Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

С. Е. Пастухова

ОБ УСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА СОСТАВНЫХ СТРУКТУРАХ

1. Введение

Пусть F – периодический составленный из отрезков граф на плоскости, называемый далее сингулярной или бесконечно тонкой сеткой, $Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ – ячейка периодичности. Тонкая сетка F^h получается из сетки F, если заменить каждое звено I в F на полосу I^h ширины h со средней линией, совпадающей с I. Иногда удобно включить в тонкую сетку F^h круги радиуса $h/2$ с центрами в узлах сетки F. Процедура h-утолщения упрощается, если сетка F может быть составлена из нескольких семейств параллельных прямых. Тогда тонкая сетка F^h получается заменой каждой прямой l из сетки F на бесконечную полосу ширины h со средней линией l.

Обозначим через λ меру, сосредоточенную на F и пропорциональную там линейной мере Лебега, а через λ^h – меру, сосредоточенную на F^h и пропорциональную там плоской мере Лебега. Меры λ, λ^h нормированы: $\int\limits_Y d\lambda = \int\limits_Y d\lambda^h = 1$. Ясно, что $\lambda^h \rightharpoonup \lambda$ при $h \to 0$, т.е. $\int\limits_Y \varphi d\lambda^h \to \int\limits_Y \varphi d\lambda \quad \forall \varphi \in C^\infty_{per}(Y)$.

Плоские составные 1-периодические структуры с армированием в виде сингулярной или тонкой сетки можно описать соответственно с помощью составных мер

$$d\mu = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda, \quad d\mu^h = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda^h, \tag{1.1}$$

где dx – плоская мера Лебега. Ясно, что $\int\limits_Y d\mu = \int\limits_Y d\mu^h = 1$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$.

Гомотетическое сжатие плоскости в ε^{-1} раз переводит сетки F^h и F в F^h_ε и F_ε соответственно. Возникают меры μ^h_ε, μ_ε, такие

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект №02-01-00114 и Мин. Образования РФ, проект Е02-1.-52.

что $\mu_\varepsilon^h(B) = \varepsilon^2\mu^h(\varepsilon^{-1}B)$, $\quad \mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^2\mu(\varepsilon^{-1}B)$ для любого борелева множества B на плоскости. Очевидно, что

$$d\mu_\varepsilon^h = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda_\varepsilon^h, \quad d\mu_\varepsilon = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d\lambda_\varepsilon,$$

где меры λ_ε^h, λ_ε $\varepsilon-$периодичны и сосредоточены на сетках F_ε^h и F_ε. Свяжем параметры h и ε, полагая $h = h(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $\mu_\varepsilon^h(\varepsilon Y) = \mu_\varepsilon(\varepsilon Y) = \varepsilon^2$, то μ_ε^h, μ_ε сходятся слабо к плоской мере Лебега: $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$, $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$, что означает, например, $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu_\varepsilon^h \to \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Иногда удобно использовать обозначения: $F^0 = F, \mu^0 = \mu, \mu_\varepsilon^0 = \mu_\varepsilon$ и т.д.

Пусть $A = \{a_{ijsp}\}$ – тензор упругости, подчиненный обычным условиям симметрии $a_{ijsp} = a_{spij} = a_{jisp}$. Скалярное произведение симметрических матриц $\xi = \{\xi_{ij}\}$ и $\eta = \{\eta_{ij}\}$ определим как $\xi \cdot \eta = \xi_{ij}\eta_{ij}$. Действие тензора A на симметрическую матрицу ξ есть симметрическая матрица $A\xi = \{a_{ijsp}\xi_{sp}\}$. Предполагаем A положительно определенным: $A\xi \cdot \xi \geqslant c_o\xi \cdot \xi$ для любой матрицы ξ, $c_0 > 0$. В частности, в изотропном случае

$$\begin{gathered} A\xi = k\xi + k_1(Tr\xi)I, \quad k > 0, \quad k_1 \geqslant 0, \\ \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad Tr\xi = \xi_{11} + \xi_{22}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Пусть Ω – органиченная липшицева область в $\mathbb{R}^2$, $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$, $u = (u_1, u_2)$.

Рассмотрим задачу Дирихле: найти вектор-функцию $u^{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega)^2$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi)\, d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega f \cdot \varphi\, d\mu_\varepsilon^h \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2, \tag{1.3}$$

где $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$.

Это – обобщенная или вариационная формулировка краевой задачи для системы теории упругости в области Ω, армированной периодической сеткой F_ε^h, когда в пределах ячейки периодичности масса "приблизительно" наполовину (с погрешностью порядка $O(h)$) сосредоточена на тонкой сетке, асимптотически стремящейся к сингулярной цетке. В терминах обычной меры

Лебега задача (1.3) имеет аналогичную формулировку, но с разрывным тензором, принимающим постоянные значения в областях $\Omega \cap F_\varepsilon^h$ и $\Omega \setminus F_\varepsilon^h$, так что соответствующая краевая задача имеет условия сопряжения на границе раздела этих областей и условие закрепления на внешней границе $\partial\Omega$.

Решение поставленной задачи существует и единственно. Это следует из равномерного (по ε и $h \geqslant 0$) неравенства Корна

$$\int\limits_\Omega |u|^2 d\mu_\varepsilon^h \leqslant C \int\limits_\Omega |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)^2, \quad C = const(\Omega, F), \tag{1.4}$$

доказанного в §4. Отсюда же получаем ограниченность решения

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega (|u^{\varepsilon,h}|^2 + |e(u^{\varepsilon,h}|^2) d\mu_\varepsilon^h < \infty. \tag{1.5}$$

Благодаря неравенству (1.4), можно рассматривать задачу (1.3) в плоскости, армированной сеткой (нулевой толщины) $F_\varepsilon^0 = F_\varepsilon = \varepsilon F$. В этом случае задача ставится в терминах меры $\mu_\varepsilon^0 = \mu_\varepsilon$.

Наша цель – изучить поведение решений $u^{\varepsilon,h}$ при $\varepsilon \to 0$ и дать усредненное описание сильно неоднородной армированной среды.

Определим усредненный тензор

$$A^{\mathrm{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{u \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^2} \int\limits_Y A(\xi + e(u)) \cdot (\xi + e(u)) d\mu$$

и рассмотрим задачу на отыскание

$$u \in H_0^1(\Omega)^2, \int\limits_\Omega A^{\mathrm{hom}} e(u) \cdot e(\varphi)\, dx = \int\limits_\Omega f \cdot \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^2. \tag{1.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Задачи* (1.3) *и* (1.6) *связаны сходимостью решений и энергий при* $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_\Omega |u^{\varepsilon,h} - u|^2 d\mu_\varepsilon^h \to 0, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_\Omega Ae(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_\varepsilon^h \to \int\limits_\Omega Ae(u) \cdot e(u) dx. \tag{1.8}$$

Доказательство приведено в конце §4. Видим, что принцип усреднения оказался классическим: есть сильная сходимость решений, предельная функция не содержит осциллирующей переменной и предельная задача одна и та же для любой $h(\varepsilon) \to 0$.

Для аналогичной задачи, когда вся мера сосредоточена на тонкой сетке, усреднение неклассическое: предельная функция, вообще говоря, двухмасштабна (содержит осциллирующую переменную) и сходимость к ней не может быть сильной, а вид предельной задачи зависит от порядка бесконечно малой $h(\varepsilon)$ [1, 2, 7]. Тот же эффект наблюдается в задачах теории упругости на тонких структурах в пространстве – ящичных и стержневых [3–5].

Различие в усреднении на тонких и составных стуктурах – специфика теории упругости (его нет в скалярных задачах, для которых усреднение классическое на структурах обоих типов). И здесь определяющими являются два фактора. Во-первых, для мер μ_ε^h и λ_ε^h различно поведение константы в неравенстве Корна при $\varepsilon \to 0$. Во-вторых, для предельных мер μ и λ не совпадают множества периодических жестких перемещений.

Хотя в формулировке теоремы 1.1 не участвует двухмасштабная сходимость, для доказательства принципа усреднения будем использовать обобщенный метод двухмасштабной сходимости В. В. Жикова [6–8] с переменной мерой (ранее была предложена и разработана лишь двухмасштабная сходимость с мерой Лебега [9], [10]).

Предварительно в §2 мы изучаем особенности двухмасштабной сходимости в пространствах теории упругости с некоторой переменной борелевой мерой, удовлетворяющей условию типа условия связности (или эргодичности), а также специальным аппроксимативным условиям. Всем этим условиям удовлетворяет составная мера из (1.1) или аналогичная составная мера в $\mathbb{R}^3$ с армирующим ящичным каркасом, образованным из тонких плит. В §3 дан вывод принципа усреднения для упругих составных структур при наиболее общих предположениях, а также доказана теорема о корректоре. В §4 приведены доказательства необходимых неравенств Корна, а также свойств сходимости в пространствах с составной мерой. В §5 исследованы спектральные аспекты усреднения на составной структуре.

2. Двухмасштабная сходимость в пространствах теории упругости

Изучим некоторую общую ситуацию, в которую вписывается усреднение задач теории упругости на составных структурах, не обязательно плоских.

