{**}$ можно утверждать

$$\langle L + \Phi; \nu \rangle \geqslant \langle (L + \Phi)^{**}; \nu \rangle \geqslant (L + \Phi)^{**}(A).$$

Таким образом $\nu \in M(A)$.

Далее определим многозначное отображение $V : \Omega \to 2^{(M_1, \rho)}$, ставящее в соответствие каждому $x \in \Omega$ множество вероятностных мер $V(x)$ таких, что для $\nu \in V(x)$ выполнено

$$\langle L(x, u(x), \cdot); \nu \rangle = L^{**}(x, u(x), Du(x)).$$

Множества $V(x)$ замкнуты, непусты и, более того, отображение $x \to V(x)$ измеримо. По теореме 2.5 существует мера Янга $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ с $\nu_x \in V(x)$ для п.в. $x \in \Omega$. Так как каждая мера ν_x принадлежит соответствующему классу $M(Du(x))$, мы можем использовать теоремы 2.4, 2.6 и уже полученный результат в случае $\nu_x = \nu$ п.в. для получения окончательного результата (напомним, что $u \in C^1$). $\bullet$

6. Векторный случай

Интерес к векторным задачам был стимулирован возможностью доказывать разрешимость некоторых задач математической теории упругости не предполагая априори ограничений на деформации, [2]. Ранее было известно, что для полунепрерывности снизу интегрального функционала относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$ необходимым и достаточным условием является квазивыпуклость L по Du, где L квазивыпукла в точке $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ если

$$\int\limits_{\Omega} L(A + D\phi(x))dx \geqslant L(A)\operatorname{meas}\Omega, \ \forall\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m),$$

см. [25] или используй лемму 5.3.

Естественно было предположить, что вариант квазивыпуклости будет характеризовать полунепрерывность функционалов снизу относительно слабой сходимости в их области определения. Однако контрпримеры из [9, 19, 24] опровергли это, хотя следует заметить, что интегранд не имеет оценки на рост снизу, предотвращающей разрывы в деформациях, что в свою очередь предполагается в математической теории. В [1] было показано, что квазивыпуклость характеризует полунепрерывность снизу для случая стандартного роста интеграндов, см. (1.2). Относительно вида полунепрерывных снизу оболочек оказалось, что квазиовыпукление

$$L^{qc}(A) = \inf_{\phi\in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m)} \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega}\int\limits_{\Omega} L(A + D\phi(x))dx$$

является квазивыпуклым интеграндом, [14]. Опять же в условиях (1.2) квазиовыпукления по Du задают интегранды функционалов, являющихся полунепрерывными снизу оболочками исходных, [1]. Результат был доказан при некоторых дополнительных технических ограничениях на интегранды, которые были сняты в [29, 26], используя технику градиентных мер Янга. Результат был получен теми же рассуждениями, что только что использовались при доказательстве теоремы 5.1.

Действительно лемма 5.3 позволяет утверждать, что

$$L^{qc}(x,u,\cdot) = \inf_{\nu\in M(A)} \langle L(x,u,\cdot);\nu\rangle. \tag{6.1}$$

Важным результатом [21] является утверждение о замкнутости $M(A)$ и даже более того $A \to M(A)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением:

$$\nu_k \in M(A_k),\ \langle |\cdot|^p; \nu_k\rangle \leqslant c < \infty,\ \nu_k \rightharpoonup^* \nu,\ A_k \to A$$

влекут $\nu \in M(A)$. Таким образом инфимум в (6.1) достигается и для заданного $u \in W^{1,p}$ многозначное отображение $x \to V(x)$, ставящее каждому $x \in \Omega$ в соответствие множество мер, дающих этот инфимум, измеримо. Тогда измеримый селектор $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является мерой Янга и, так как $\nu_{(\cdot)} \in M(Du(\cdot))$, нетрудно показать, что она порождается градиентами последовательности u_k такой, что $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p}$, используя локально лемму 5.3. Получаем

$$L(\cdot, u_k(\cdot), Du_k(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot, u(\cdot), v); \nu\rangle = L^{qc}(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot)),$$

что и требуется.

Однако нахождение других классов функционалов, для которых можно характеризовать полунепрерывность снизу и построить полунепрерывные снизу оболочки, оказалось под вопросом. Типичные результаты заключались в том, что оболочка состоит из соответствующего интегрального слагаемого плюс некоторый сингулярный добавок, см. [7]. Разумеется полный результат следует ожидать только в случае достаточного роста интеграндов снизу и первый подобный случай был получен в [32]. Оказалось сравнительно просто получить результат для интеграндов L, удовлетворяющих (1.3) с выпуклой $\theta(\cdot) = G(|\cdot|)$, где $G'(t)t/G(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Утверждение о полунепрерывности сверху отображения $A \to M(A)$ следует из теоремы 2.10. На самом деле оно верно и для более широкого класса интеграндов, что мы сейчас и покажем, и вместе с необходимыми аппроксимационными результатами должно привести к соответствующим результатам по полунепрерывности снизу и о виде полунепрерывной снизу оболочки.

Лемма 6.1. *Пусть L удовлетворяет* (1.3) *с $\theta(v)$ такой, что найдется функция $\lambda : [0;\infty[\to [0,1[$ с $\lambda(r) \to 1$ при $r \to \infty$, для которой*

$$\theta(v)/\theta(\lambda(|v|)v) \to \infty,\ |v| \to \infty,$$

а функция $t \to \theta(te)$ является возрастающей для больших t, $|e| = 1$.

Тогда сходимости $A_k \to A$, $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$ для $\nu_k \in M(A_k)$ с $\langle \theta(\cdot); \nu_k \rangle \leqslant c$, $k \in \mathbf{N}$, влекут $\nu \in M(A)$.

Это более общий случай, чем рассмотренный в [32], так как для G функция λ всегда существует, см. [32, лемма 5.4].

Доказательство. Свойства функций λ, θ позволяют подобрать $r_k \to \infty$ такие, что меры $\tilde{\nu}_k$, полученные как

$$\langle \Phi(\cdot); \tilde{\nu}_k \rangle = \langle \Phi(\lambda(r_k)\cdot); \nu_k \rangle, \ \forall \Phi \in C_0(\mathbf{R}^{m\times n}),$$

обладают свойством

$$\langle \theta(\cdot); \tilde{\nu}_k \rangle \to \langle \theta(\cdot); \nu \rangle. \tag{6.2}$$

Ясно, что $\tilde{\nu}_k \in M(\lambda(r_k)A_k)$.

Для любого $\Phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{m\times n})$ выполнено

$$\langle \theta + \Phi; \tilde{\nu}_k \rangle \to \langle \theta + \Phi; \nu \rangle, \ k \to \infty.$$

Так как в силу сходимости $\lambda(r_k)A_k \to A$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\mu \in M(\lambda(r_k)A_k)} \langle \theta + \Phi; \mu \rangle = \inf_{\mu \in M(A)} \langle \theta + \Phi; \mu \rangle$$

и так как по теореме 2.10

$$\langle \theta + \Phi; \tilde{\nu}_k \rangle \geqslant \inf_{\mu \in M(\lambda(r_k)A_k)} \langle \theta + \Phi; \mu \rangle,$$

из (6.2) мы получаем

$$\langle \theta + \Phi; \nu \rangle \geqslant \inf_{\mu \in M(A)} \langle \theta + \Phi; \mu \rangle.$$

Опять же в силу произвольности $\Phi \in C_c^\infty$ получаем $\nu \in M(A)$, см. теорему 2.10. •

Заметим, что до настоящего момента мы обсуждали классы интеграндов, задаваемые неравенствами (1.3), и единственный результат для интеграндов только с оценкой на рост снизу был получен в [31] в скалярном случае. К настоящему моменту так и не появилось анализа случая изотропных материалов, т.е. когда L зависит только от главных инвариантов $Du^t Du$. В этом случае есть надежда, что в классе однородных мер Янга с одинаковыми действиями на L, которые могут различаться расположением носителей в множествах матриц с одинаковыми инвариантами, есть удобные для работы представители. Пока есть только частичные результаты по описанию таких мер, см. [11, 33–35]. В общем векторном случае эффективное описание вероятностных мер, порождаемых градиентами, проблематично. Уже в случае $\nu = c_1\delta_{A_1} + c_2\delta_{A_2}$ мера порождается градиентами только когда $\operatorname{rank}(A_2 - A_1) \leqslant 1$, см. [8].