2.1. Пусть дано семейство μ^h 1-периодических нормированных борелевых мер в $\mathbb{R}^d$, таких что $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \to 0$. При фиксированном h рассмотрим меру μ^h_ε, такую что $\mu^h_\varepsilon(B) = \varepsilon^d \mu^h(\varepsilon^{-1}B)$ для любого борелева множества $B \subset \mathbb{R}^d$. Далее полагаем $h = h(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда $d\mu^h_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$.

Напомним, как определяется сходимость в переменном L^2-пространстве [6–8, 13]. Пусть $v^{\varepsilon,h}(x)$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$, т.е. $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu^h_\varepsilon < \infty$.

Слабая сходимость $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$ в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$ означает: $v \in L^2(\Omega)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega v^{\varepsilon,h}\varphi d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_\Omega v\varphi dx$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Сильная сходимость $v^{\varepsilon,h} \to v$ в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$ означает: $v \in L^2(\Omega)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega v^{\varepsilon,h} z^{\varepsilon,h} d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_\Omega vz dx$ как только $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$ в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$.

Сходимость в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$ имеет следующие свойства.

1) *Критерий компактности*: всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$ последовательность компактна в смысле слабой сходимости;

2) *Свойство полунепрерывности снизу*: если $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$, то $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu^h_\varepsilon \geqslant \int\limits_\Omega v^2 dx$.

3) *Критерий сильной сходимости*: $v^{\varepsilon,h} \to v \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_\Omega v^2 dx$.

Мы будем использовать также двухмасштабную сходимость в пространстве $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)$. Но прежде, чем перейти к ней, напомним, как определяется сходимость в переменном пространстве периодических функций $L^2(Y, d\mu^h)$ [7, 14], а также свойство среднего значения [7, 8].

Если последовательность a^h ограничена в $L^2(Y, d\mu^h)$, то слабая сходимость $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ означает, что

$$a \in L^2(Y, d\mu) \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0} \int\limits_Y a^h \psi d\mu^h = \int\limits_Y a\psi d\mu \quad \forall \psi \in C^\infty_{\text{per}}(Y).$$

Ограниченная в $L^2(Y, d\mu^h)$ последовательность b^h сильно сходится к функции $b \in L^2(Y, d\mu)$, $b^h \longrightarrow b$, если

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_Y b^h g^h d\mu^h = \int\limits_Y bgd\mu \text{ как только } g^h \rightharpoonup g \text{ в } L^2(Y, d\mu^h).$$

Сильная сходимость складывается из слабой сходимости и соотношения $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_Y |b^h|^2 d\mu^h = \int\limits_Y |b|^2 d\mu$.

Свойство среднего значения. Пусть Ω – ограниченная измеримая по Жордану область и $a^h \rightharpoonup a$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Тогда для любого $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \varphi(x)a^h(\frac{x}{\varepsilon})d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega\int\limits_Y \varphi(x)a(y)dxd\mu.$$

Дадим определение двухмасштабной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$. Скажем, что ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность $v^{\varepsilon,h}(x)$ *слабо двухмасштабно сходится* к функции $v(x,y) \in L^2(\Omega\times Y, dx\times d\mu)$: $v^{\varepsilon,h}(x) \xrightharpoonup{2} v(x,y)$,

$$\text{если}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega v^{\varepsilon,h}(x)\varphi(x)b(\frac{x}{\varepsilon})d\mu_\varepsilon^h =$$
$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y v(x,y)\varphi(x)b(y)dxd\mu \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \forall b\in C_{per}^\infty(Y).$$

Скажем, что последовательность $v^{\varepsilon,h}(x)$ *сильно двухмасштабно* сходится к функции $v(x,y) \in L^2(\Omega\times Y, dx\times d)$: $v^{\varepsilon,h} \xrightarrow{2} v(x,y)$,

$$\text{если}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega v^{\varepsilon,h}(x)z^{\varepsilon,h}(x)d_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega\int\limits_Y v(x,y)z(x,y)dxd\mu$$
$$\text{как только } z^{\varepsilon,h}(x) \xrightharpoonup{2} z(x,y).$$

Сходимость для вектор-функции $v^{\varepsilon,h} = (v_1^{\varepsilon,h}, \dots, v_N^{\varepsilon,h})$ определяется покомпонентно. Например, $v^{\varepsilon,h} \xrightharpoonup{2} v \Leftrightarrow v_i^{\varepsilon,h} \xrightharpoonup{2} v_i$, $i = 1,\dots,N$.

Перечислим некоторые общие свойства двухмасштабной сходимости, которые используются далее.

(i) Всякая ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ последовательность содержит слабо двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность.

(ii) Если $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$, то $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h \geqslant \int\limits_\Omega \int\limits_Y |v(x,y)|^2 dx d\mu$.

(iii) $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\to} v(x,y) \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega \int\limits_Y v^2(x,y) dx d\mu$.

(iv) Если $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$, то $v^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup \int\limits_Y v(x,y) d\mu$.

(v) Если $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$, $b^h(y) \to b(y)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$, то $b^h(\frac{x}{\varepsilon}) v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} b(y) v(x,y)$.

(vi) Пусть $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\to} v(x,y)$, где $v(x,y) = \sum\limits_i \varphi_i(x) b_i(y)$, $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^2_{\mathrm{per}}(Y, d\mu)$, и пусть $b_i^h \to b_i$ в $L^2_{\mathrm{per}}(Y, d\mu^h)$, $v^h(x,y) = \sum\limits_i \varphi_i(x) b_i^h(y)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega |v^{\varepsilon,h}(x) - v^h(x, \frac{x}{\varepsilon})|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0.$$

Приведем свойства сходимости для вектор-функций. В них участвует $A^h(y)$ – симметрическая 1-периодическая борелева матрица в $\mathbb{R}^N$, такая что

$$cI_N \leqslant A^h(y) \leqslant c^{-1} I_N, \quad I_N \text{ – единичная матрица в } \mathbb{R}^N.$$

$$A^h(y) \to A(y) \text{ в } L^2(Y, d\mu^h)^{\frac{N(N+1)}{2}},$$

Пусть далее $A^h(\frac{x}{\varepsilon}) = A_\varepsilon^h(x) = A_\varepsilon^h$.

(vii) Если $v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y)$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^N$, то

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega A^h(\frac{x}{\varepsilon}) v^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \geqslant \int\limits_\Omega \int\limits_Y A(y) v(x,y) \cdot v(x,y) dx d\mu,$$

причем это свойство остается в силе, если условие $A^h(y) \geqslant cI_N$ заменить на $A^h(y) \geqslant 0$.

(viii) Критерий сильной двухмасштабной сходимости векторов:

$$v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\to} v(x,y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^N \Leftrightarrow v^{\varepsilon,h}(x) \overset{2}{\rightharpoonup} v(x,y) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^N$$

$$\text{и } \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega A^h(\frac{x}{\varepsilon})v^{\varepsilon,h}(x)\cdot v^{\varepsilon,h}(x)d\mu_\varepsilon^h=\int\limits_\Omega\int\limits_Y A(y)v(x,y)\cdot v(x,y)dxd\mu.$$

Свойства **(i)**–**(vi)** доказаны в [7, 8]. Свойства **(vii)**, **(viii)** – некоторые обобщения (например, за счет зависимости матрицы $A_\varepsilon^h=A^h(\frac{x}{\varepsilon})$ от двух параметров) аналогичных свойств, приведенных в [8] в теоремах 7.1, 7.2. Их доказательства можно приспособить для более общего случая, если воспользоваться свойством **(v)**.

2.2. Временно обратимся к пространствам периодических функций с мерой μ или μ^h . Выделим в пространстве периодических симметрических матриц $L^2(Y,d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ подпространства потенциальных и соленоидальных матриц:

$V_{\rm pot}=V_{\rm pot}(Y,d\mu)$ есть замыкание множества

$$\{e(\varphi),\quad \varphi\in C_{\rm per}^\infty(Y)^d\}\ \text{в}\ L^2(Y,d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}},$$

$V_{\rm sol}=V_{sol}(Y,d\mu)=V_{\rm pot}^\perp$, т.е. $b\in V_{\rm sol}$, если $\int\limits_Y b\cdot e(\varphi)d\mu=0$ $\forall\varphi\in C_{\rm per}^\infty(Y)^d$.

Ключевую роль в дальнейшем играет множество $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mu)\in L^2(Y,d\mu)^d$ *жестких периодических перемещений*. По определению, $u\in\mathcal{R}$, если $\exists\varphi_n\in C_{\rm per}^\infty(Y)^d$, $\quad\varphi_n\to u$, $e(\varphi_n)\to 0$ в $L^2(Y,d\mu)$. Здесь и далее мы не различаем в обозначениях пространства скалярных и векторных функций, если это не приводит к недоразумениям.

Очевидно, что для произвольной меры μ пространство жестких периодических перемещений содержит постоянные векторы, но необязательно ими исчерпывается.

Введем аппроксимативные условия, связывающие меры μ и μ^h.

Для вектора a и симметричной матрицы b из $L^2(Y,d\mu)$

$$a={\rm div}_\mu b\iff\int\limits_Y b\cdot e(\varphi)d\mu=-\int\limits_Y a\cdot\varphi d\mu\quad\forall\varphi\in C_{\rm per}^\infty(Y)^d.\qquad(2.1)$$

В случае $a\equiv 0$ получаем $b\in V_{sol}(Y,d\mu)$.

Аналогично для вектора a^h и симметрической матрицы b^h из $L^2(Y,d\mu^h)$ вводится отношение $a^h={\rm div}_{\mu^h}b^h$. При $a^h\equiv 0$ получаем матрицу b^h соленоидальную относительно меры μ^h.

Скажем, что *меры μ и μ^h связаны аппроксимативными условиями*, если

(i) для любых a, b из (2.1) найдутся $a^h \in L^2(Y, d\mu^h)^d$, $b^h \in L^2(Y, d\mu^h)^{\frac{d(d+1)}{2}}$, такие что $a^h = \operatorname{div}_{\mu^h} b^h$, $a^h \to a$, $b^h \to b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$;

(ii) если в (i) $a \equiv 0$, то и $a^h \equiv 0$ (сильная аппроксимируемость соленоидальных матриц).

Из аппроксимативного условия (ii) непосредственно следует важное для дальнейшего *свойство сохранения потенциальности при слабой сходимости*: если $v^h \in V_{pot}(Y, d\mu^h), v^h \rightharpoonup v$, то $v \in V_{pot}(Y, d\mu)$.

Пусть меры μ, μ^h удовлетворяют следующим требованиям:

$$\mathcal{R}(\mu) = \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

т.е. пространство жестких периодических перемещений $\mathcal{R}(\mu)$ состоит только из постоянных векторов;

$$\text{мера } \mu \text{ невырождена}, \tag{2.3}$$

т.е. $V_{\rm pot}(Y, d\mu)$ не содержит постоянных матриц;

$$\text{меры } \mu^h, \mu \text{ связаны аппроксимативными условиями(i), (ii).} \tag{2.4}$$

Замечания. 1) Условие (2.2) для пространства вектор-функций можно трактовать как некоторый аналог условия эргодичности меры в пространстве скалярных функций (см. [6, 13]).

2)Напомним [7, Предложение 8.1], что если L – подпространство в $\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$, состоящее из потенциальных матриц, а $\tilde{L}$ – его ортогональное дополнение, то $\tilde{L}$ – это в точности совокупность средних значений $b(y) \in V_{\rm sol}(Y, d\mu)$. Из условия (2.3) следует $\tilde{L} = \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$.

Далее $A^h(y)$ – 1-периодическая борелева симметрическая операторная функция, действующая в пространстве симметрических матриц $\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$ (тензор упругости), такая что

$$c\xi \cdot \xi \leqslant A^h(y)\xi \cdot \xi \leqslant c^{-1}\xi \cdot \xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}, \tag{2.5}$$

$$A^h \to A \text{ в } L^2(Y, d\mu^h). \tag{2.6}$$

Пусть $\quad A^h_\varepsilon = A^h_\varepsilon(x) = A^h(\frac{x}{\varepsilon})$.

Для тензора A из (2.6) усредненный тензор $A^{\rm hom}$ можно определить по формуле

$$A^{\rm hom}\xi\cdot\xi=\min_{v\in V_{\rm pot}(Y,d\mu)}\int\limits_Y A(\xi+v)\cdot(\xi+v)d\mu. \tag{2.7}$$

Из (2.3), (2.5) вытекает невырожденность тензора $A^{\rm hom}$.

Условие невырожденности меры (2.3) несущественно для дальнейшего, оно лишь упрощает формулировку результатов и их доказательство. В отсутствии условия (2.3) можно утверждать лишь неотрицательность усредненного тензора $A^{\rm hom}$.

2.3. Решение задачи (1.3) удовлетворяет условию ограниченности (1.5). Видим, что необходимо изучать последовательности вектор-функций, ограниченных в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ вместе со своим симметрическим градиентом.

Сформулируем некоторые специальные свойства двухмасштабной сходимости вектор-функций $u^{\varepsilon,h}\in L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d$, которые вытекают из общей теории двухмасштабной сходимости при совместном изучении последовательностей $u^{\varepsilon,h}$ и $e(u^{\varepsilon,h})$.

Рассмотрим последовательность $u^{\varepsilon,h}\in C^\infty(\Omega)^d$ такую, что

$$\begin{gathered} u^{\varepsilon,h},\quad e(u^{\varepsilon,h})\ \text{ограничены в}\ L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h),\ \text{т.е.}\\ \limsup_{\varepsilon\to0}\int\limits_\Omega(|u^{\varepsilon,h}|^2+|e(u^{\varepsilon,h})|^2)d\mu_\varepsilon^h<\infty. \end{gathered}\tag{2.8}$$

Переходя, быть может, к подпоследовательности, будем считать, что

$$u^{\varepsilon,h}(x)\xrightarrow{2}u(x,y),\qquad e(u^{\varepsilon,h})\xrightarrow{2}p(x,y). \tag{2.9}$$

В следующей теореме уточняются свойства этих сходимостей. Далее Ω – ограниченная липшицева область.

Теорема 2.1. *Пусть $h>0, h=h(\varepsilon)\to0$ и выполнены условия* (2.2)–(2.6). *Тогда*

$$u(x,y)=u(x)\in H^1(\Omega)^d,\quad u^{\varepsilon,h}\rightharpoonup u(x), \tag{2.10}$$

$$\textit{если}\ u^{\varepsilon,h}\in C_0^\infty(\Omega)^d,\ \textit{то}\ u(x)\in H_0^1(\Omega)^d;$$

$$p(x,y)=e(u(x))+v(x,y),\quad v\in L^2(\Omega,V_{\rm pot}(Y,d\mu)); \tag{2.11}$$

если дополнительно выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} A^h_\varepsilon e(u^{\varepsilon,h})\cdot e_y(w(\frac{x}{\varepsilon}))\varphi(x)d\mu^h_\varepsilon = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall w\in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d, \tag{2.12}$$

то

$$A^h_\varepsilon e(u^{\varepsilon,h}) \rightharpoonup A^{\mathrm{hom}}e(u) \tag{2.13}$$

и в (2.11) $v(x,y) = v(\xi,y)|_{\xi=e(u)}$, *где* $v(\xi,y) = v(y)$ *– минимизант задачи* (2.7);

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} A^h_\varepsilon e(u^{\varepsilon,h})\cdot e(u^{\varepsilon,h})d\mu^h_\varepsilon \geqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{Y} A(e(u)+v)\cdot(e(u)+v)dxd\mu \geqslant \int\limits_{\Omega} A^{\mathrm{hom}}e(u)\cdot e(u)dx. \tag{2.14}$$

Утверждения теоремы верны также, если всюду $h\equiv 0$ *и* $\mu^0_\varepsilon = \mu_\varepsilon$, $A^0_\varepsilon = A_\varepsilon = A(\frac{x}{\varepsilon})$.

Полное доказательство этой теоремы опускаем, так как оно во многом повторяет докательства аналогичных утверждений для скалярных и векторных пространств из [6, §4],[7, §9]. Ключевыми в нашем доказательстве являются аппроксимативные условия для меры μ^h и

Лемма об аппроксимации [7, лемма 9.3]. *Множество векторов* $a = \mathrm{div}_\mu b$ *плотно в* $\mathcal{R}(\mu)^\perp$.

Покажем, как используются эти факты на примере вывода соотношений (2.10), (2.11).

Сначала установим структуру двухмастабного предела из $(2.9)_1$: $u(x,y) = u(x)$. Пусть a^h, b^h из аппроксимативного свойства (i). Тогда

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega} b^h(\frac{x}{\varepsilon})\cdot e(\psi)d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_{\Omega} a^h(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\psi d\mu^h_\varepsilon, \quad \psi\in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Полагая $\psi = u^{\varepsilon,h}\phi, \quad \phi\in C_0^\infty(\Omega)$, получаем

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega}\phi b^h(\frac{x}{\varepsilon})\cdot e(u^{\varepsilon,h})d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_{\Omega}\phi a^h(\frac{x}{\varepsilon})\cdot u^{\varepsilon,h}d\mu^h_\varepsilon + \varepsilon\int\limits_{\Omega}[u^{\varepsilon,h}\times\nabla\phi]\cdot b^h(\frac{x}{\varepsilon})d\mu^h_\varepsilon.$$

Отсюда, используя свойства функций $u^{\varepsilon,h}$, a^h, b^h, а также свойство **(v)** двухмасштабной сходимости, после перехода к пределу выводим $\int\limits_\Omega\int\limits_Y u(x,y)\cdot\phi(x)a(y)dxd\mu = 0$, что по лемме об аппроксимации в силу (2.2) дает $u(x,y) = u(x)$, и $(2.10)_2$ доказано.