Литература

1. E. Acerbi, N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1984), 125–145.
2. J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **63** (1978), 337–403.
3. J. M. Ball, *Some open problems in Elasticity. Geometry, Mechanics, and Dynamics.* Springer, New York (2002), 3–59.
4. J. M. Ball, *A version of the fundamental theorem for Young measures*, in: PDE's and Continuum Models of Phase Transitions, M. Rascle, D. Serre, M. Slemrod, eds., Lecture Notes in Physics 344. Springer-Verlag (1989), 207–215.
5. E. J. Balder, *A general approach to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory.* — SIAM J. Control and Optimization, **22** (1984), 570–598.
6. H. Berliocchi, J. M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations.* — Bull. Soc. Math. France **101** (1973), 129–184.
7. G. Bouchitte, I. Fonseca, and J. Maly, *The effective bulk energy of the relaxed energy of multiple integrals below the growth exponent.* — Proc. Royal Soc. Edinb. Sect A **128** (1998), 463–497.
8. J. M. Ball and R. D. James, *Fine mixtures as minimizers of energy.* — Arch. Rational Mech. Anal. **100** (1987), 13–52.
9. J. M. Ball and F. Murat, *$W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals.* — J. Funct. Anal. **58** (1984), 225–253.
10. N. N. Bogolubov, *Sur quelques methods novelles dans le calculus des variations.* — Ann. Math. Pura Appl. **7** (1930), No. 4, 149–271.
11. P. Cardaliaquet and R. Tahraoui, *Sur léquaivalence de la 1-rang convexité et de la polyconvexité des ensembles isotropiques de $R^{2\times 2}$.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I **331** (2000), 851–856.
12. L. Carbone and R. De Arcangelis, *On a non-standard convex regularization and the relaxation of unbounded integral functionals of the calculus of variations.* — J. Conv. Anal. **6** (1999), 141–162.
13. C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions.* — Lecture Notes in Mathematics, vol. 580. Springer-Verlag, Berlin-New York (1977).
14. B. Dacorogna, *Direct methods in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag (1989).
15. I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems.* North-Holland (1976).
16. T. Iwaniec, *Nonlinear analysis and quasiconformal mappings from the perspective of PDEs. Quasiconformal geometry and dynamics* (Lublin, 1996), pp. 119-140, Banach Center Publ., 48, Polish Acad. Sci., Warsaw (1999).

17. T. Iwaniec and C. Sbordone, *Quasiharmonic fields.* — Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18**, no. 5 (2001), 519–572.
18. T. Iwaniec, G. Verchota, and A. Vogel, *The failure of rank-one connections.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **163**, no. 2 (2002), 125–169.
19. R. James and S. Spector, *Remarks on $W^{1,p}$-quasiconvexity, interpenetration of matter and function spaces for elasticity.* — Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** (1992), 263–280.
20. D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Characterization of Young measures generated by gradients.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 329–365.
21. D. Kinderlehrer and P. Padregal, *Weak convergence of sequences and the Young measure representation.* — SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1–19.
22. D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces.* — J. Geom. Anal. **4**, no. 1 (1994), 59–90.
23. K. Kuratowski and Ryll-Nardzewski, *A general theorem of selectors.* — Bull. Acad. Polon. Sci., **XIII**, No. 6 (1966), 397–403.
24. J. Maly, *Weak lower semicontinuity of polyconvex integrals.* — Proc. Royal Soc. Edinburgh **123A** (1993), 681–691.
25. C. Morrey, *Multiple integrals in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag (1966).
26. P. Pedregal, *Parametrized measures and variational principles. Progress in nonlinear differential equations and their applications 30.* Birkhäuser, Basel (1997).
27. Ю. Г. Решетняк, *Общие теоремы о полунепрерывности и сходимости с функционалом.* — СМЖ **8** (1967), 1052–1071.
28. М. А. Сычёв, *Необходимые и достаточные условия в теоремах о полунепрерывности снизу и сходимости с функционалом.* — Мат. Сб. **186**, Но. 6 (1995), 77–108.
29. M. Sychev, *A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy.* — Preprint 43/97/M, SISSA (Triest, Italy), March 1997.
30. M. Sychev, *Characterization of homogeneous gradient Young measures in the case of arbitrary integrands.* — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol.XXIX (2000), Fasc. 3, 531–548.
31. M. Sychev, *Attainment and relaxation results in special classes of deformations.* — Calc. Var. **19** (2004), 183–210.
32. M. Sychev, *Young measures as measurable functions.* — Preprint N 119, Institute of Mathematics, Novosibirsk, October 2003.
33. Šilhavý, *Rotationally invariant rank-1 convex functions.* — Appl. Math. Optim. **44** (2001), 1–15.
34. Šilhavý, *Monotonicity of rotationally invariant convex and rank 1 convex functions.* — Proc. Royal Soc. Edinburgh **132A** (2002), 419–435.
35. Šilhavý, *An O(n) invariant rank 1 convex function that is not polyconvex.* — Theor. Appl. Mech. Belgrade 28-29 (2002), 325–336.
36. L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations, in Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium.* — Vol. IV, Pitman Research Notes in Mathematics **39** (1979), 136–212.
37. L. C. Young, *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the Calculus of Variations. Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie.* — classe III, **30** (1937), 212–234.

38. L. C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory.* — Saunders, 1969 (reprinted by Chelsea 1980).

Sychev M. A. Young measures as measurable functions and applications to variational problems.

It is given a systematic approach to the theory of Young measures based on the characterisation of these objects as measurable functions with values of a compact metric space with metric having an integral form. The advantages of this approach to the investigation of the behaviour of integral functionals on weakly convergin sequences are explained.

Институт математики
СО РАН, Новосибирск

Поступило 18 мая 2004 г.