Теперь пусть b, b^h из аппроксимативного условия (ii). Из того, что $b^h \in V_{\rm sol}(Y, d\mu^h)$, можно получить равенство $\int\limits_\Omega e(\psi)\cdot b^h(\frac{x}{\varepsilon})d\mu^h_\varepsilon = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega)^d$, из которого, взяв $\psi(x) = u^{\varepsilon,h}(x)\varphi(x)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, выводим соотношение

$$\int\limits_\Omega e(u^{\varepsilon,h}(x))\cdot\varphi(x)b^h(\frac{x}{\varepsilon})d\mu^h_\varepsilon = -\int\limits_\Omega (u^{\varepsilon,h}(x)\times\nabla\varphi(x))\cdot b^h(\frac{x}{\varepsilon})d\mu^h_\varepsilon.$$

Переход к пределу (см. (2.9), $(2.10)_2$ и свойство двухмасштабной сходимости **(v)**) дает предельное равенство

$$\int\limits_\Omega\int\limits_Y p(x,y)\cdot\varphi(x)b(y)\,dxd\mu = -\int\limits_\Omega\int\limits_Y u(x)\times\nabla\varphi(x)\cdot b(y)dxd\mu,$$

где $p(x,y) \in L^2(\Omega\times Y,\, dx\times d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$. Полагая $\eta = \int\limits_Y b(y)d\mu$ и преобразуя правую часть предельного равенства к виду (с учетом соотношений $b \in V_{\rm sol}(Y, d\mu)$ и $e(\varphi u) = \varphi e(u) + 1/2(\nabla\varphi\times u + u\times\nabla\varphi)$)

$$-\int\limits_\Omega\int\limits_Y e(u(x))\varphi(x)\cdot b(y)dxd\mu = -\int\limits_\Omega e(u)\cdot\eta\varphi(x)\,dx,$$

получаем $e(u)\cdot\eta = -\int\limits_Y p(x,y)\cdot b(y)d\mu \in L^2(\Omega)$. Отсюда, поскольку η может быть произвольной симметрической матрицей (см. замечания после (2.4)), $e(u) \in L^2(\Omega)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ и по неравенству Корна $u \in H^1(\Omega)^d$ ($(2.10)_1$ доказано). Тогда предельное равенство означает $\int\limits_\Omega\int\limits_Y (p(x,y) - e(u))\cdot b(y)\varphi(x)dxd\mu = 0$, откуда ввиду произвольности $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $b \in V_{\rm sol}(Y, d\mu)$ следует соотношение (2.11).

2.4. Свяжем с ограниченной липшицевой областью Ω пространство $\mathcal{H}^{\varepsilon,h}$ - замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)^d$ по норме $(\int\limits_\Omega(|\varphi|^2 +$

$|e(\varphi)|^2)\,d\mu_\varepsilon^h)^{\frac12}$. Изучим следующую задачу теории упругости

$$u^{\varepsilon,h}\in\mathcal{H}^{\varepsilon,h},\quad \int_\Omega (A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h})\cdot e(\varphi)+u^{\varepsilon,h}\cdot\varphi)\,d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega f^{\varepsilon,h}\cdot\varphi\,d\mu_\varepsilon^h\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)^d, \tag{2.15}$$

где $f^{\varepsilon,h}$ ограничены в $L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d$, тензор $A_\varepsilon^h=A^h(\frac{x}{\varepsilon})$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.6).

Существование и единственность решения как пары $u^{\varepsilon,h}$, $e(u^{\varepsilon,h})$ следует из теоремы Рисса.

Введем усредненную задачу

$$u\in H_0^1(\Omega)^d,\quad \int_\Omega (A^{hom}e(u)\cdot e(\varphi)+u\cdot\varphi)\,dx=\int_\Omega f\cdot\varphi\,dx\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)^d. \tag{2.16}$$

Очевидны существование и единственность этой задачи в силу постоянства и невырожденности тензора A^{hom}.

Связь между решениями задач (2.15), (2.16) устанавливает следующая

Теорема 2.2. *Пусть $h>0$, $h(\varepsilon)\to 0$ и выполнены условия* (2.2)–(2.6). *Тогда, если*

$$f^{\varepsilon,h}(x)\rightharpoonup f(x)\ \text{ в } L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d, \tag{2.17}$$

то

$$u^{\varepsilon,h}(x)\rightharpoonup u(x)\ \text{ в } L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^d, \tag{2.18}$$

$$e(u^{\varepsilon,h}(x))\overset{2}{\rightharpoonup} e(u(x))+v(x,y)\quad \text{ в } L^2(\Omega,d\mu_\varepsilon^h)^{\frac{d(d+1)}{2}} \tag{2.19}$$

где

$$v(x,y)=v(\xi,x)|_{\xi=e(u(x))},\quad v(\xi,x)=v(y)\ \text{ – минимизант задачи (2.7)}, \tag{2.20}$$

т.е. $\operatorname{div}_y A(e(u(x))+v(x,y))=0$. *Если сходимость в* (2.17) *является сильной, то сильными будут и сходимости решений и их градиентов в* (2.18) *и* (2.19), *при этом имеет место сходимость энергий*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h})\cdot e(u^{\varepsilon,h})\,d\mu_\varepsilon^h=\int_\Omega A^{\rm hom}e(u)\cdot e(u)\,dx. \tag{2.21}$$

Утверждения теоремы верны также при $h \equiv 0$, *когда* $\mu_\varepsilon^0 = \mu_\varepsilon$, *с очевидными изменениями в формулировках.*

Доказательство. Из интегрального тождества (2.15) с $\varphi = u^{\varepsilon,h}$ следует условие ограниченности (2.8), благодаря которому, переходя, быть может, к подпоследовательности (см. свойство **(i)** двухмасштабной сходимости), считаем выполненными соотношения (2.9), (2.10).

Взяв в тождестве (2.15) пробную функцию вида $\varphi(x) = \varepsilon\psi(x)w(\varepsilon^{-1}x)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $w \in C_{per}^\infty(Y)^d$, после перехода к пределу получаем условие (2.12), из которого вытекает сходимость (2.13). Тогда можно перейти к пределу в тождестве (2.15) с произвольной функцией $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, в результате чего получаем тождество (2.16) для предельной функции u. В силу единственности решения задачи (2.16) сходимость (2.18) доказана для всей последовательности ε.

Пусть в (2.17) имеем сильную сходимость $f^{\varepsilon,h} \to f$. Сравним энергетические равенства для задач (2.15), (2.16)

$$\int_\Omega [A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) + u^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h}]\, d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega f^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h}\, d\mu_\varepsilon^h,$$

$$\int_\Omega [A^{\mathrm{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u]\, dx = \int_\Omega f \cdot u\, dx.$$

Поскольку слабая сходимость (2.18) уже доказана, то по определению сильной сходимости $\int_\Omega f^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h}\, d\mu_\varepsilon^h \to \int_\Omega f \cdot u\, dx$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega [A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) + u^{\varepsilon,h} \cdot u^{\varepsilon,h}]\, d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega [A^{\mathrm{hom}} e(u) \cdot e(u) + u \cdot u]\, dx.$$

Из свойств полунепрерывности для двухмасштабной сходимости (см. **(ii)** и (2.14)) выводим отсюда сходимость энергий (2.21), а также сходимость норм $\int_\Omega |u^{\varepsilon,h}|^2\, d\mu_\varepsilon^h \to \int_\Omega |u|^2\, dx$. Из сходимости энергий (2.21) следует, что в соотношениях (2.14) для решения $u^{\varepsilon,h}$ всюду имеют место равенства. В частности,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(u^{\varepsilon,h}) d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega \int_Y A(e(u) + v) \cdot (e(u) + v) dx d\mu.$$

Отсюда в силу критериев сильной сходимости **(iii)**, **(viii)** получаем сильную сходимость решений и их градиентов. Теорема доказана.

В следующей теореме мера μ^h удовлетворяет дополнительному требованию, а именно пусть выполнено равномерное (по h) неравенство Корна для периодических функций

$$\int\limits_Y |\varphi|^2 \, d\mu^h \leqslant c \int\limits_Y |e(\varphi)|^2 \, d\mu^h \quad \forall \varphi \in C^\infty_{\text{per}}(Y)^d, \quad \int\limits_Y \varphi \, d\mu^h = 0. \tag{2.22}$$

Из него, в частности, вытекает возможность представить матрицу $v \in V_{pot}(Y, d\mu^h)$ в виде $v = e(w)$, $w \in H^1_{\text{per}}(Y, d\mu^h)^d$. Поэтому и минимизант вариационной задачи

$$A_h^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \min_{v \in V_{pot}(Y, d\mu^h)} \int\limits_Y A^h(\xi + v) \cdot (\xi + v) \, d\mu^h \tag{2.23}$$

имеет представление через потенциал:

$$v^h(\xi, y) = e_y(w^h(\xi, y)), \quad w^h(\xi, y) \in H^1_{per}(Y, d\mu^h)^d,$$
$$\text{т.е. } \operatorname{div}_{\mu^h} A^h(\xi + e_y(w^h)) = 0. \tag{2.24}$$

Теорема 2.3 (о корректоре). *Пусть в предположениях теоремы 2.2* $f^{\varepsilon,h} \to f$ *в* $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)^d$, $u \in C^2(\overline{\Omega})^d$. *Тогда, если* $u_1(x, y) = w^h(e(u(x)), y)$, $w^h(\xi, y)$ *из (2.24), то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega |e(u^{\varepsilon,h}(x) - u(x) - \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))|^2 \, d\mu^h_\varepsilon = 0. \tag{2.25}$$

Доказательство. По теореме 2.2

$$e(u^{\varepsilon,h}(x)) \xrightarrow{2} e(u(x)) + v(x, y) = p(x, y). \tag{2.26}$$

Теперь докажем сходимость

$$v^h(\xi, y) \to v(\xi, y) \text{ в } L^2(Y, d\mu^h)^d \tag{2.27}$$

для минимизантов задач (2.23) и (2.7). Из интегрального тождества для v^h

$$v^h \in V_{pot}(Y, d\mu^h), \quad \int\limits_Y A^h(\xi + v^h) \cdot e(\varphi) \, d\mu^h = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{per}(Y)^d$$

вытекает оценка $\int\limits_Y A^h v^h \cdot v^h \, d\mu^h \leqslant \int\limits_Y A^h \xi \cdot \xi \, d\mu^h$, поэтому можно считать, что $v^h \rightharpoonup v$. Аппроксимативные свойства меры μ^h обеспечивают [7,§16] свойство сохранения потенциальности при слабой сходимости матриц. Тогда переход к пределу дает

$$v \in V_{pot}(Y, d\mu), \quad \int\limits_Y A(\xi + v) \cdot e(\varphi) \, d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{per}(Y)^d,$$

и, действительно, v – минимизант задачи (2.7).

С помощью энергетических равенств для v^h, v выводим сходимость квадратических форм

$$\int\limits_Y A^h v^h \cdot v^h \, d\mu^h = -\int\limits_Y A^h \xi \cdot v^h \, d\mu^h \to -\int\limits_Y A\xi \cdot v \, d\mu = \int\limits_Y Av \cdot v \, d\mu$$

(при этом учли (2.6)), что вместе со слабой сходимостью $v^h \rightharpoonup v$ влечет (2.27), согласно критерию сильной сходимости векторов (матриц) в $L^2(Y, d\mu^h)$ (см. выше аналогичный критерий **(viii)** сильной двухмасштабной сходимости).

Нетрудно увидеть, что функция $v(x, y)$ из (2.20) имеет структуру, предусмотренную свойством **(vi)** двухмасштабной сходимости. Положим $p^h(x, y) = e(u(x)) + v^h(x, y)$, где $v^h(x, y) = v^h(\xi, y)|_{\xi = e(u(x))}$. Тогда из (2.26), (2.27) следует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega |e(u^{\varepsilon,h}) - p^h(x, \frac{x}{\varepsilon})|^2 \, d\mu^h_\varepsilon = 0$, что в силу представления $v^h(x, y) = e_y((w^h(x, y))$ с учетом (2.22) дает соотношения (2.25). Теорема доказана.

2.5. В этом пункте мы изучаем связь аппроксимативных свойств переменной борелевой меры μ^h с возможностью предельного перехода в соболевском пространстве с мерой μ^h. Здесь нам удобно рассматривать соболевские пространства теории упругости как множества пар (u, v), состоящих из вектора u и его градиента $v = e(u)$, цм. [6,7]. Например, $\mathcal{H}_{\mathrm{per}} = \mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\mu)$ есть замыкание множества $\{(\varphi, e(\varphi)), \quad \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)^d\}$ в $L^2(Y, d\mu)^d \times L^2(Y, d\mu)^{d(d+1)/2}$. Аналогично вводится пространство $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\mu^h)$.

Определение 2.4. *Скажем, что в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, \mu^h)$ возможен предельный переход, если*

$$(u, v) \in \mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\mu), \ \text{т.е.}\ v = e(u), \tag{2.28}$$

как только

$$u^h \rightharpoonup u, \quad e(u^h) \rightharpoonup v \text{ в } L^2(Y, d\mu^h). \tag{2.29}$$

Оказывается, что аппроксимативные условия и возможность предельного перехода в некотором смысле эквивалентны. Чтобы убедиться в этом, удобно оперировать *двойственным* определением соболевского пространства теории упругости (для скалярного соболевского пространства это определение введено В. В. Жиковым [15]).

Определение 2.5. *Скажем, что пара (u, v), где $u \in L^2(Y, d\mu)^d$, $v \in L^2(Y, d\mu)^{\frac{d(d+1)}{2}}$ принадлежит пространству $\tilde{\mathcal{H}}_{\rm per}$, если $\int\limits_Y a \cdot u d\mu = -\int\limits_Y b \cdot v d\mu$ как только $a = \operatorname{div}_\mu b$ (см. (2.1)).*

Непосредственно из определений выводятся следующие два утверждения.

Теорема 2.6. *Пространства $\mathcal{H}_{\rm per}$ и $\tilde{\mathcal{H}}_{\rm per}$ совпадают.*

Теорема 2.7. *Из аппроксимативного условия* (i) *следует возможность предельного перехода в $\mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h)$.*

Теорема 2.8. *Пусть выполнено условие* (2.2)*, а также равномерное по h неравенство Корна* (2.22)*. Тогда возможность предельного перехода в соболевском пространстве $\mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h)$ влечет выполнение аппроксимативных условий* (i), (ii).

Доказательство. Пусть $a = \operatorname{div}_\mu b$. Возьмем какие-то продолжения $\tilde{a}^h \to a$, $\tilde{b}^h \to b$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Для $a^h = \tilde{a}^h - \int\limits_Y \tilde{a}^h d\mu^h$ по-прежнему имеем сходимость $a^h \longrightarrow a$ в $L^2(Y, d\mu^h)$. Рассмотрим периодическую задачу

$$u^h \in \mathcal{H}_{\rm per}(Y, d\mu^h), \quad \operatorname{div} e(u^h) = \operatorname{div} \tilde{b}^h - a^h, \quad \int\limits_Y u^h d\mu^h = 0,$$

решение которой удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Y e(u^h) \cdot e(\varphi) d\mu^h = \int\limits_Y \tilde{b}^h \cdot e(\varphi) d\mu^h + \int\limits_Y a^h \cdot \varphi d\mu^h. \tag{2.30}$$

Существование решения и равномерная ограниченность u^h, $e(u^h)$ в $L^2(Y, d\mu^h)$ следует из неравенства Корна (2.22). Поэтому можно считать, что имеют место сходимости (2.29) и, значит, по предположению выполнены соотношения (2.28). Взяв в тождестве (2.30) $\varphi = u^h$, после перехода к пределу с учетом сходимостей для a^h и $\tilde{b}^h$ получаем

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_Y e(u^h)\cdot e(u^h)d\mu^h = \int\limits_Y [b\cdot e(u) + a\cdot u]d\mu = 0$$

(так как $a = \operatorname{div}_\mu b$, см. определения 2.5), т.е. $e(u^h) \longrightarrow 0$ в $L^2(Y, d\mu^h)$.

Полагая $b^h = \tilde{b}^h - e(u^h)$, получаем искомую сильную аппроксимацию матрицы b и вместе с тем аппроксимативное свойство (i). Одновременно проверено и свойство (ii), здесь $a^h \equiv \tilde{a}^h \equiv 0$. Теорема доказана.

В §4 с помощью теоремы 2.8 будут проверены аппроксимативные условия для составных мер.

3. Усреднение на составной структуре

Применим общие результаты из §2 к составным мерам.

Теорема 3.1. *Для составных мер μ, μ^h, заданных в* (1.1), *выполнены условия* (2.2)–(2.4).

Невырожденность составной меры следует из невырожденности меры Лебега. Необходимая структура множества периодических жестких перемещений установлена в [2, §6], [11]. В [11] проверены аппроксимативные условия для случая, когда F – квадратная сетка. Проверка этих условий в общем случае дана в конце §4.

На основании теоремы 3.1 извлечем некоторые следствия из результатов предыдущего параграфа для задачи Дирихле в статической постановке с переменным тензором упругости и переменной правой частью:

$$u^{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \int\limits_\Omega A_\varepsilon^h e(u^{\varepsilon,h})\cdot e(\varphi)\,d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega f^{\varepsilon,h}\cdot\varphi\,d\mu_\varepsilon^h \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)^2, \tag{3.1}$$

где $A_\varepsilon^h = A_\varepsilon^h(x) = A^h(\frac{x}{\varepsilon})$, $A^h(y)$ – семейство 1-периодических тензоров упругости, удолвлетворяющих условиям (2.5), (2.6), а правая часть $f^{\varepsilon,h} \in L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ и ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$.

Очевидно, что эта задача обобщает задачу (1.3).

Разрешимость задачи (3.1), а также условие равномерной ограниченности (2.8) вытекает из предположений на тензор A^h_ε и правую часть $f^{\varepsilon,h}$ в силу неравенства Корна (1.4).

При изучении задачи (3.1) допускаем случай $h \equiv 0$. Тогда $\mu^0_\varepsilon = \mu_\varepsilon$, $A^0 = A$, $A^0_\varepsilon = A_\varepsilon = A(\frac{x}{\varepsilon})$.

Теорема 3.2. *Пусть* $f^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup f(x)$ *в* $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)^2$. *Тогда для решений задачи* (8.1) *имеет место сходимость* (2.18), *где предельная функция* $u(x)$ *есть решение задачи* (1.6).

Пусть

$$f^{\varepsilon,h}(x) \to f(x) \text{ в } L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)^2, \tag{3.2}$$

тогда и сходимость решений будет сильной, при этом имеет место сходимость упругих энергий (2.21).

Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})^2$, *тогда имеет место сходимость с корректором вида* (2.25).

Доказательство. Без потери общности считаем, что $u^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x)$ в $L^2(\Omega, d\mu^h_\varepsilon)^2$, причем $u(x) \in H^1_0(\Omega)^2$ (см. теорему 2.1). Запишем задачу (3.1) в резольвентной форме (2.15), а именно

$$u^{\varepsilon,h} \in \mathcal{H}^{\varepsilon,h} : \int\limits_\Omega (A^h_\varepsilon e(u^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) + u^{\varepsilon,h} \cdot \varphi) d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_\Omega g^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu^h_\varepsilon,$$

где $g^{\varepsilon,h} = u^{\varepsilon,h} + f^{\varepsilon,h}$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon,h} = H^1_0(\Omega)^2$ в силу составной структуры меры μ^h из (1.1). Поскольку $g^{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup g(x) = u(x) + f(x)$, то по теореме 2.2 предельная функция u есть решение усредненной задачи (2.16) с правой частью g, а значит, и задачи (1.6). Этим исчерпан случай слабой сходимости правых частей.

В предположении (3.2) сходимость энергий устанавливается так же, как в теореме 2.2. Докажем сильную сходимость решений. Для этого рассмотрим второй вариант задачи (3.1)

$$v^{\varepsilon,h} \in H^1_0(\Omega)^2, \int\limits_\Omega A^\varepsilon_h e(v^{\varepsilon,h}) \cdot e(\varphi) d\mu^h_\varepsilon = \int\limits_\Omega z^{\varepsilon,h} \cdot \varphi d\mu^h_\varepsilon \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega), \tag{3.3}$$

где в правой части стоит произвольная вектор-функция $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$. Тогда $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$, где v – решение усредненного уравнения (1.6) с правой частью z.

Полагая в (3.4) $\varphi = u^{\varepsilon,h}$, а в (3.1) $\varphi = v^{\varepsilon,h}$, получаем по формуле Грина–Бетти равенство

$$\int\limits_\Omega u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega f^{\varepsilon,h} \cdot v^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h,$$

правая часть которого по определению сильной сходимости ($f^{\varepsilon,h} \longrightarrow f$, $v^{\varepsilon,h} \rightharpoonup v$) сходится к

$$\int\limits_\Omega f \cdot v\, dx = \int\limits_\Omega u \cdot z\, dx.$$

Последнее равенство выводится из интегрального тождества для предельных функций u, v. В результате

$$\int\limits_\Omega u^{\varepsilon,h} \cdot z^{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \to \int\limits_\Omega u \cdot z\, dx,$$

что в силу произвольноцти $z^{\varepsilon,h} \rightharpoonup z$ означает искомую сильную сходимость решений.

Сходимости с корректором для решения $u^{\varepsilon,h}$ вытекают из теоремы 2.3 и неравенства Корна (4.1) (см. §4). Теорема доказана.

4. Некоторые неравенства для составных мер и следствия из них

4.1. Рассмотрим меры λ^h, μ^h, λ_ε^h, μ_ε^h из §1.

Лемма 4.1. 1°. *Для периодических функций имеют место равномерные по $h \geqslant 0$ неравенства Корна и Пуанкаре*

$$\int\limits_Y |u|^2 d\mu^h \leqslant C_1 \int\limits_Y |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_{per}^\infty(Y)^2, \quad \int\limits_Y u d\mu^h = 0, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_Y v^2 d\mu^h \leqslant C_2 \int\limits_Y |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_{per}^\infty(Y), \quad \int\limits_Y v d\mu^h = 0, \tag{4.2}$$

где константы C_1, C_2 зависят лишь от геометрии сетки F.

2°. *Для финитных функций имеют место равномерные по $h \geqslant 0$ неравенства Корна* (1.4) *и Фридрихса*

$$\int\limits_\Omega v^2 d\mu_\varepsilon^h \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3}$$

а также неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda_\varepsilon^h \leqslant C_0 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{4.4}$$

где $h \geqslant 0$, константа C зависит от геометрии сетки F и диаметра области Ω, а константа C_0 – лишь от геометрии сетки F.

Доказательство. 1°. Докажем неравенства (4.1), (4.2) для $h > 0$.

Из равномерного (по h) неравенства для прямоугольника $\Pi = (0, a) \times (0, b)$, в котором выделена полоса $\Pi^h = (0, h) \times (0, b)$,

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\Pi^h} \varphi^2 \, dx \leqslant c_1 \int\limits_{\Pi} (\varphi^2 + |\nabla \varphi|^2) \, dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Pi}), \quad c_1 = const(\Pi), \tag{4.5}$$

а также обычного неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_Y \varphi^2 \, dx \leqslant c_2 \int\limits_Y |\nabla \varphi|^2 \, dx, \quad \varphi \in C^\infty_{\text{per}}(Y), \quad \int\limits_Y \varphi \, dx = 0,$$

выводим

$$\int\limits_Y \varphi^2 \, d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla \varphi|^2 \, dx, \quad \varphi \in C^\infty_{\text{per}}(Y), \quad \int\limits_Y \varphi \, dx = 0.$$

Полагая $\varphi = v - m$, $m = \int\limits_Y v dx$, получаем

$$\int\limits_Y (v - m)^2 d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C^\infty_{\text{per}}(Y).$$

Отсюда следует неравенство Пуанкаре (4.2) для скалярных функций.

Следовательно, для вектор-функций имеем неравенство

$$\int\limits_Y |u|^2 d\mu^h \leqslant C \int\limits_Y |\nabla u|^2 dx, \quad u \in C^\infty_{\text{per}}(Y)^2, \quad \int\limits_Y u d\mu^h = 0,$$

из которого, используя обычное неравенство Корна для меры Лебега

$$\int\limits_Y |\nabla u|^2 dx \leqslant 2 \int\limits_Y |e(u)|^2 dx, \quad u \in C^\infty_{\text{per}}(Y)^2,$$

выводим (4.1).

При $h = 0$ и $\mu^0 = \mu$, вместо (4.5) используем неравенство для следа

$$\int\limits_Y \varphi^2 d\lambda \leqslant C \int\limits_Y (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{Y}), \quad C = \mathrm{const}(F), \quad (4.6)$$

а в остальном доказательство неравенств (4.1), (4.2) такое же, как при $h > 0$.

2°. В случае $h > 0$, исходя из (4.5), можно доказать неравенство

$$\int\limits_Y \varphi^2 d\lambda^h \leqslant C_0 \int\limits_Y (\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{Y}), \quad C_0 = \mathrm{const}(F),$$

которое после гомотетичного сжатия переходит в неравенство для квадрата εY

$$\int\limits_{\varepsilon Y} \varphi^2 d\lambda^h_\varepsilon \leqslant C_0 \int\limits_{\varepsilon Y} (\varphi^2 + \varepsilon^2 |\nabla\varphi|^2) dx, \quad \varphi \in C^\infty(\varepsilon\overline{Y}).$$

Отсюда, разбивая плоскость на непересекающиеся полуоткрытые квадраты $\mathbb{R}^2 = \bigcup\limits_i \varepsilon Y_i$, получаем неравенство (4.4):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} v^2 d\lambda^h_\varepsilon = \sum_i \int\limits_{\varepsilon Y_i} v^2 d\lambda^h_\varepsilon \leqslant C_0 \sum_i \int\limits_{\varepsilon Y_i} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx \leqslant$$
$$C_0 \int\limits_{\mathbb{R}^2} (v^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|^2) dx.$$

Из (4.4), используя неравенство Фридрихса

$$\int\limits_\Omega v^2 dx \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega), \quad C = \mathrm{const}(\Omega),$$

выводим неравенство (4.3), из которого следует (1.4) по неравенству Корна

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \leqslant 2 \int\limits_\Omega |e(u)|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega)^2, \qquad (4.7)$$

В случае $h = 0$ доказательство приведенных неравенств исходит из оценки (4.6). Лемма доказана.

4.2. Докажем с помощью неравенства (4.4) некоторые специфические свойства сходимости в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ с составной мерой μ_ε^h.

Лемма 4.2. *Имеет место сходимость*

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_\Omega v^2 d\lambda_\varepsilon^h = \int_\Omega v^2 dx, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.8}$$

Доказательство. Для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ равенства (4.8) следует из слабой сходимости мер $d\lambda_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$. Для произвольной $v \in H_0^1(\Omega)$ имеем оценку

$$\left|\int_\Omega v^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_\Omega v^2 dx\right| \leqslant$$
$$\int_\Omega |v - v_\delta|^2 d\lambda_\varepsilon^h + \left|\int_\Omega v_\delta^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_\Omega v_\delta^2 dx\right| + \left|\int_\Omega v_\delta^2 dx - \int_\Omega v^2 dx\right|,$$

в которой используем

$$v_\delta \in C_0^\infty(\Omega), \quad |v - v_\delta|^2_{H^1(\Omega)} < \delta, \tag{4.9}$$

и, значит в силу (4.4)

$$\int_\Omega |v - v_\delta|^2 d\lambda_\varepsilon^h < C_0\delta.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\Omega v^2 d\lambda_\varepsilon^h - \int_\Omega v^2 dx\right| \leqslant C\delta$$

где δ – любое, а константа C не зависит от δ. Отсюда следует формула (4.8). Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Если последовательность $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ такова, что*

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ в } H_0^1(\Omega), \quad v_\varepsilon \to v \text{ в } L^2(\Omega), \tag{4.10}$$

то

$$v_\varepsilon \to v \text{ в } L^2(\Omega, d\lambda_\varepsilon^h), \quad v_\varepsilon \to v \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h), \tag{4.11}$$

Доказательство. Согласно критерию сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ и свойству полунепрерывности снизу (см.§2) для доказательства сходимости $(4.11)_1$ ($(4.11)_2$ следует из $(4.11)_1$ и $(4.10)_2$) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega v_\varepsilon\varphi d\lambda_\varepsilon^h = \int\limits_\Omega v\varphi dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_Y |v_\varepsilon|^2 d\lambda_\varepsilon^h \leqslant \int\limits_Y u^2 dx. \tag{4.12}$$

Для v_δ из (4.9) имеет место представление

$$\int\limits_\Omega v_\varepsilon\varphi d\lambda_\varepsilon^h - \int\limits_\Omega v\varphi dx = \int\limits_\Omega (v_\varepsilon - v)\varphi d\lambda_\varepsilon^h + \int\limits_\Omega (v - v_\delta)\varphi d\lambda_\varepsilon^h +$$
$$\left(\int\limits_\Omega v_\delta\varphi d\lambda_\varepsilon^h - \int\limits_\Omega v_\delta\varphi dx\right) + \int\limits_\Omega (v_\delta - v)\varphi dx.$$

В последней сумме второе и четвертое слагаемое можно оценить, используя $(4.9)_2$ и (4.4):

$$\left|\int\limits_\Omega (v - v_\delta)\varphi d\lambda_\varepsilon^h\right| \leqslant C_\varphi\delta, \quad \left|\int\limits_\Omega (v_\delta - v)\varphi dx\right| \leqslant C_\varphi\delta,$$

а пределы при $\varepsilon\to 0$ от первого и третьего слагаемых равны нулю, так как при $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_\Omega |v_\varepsilon - v|^2 d\lambda_\varepsilon^h \leqslant C_0\int\limits_\Omega \Big(|v_\varepsilon - v|^2 + \varepsilon^2|\nabla(v_\varepsilon - v|^2\Big)dx =$$
$$C_0\int\limits_\Omega |v_\varepsilon - v|^2 dx + O(\varepsilon^2) = o(1), \tag{4.13}$$

в силу (4.4) и (4.10),

$$\int\limits_\Omega v_\delta\varphi d\lambda_\varepsilon^h \to \int\limits_\Omega v_\delta\varphi dx, \text{ вследствие сходимости мер } d\lambda_\varepsilon^h \rightharpoonup dx.$$

Поэтому

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_\Omega v_\varepsilon\varphi d\lambda_\varepsilon^h - \int\limits_\Omega v\varphi dx\right) \leqslant C_\varphi\delta,$$

отсюда в силу произвольности δ вытекает $(4.12)_1$.

Сходимость $(4.12)_2$ следует из (4.13) и (4.8):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |v_\varepsilon|^2 d\lambda_\varepsilon^h \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |v_\varepsilon - v|^2 d\lambda_\varepsilon^h + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega v^2 d\lambda_\varepsilon^h = \int_\Omega v^2 dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4 (Принцип компактности). 1°. *Последовательность функций $v^{\varepsilon,h} \in C_0^\infty(\Omega)$, таких что*

$$v^{\varepsilon,h}, \quad \nabla v^{\varepsilon,h} \text{ ограничены в } L^2(\Omega, dx), \tag{4.14}$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.

2°. *Последовательность вектор-функций $u^{\varepsilon,h} \in C_0^\infty(\Omega)^2$, таких что*

$$u^{\varepsilon,h}, \quad e(u^{\varepsilon,h}) \text{ ограничены в } L^2(\Omega, dx), \tag{4.15}$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$.

Простым следствием из теоремы 4.3 является первое утверждение этой теоремы. Из него вытекает второе утверждение, поскольку в силу неравенства Корна (4.7) условие (4.15) влечет условие (4.14) для каждой компоненты вектора $u^{\varepsilon,h}$.

Лемма 4.5. *Если в* (4.8) *или* (4.10) *заменить $H_0^1(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, то утверждения леммы* 4.2 *и теоремы* 4.3 *останутся в силе.*

Доказательство. Из слабой сходимости мер $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$ (см. определение в §1) следует сходимость [8, лемма 1.1]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega \varphi\, dx \quad \varphi \in C(\overline{\Omega}).$$

Отсюда ясно, что для вывода (4.8) в случае $v \in H^1(\Omega)$ рассматриваем в (4.9) $v_\delta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и в остальном повторям прежнее доказательство. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Если $v \in H^1(\Omega)$, то $v \to v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.*

Если $v_\varepsilon \to v$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, $v \in H^1(\Omega)$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |v_\varepsilon - v|^2 d\mu_\varepsilon^h = 0.$

Доказательство. Для вывода первого утверждения возьмем $v_\varepsilon = v$ и воспользуемся леммой 4.5. Для вывода второго утверждения заметим сходимость $(v_\varepsilon - v) \to 0$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, которая по критерию сильной сходимости влечет искомое соотношение.

В заключение этого параграфа, располагая, наконец, необходимыми свойствами L^2-пространств с составной мерой, дадим вывод основной для нас теоремы 1.1, а также проверку аппроксимативных условий для составной меры, выполнение которых предполагалось ранее в §3.

Доказательство теоремы 1.1. Поскольку $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$, то $f^{\varepsilon,h} \equiv f \to f$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$ (см. лемму 4.6). Отсюда, по теореме 3.2, получаем сходимость энергий (1.8), а также сильную сходимость решений. Последняя по лемме 4.6 влечет (1.7). Теорема 1.1 доказана.

Проверка аппроксимативных условий для составной меры в общем случае основана на теореме 2.8. В данной ситуации выполнены условие (2.2), а также неравенство Корна (2.22) (см. более точное неравенство (4.1)). Возможность предельного перехода в $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\mu^h)$ (см. определение 2.4) вытекает из возможности предельного перехода в $\mathcal{H}_{\mathrm{per}}(Y, d\lambda^h)$, что в свою очередь можно вывести по теореме 2.7 из аппроксимативных условий для меры λ^h (см. их проверку в [12]).

5. О сходимости спектра

Задачи (3.1) и (1.6) можно записать в операторной форме $\mathcal{A}^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$, $\quad \mathcal{A}u = f$, где $\mathcal{A}^\varepsilon = \mathcal{A}^{\varepsilon,h}$, $f^\varepsilon = f^{\varepsilon,h}$ при $h = h(\varepsilon)$, $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}$ – неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $H_\varepsilon = L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)^2$ и $H = L^2(\Omega, dx)^2$ соответственно, $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}$ имеют компактную резольвенту.

Отметим, что H_ε – переменное пространство, поэтому неприменимы обычные теоремы о спектральных асимптотиках [16]. Само определение сходимости в пространстве H_ε требует переосмысления классической теории.

Далее мы рассматриваем общую ситуацию, в которую вписывается наш конкретный случай: формулируемые ниже условия $(\Gamma_1)-(\Gamma_3)$ выполнены для операторов задач (3.1), (1.6), согласно полученным ранее результатам.

Пусть оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ имеет компактную резольвенту при $\varepsilon < \varepsilon_0$, т.е. его спектр состоит из сходящейся к ∞ последовательности конечнократных собственных значений

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant \lambda_1^\varepsilon \leqslant \lambda_2^\varepsilon \leqslant \ldots \to \infty, \\
\{u_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty - \text{ ортонормированный базис в } H_\varepsilon, \quad \mathcal{A}^\varepsilon u_i^\varepsilon = \lambda_\varepsilon^i u_i^\varepsilon.
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

Для ограниченных операторов B_ε, B, действующих в пространстве H_ε и H соответственно, таких что $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} ||B_\varepsilon|| < \infty$, сильная сходимость $B_\varepsilon \to B$ означает: $B_\varepsilon u_\varepsilon \to Bu$ в H_ε как только $u_\varepsilon \to u$ в H_ε.

Введем следующие условия:

(Γ_1) $(\mathcal{A}^\varepsilon + \lambda)^{-1} \to (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \quad \forall \lambda > 0$;

(Γ_2) в пространстве H_ε имеет место принцип компактности, а именно

$$\text{если } \limsup_{\varepsilon\to 0}((\mathcal{A}^\varepsilon + 1)u_\varepsilon, u_\varepsilon)_\varepsilon < \infty, \text{ то } \exists \varepsilon' : u'_\varepsilon \to u.$$

(Γ_3) $\mathcal{A}$ имеет компактную резольвенту.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon = \int\limits_0^\infty \lambda dE_\varepsilon(\lambda), \mathcal{A} = \int\limits_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ – спектральные разложения операторов $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\mathcal{A}$.

Теорема 5.1. *В предположении (Γ_1), если λ не есть собственное значение $\mathcal{A}$, то $E_\varepsilon(\lambda) \to E(\lambda)$.*

Теорема 5.2. *Из (Γ_1) и (Γ_2) следует сходимость по Хаусдорфу $Sp\mathcal{A}^\varepsilon \longrightarrow Sp\mathcal{A}$:*

$(H_1) \forall \lambda \in Sp\mathcal{A} \quad \exists \lambda_\varepsilon \in Sp\mathcal{A}_\varepsilon$, такое что $\lambda_\varepsilon \to \lambda$;

(H_2) если $\lambda_\varepsilon \in Sp\mathcal{A}_\varepsilon$, $\lambda_\varepsilon \to \lambda$, $\lambda < \infty$, то $\lambda \in Sp\mathcal{A}$.

Теорема 5.1 и первый пункт теоремы 5.2 доказаны в [17, §8] (даже в более общей ситуации). Докажем второй пункт теоремы 5.2. В соотношениях для собственных значений λ_ε

$$\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon, \quad (u^\varepsilon, u^\varepsilon)_\varepsilon = 1$$

можно считать, что $u^\varepsilon \to u$ (следует из (Γ_2)). После перехода к пределу (испоьзуем (Γ_1) и свойство сохранения нормы при сильной сходимости)

$$\mathcal{A}u = \lambda u, \quad (u, u) = 1,$$

откуда следует $\lambda \in Sp\mathcal{A}$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.3. *В предположении (Γ_1), если λ не есть собственное значение $\mathcal{A}$, то*

$$\dim E_\varepsilon(\lambda) H_\varepsilon \geqslant \dim E(\lambda) H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – ортонормированная система в $E(\lambda)H$. Для любого i существует $\hat{u}_i^\varepsilon \in H_\varepsilon$, такой что $\hat{u}_i^\varepsilon \to u_i$. Пусть $u_i^\varepsilon = E_\varepsilon(\lambda)\hat{u}_i^\varepsilon$, тогда по теореме 5.1

$$(u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_\varepsilon = (E_\varepsilon(\lambda)\hat{u}_i^\varepsilon, \hat{u}_j^\varepsilon)_\varepsilon \to (E(\lambda)u_i, u_j) = (u_i, u_j) = \delta_{ij},$$

и, значит, матрица Грамма векторов $u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon$ невырожденна при ε достаточно малых, так как $\det||(u_i^\varepsilon, u_j^\varepsilon)_\varepsilon||_{i,j=1}^n \to 1$. Следовательно, $u_i^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon$ – линейно независимы и неравенство (5.2) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 5.4. *В предположении* (Γ_1), (Γ_2), *если* λ *не является собственным значением* $\mathcal{A}$, *то*

$$\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon \leqslant \dim E(\lambda)H \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{5.3}$$

Доказаьельство. Взяв произвольное λ, считаем, что

$$\dim E(\lambda)H = n < \infty, \tag{5.4}$$

(в случае $\dim E(\lambda)H = \infty$ доказывать нечего.) Рассмотрим системы векторов $u_1, \dots, u_n$ и $u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon$ из доказательства теоремы 5.3, при этом первая из них – базис в пространстве $E(\lambda)H$. Предположив, что (5.3) неверно, найдем подпоследовательность $\varepsilon' \subset \varepsilon$, такую что при $\varepsilon = \varepsilon' \to 0$ $\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon > n$ и существует $u^\varepsilon \in E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon$ со следующими свойствами: $(u^\varepsilon, u_i^\varepsilon)_\varepsilon = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\quad ||u^\varepsilon||_\varepsilon = 1$, $\quad \mathcal{A}^\varepsilon u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon$, $\quad \lambda^\varepsilon \leqslant \lambda$.

В силу (Γ_1), (Γ_2) по некоторой подпоследовательности $u^\varepsilon \to u$, причем $\mathcal{A}u = \bar{\lambda}u$, $\bar{\lambda} \leqslant \lambda$, $||u|| = 1$, $(u, u_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, откуда следует $\dim E(\lambda)H \geqslant n+1$, что противоречит (5.4). Значит, неравенство (5.3) верно и теорема доказана.

Из теорем 5.3 и 5.4 вытекает

Теорема 5.5. *В предположении* (Γ_1), (Γ_2), *если* λ *не есть собственное значение* $\mathcal{A}$, *то*

$$\dim E_\varepsilon(\lambda)H_\varepsilon = \dim E(\lambda)H, \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{5.5}$$

Теорема 5.6. *Пусть* λ *– собственное значение кратности* r *оператора* $\mathcal{A}$ *и в интервале* $I = (-\delta + \lambda, \lambda + \delta)$ *нет других собственных* *значений оператора $\mathcal{A}$. Тогда для достаточно малых ε в интервале I содержится ровно r собственных значений оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ с учетом их кратности.*

Пусть $P_\varepsilon(\lambda) = E_\varepsilon(\lambda+\delta) - E_\varepsilon(\lambda-\delta)$, $P(\lambda) = E(\lambda+\delta) - E(\lambda-\delta)$. По предположению $P_\varepsilon(\lambda) \to P(\lambda)$ (см. теорему 5.1). Для доказательства теоремы 5.6 достаточно проверить соотношение $\dim P_\varepsilon(\lambda) H_\varepsilon = \dim P(\lambda) H$. Но оно следует из аналогичных (5.2) и (5.3) неравенств.

Если оператор $\mathcal{A}$ имеет компактную резольвенту, то его спектр состоит из сходящейся к ∞ последовательности конечнократных собственных значений

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \to \infty,$$

$$\{u_i\}_{i=1}^\infty - \text{ ортонормированный базис в } H, \quad \mathcal{A} u_i = \lambda_i u_i. \qquad (5.6)$$

Далее $N(\lambda)$ – подпространство собственных векторов с собственным значением $\lambda \in Sp(\mathcal{A})$.

Теорема 5.7. *Пусть выполнены условия* (Γ_1)-(Γ_3). *Тогда (см.* (5.1), (5.6)*) собственные значения и собственные векторы операторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}$ связаны соотношениями:*

(i) $\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k$ *при* $\varepsilon \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

(ii) $\exists \varepsilon' \subset \varepsilon : u_k^{\varepsilon'} \to U_k \in N(\lambda_k)$, $||U_k|| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$;

(iii) $u_k^\varepsilon \to u_k$, *если* λ_k *– некратное собственное значение.*

Доказательство. Для фиксированного k рассмотрим последовательность $\hat\lambda_1 < \hat\lambda_2 < \ldots < \hat\lambda_j = \lambda_k$ из всех различных собственных значений оператора $\mathcal{A}$, не превосходящих λ_k, при этом r_i – кратность $\hat\lambda_i$, $r_1 + \ldots + r_j = m \geqslant k$. Выберем непересекающиеся интервалы $I_1, \ldots, I_j$, содержащие по одной точке $\hat\lambda_i$. По теореме 5.6 при достаточно малых ε m первых собственных значений $\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \lambda_m^\varepsilon$ попадают последовательно в интервалы $I_1, \ldots, I_j$ в соответствии с кратностями $r_1, \ldots, r_j$. Стягивая интервал I_i к точке $\hat\lambda_i$, получаем сходимость $\lambda_i^\varepsilon \to \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$. В частности, $\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k$. Утверждение (i) доказано. Из него в силу (Γ_1), (Γ_2) следует (ii).

Рассмотрим случай некратного λ_k. Тогда для подпоследовательности ε' из пункта (ii) $U_k = \pm u_k$, так как $\|U_k\| = \|u_k\| = 1$, $dim N(\lambda_k) = 1$. Найдется последовательность U_k^ε, $U_k^\varepsilon \to U_k$, для которой $(u_k^{\varepsilon'}, U_k^{\varepsilon'})_{\varepsilon'} \geqslant 0$. Тогда в пределе $(u_k, U_k) \geqslant 0$ и значит $U_k = u_k$, Отсюда следует утверждение (iii). Теорема доказана.

Литература

1. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины.* — Доклады РАН **385**, No. 5 (2002), 590–595.
2. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины.* — Матем. сб. **194**, No. 5 (2003), 61–95.
3. С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных структурах критической толщины.* — Доклады РАН **387**, No. 4 (2002), 447–451.
4. С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости на периодических стержневых каркасах критической толщины.* — Доклады РАН **394**, No. 1 (2004), 26–31.
5. С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости на периодических ящичных и стержневых каркасах критической толщины.* — Современная математика и ее приложения. **12** (2004), 51–98.
6. В. В. Жиков, *Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости.* — Матем. сб. **191**, No. 2 (2000), 31–72.
7. В. В. Жиков, *Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах.* — Известия РАН. Серия матем. **66**, No. 2 (2002), 81–148.
8. В. В. Жиков, *О двухмасштабной сходимости.* — Труды семинара имени И. Г.Петровского **23** (2003), 149–187.
9. G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of gomogenization.* — SIAM J. Math. Anal. **20**, No. 5 (1989), 608–623.
10. G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence.* — SIAM J. Math. Anal. **23**, No. 5 (1992), 1482–1518.
11. С. Е. Пастухова, *Усреднение задач теории упругости для периодической составной структуры.* – Доклады РАН **395**, No. 3 (2004), 316–321.
12. С. Е. Пастухова, *Об аппроксимативных свойствах соболевских пространств теории упругости на тонких стержневых структурах.* — Современная математика и ее приложения **12** (2004), 99–106.
13. В. В. Жиков, *К технике усреднения вариационных задач.* — Функц. анализ и его приложения **33**, вып. 1 (1999), 14–29.
14. В. В. Жиков, *О весовых соболевских пространствах.* Матем. сб. **189**, No. 8 (1998), 27–58.
15. V. V. Zhikov, *Note on Sobolev space.* — Contemporary Mathematics and Its Applications **10** (2003), 54–58
16. Т.Като, Теория возмущений линейных операторов. М. Мир, 1979.
17. С. Е. Пастухова, *О сходимости гиперболических полугрупп в переменном гильбертовом пространстве.* — Труды семинара имени И. Г. Петровского **24** (2004), 216–241.

Pastukhova S. E. About homogenization of elasticity problems on combined structures.

We study elasticity problems in the plane (space) reinforced with periodic thin network (box structure). This highly contrasting medium depends on two small related parameters ε and h controlling size of periodicity cell and thickness of reinforcement. For combined structures we prove classical homogenization principle the same for any interrelation between parameters ε and h that is quite contrary to the case of thin structures. We use method of 2-scale convergence with respect to variable measure natural to combined structures.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступило 23 сентября 2004 г.

E-mail: leonowmw@cs.msu.su