Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

В. Г. Осмоловский

ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ОТ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ

1. Введение. Предположим, что двухфазовая упругая среда, занимающая ограниченную область $\Omega \subset R^m$, описывается квадратичными плотностями энергии (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до m)

$$F^{\pm}(M) = a^{\pm}_{ijkl}(e(M) - \zeta^{\pm})_{ij}(e(M) - \zeta^{\pm})_{kl}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $a^{\pm}_{ijkl}$, характеризующие упругие свойства среды каждой из фаз, постоянны в области Ω и удовлетворяют стандартным условиям симметрии и положительной определенности

$$a^{\pm}_{ijkl} = a^{\pm}_{klij} = a^{\pm}_{jikl} = a^{\pm}_{ijlk}, \quad a^{\pm}_{ijkl}\zeta_{ij}\zeta_{kl} \geqslant \delta|\zeta|^2. \tag{1.2}$$

В последнем неравенстве $\delta > 0$, $\zeta \in R^{m\times m}_s$ – пространству симметричных $m \times m$-матриц, а $|\zeta|$ – норма в пространстве $R^{m\times m}_s$, согласованная со скалярным произведением Гильберта–Шмидта

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{tr} \alpha\beta, \quad \alpha, \beta \in R^{m\times m}_s. \tag{1.3}$$

Тензоры $\zeta^{\pm} \in R^{m\times m}_s$ называются тензорами остаточной деформации, $e(M) = \frac{1}{2}(M + M^*)$ для любой $m \times m$ матрицы M.

Согласно модели теории фазовых переходов, изложенной, например, в [1], функционал энергии деформации двухфазовой упругой среды определяется равенством

$$I[u, \chi, \mu] = \int\limits_{\Omega} \{\chi(x)(F^+(\nabla u(x)) + \mu) + (1 - \chi(x))F^-(\nabla u(x))\}\, dx + \\ + \sigma \int\limits_{\Omega} |D\chi|, \tag{1.4}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант No. 02-01-00276.

где m-мерная вектор-функция $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ является полем смещений, $(\nabla u)_{ij} = u^i_{x_j}$, характеристическая функция $\chi(x)$ описывает множество, занимаемое фазой с индексом $+$, число μ задает температуру (постоянную вдоль всей области) двухфазовой упругой среды, а число $\sigma \geqslant 0$ называется коэффициентом поверхностного натяжения.

Функционал (1.4) определим на парах

$$\begin{gathered} u \in W_2^1(\Omega, R^m), \\ \chi \text{ – измеримая характеристическая функция} \end{gathered} \tag{1.5}$$

в случае $\sigma = 0$ и на парах

$$u \in W_2^1(\Omega, R^m), \text{ характеристическая функция } \quad \chi \in BV(\Omega) \tag{1.6}$$

в случае $\sigma > 0$. Последнее включение означает, что

$$\int\limits_\Omega |D\chi| \equiv \sup_{h \in C_0^1(\Omega, R^m), \quad |h(x)| \leqslant 1} \int\limits_\Omega \chi(x) \operatorname{div} h(x)\, dx < \infty.$$

Величина $\int_\Omega |D\chi|$ называется периметром носителя χ и в случае гладкой границы раздела фаз совпадает с ее площадью. Последнее слагаемое в правой части (1.4) при $\sigma > 0$ описывает поверхностную энергию границы раздела фаз.

При наличии тех или иных граничных условий на поле смещений, функция $u(x)$ будет принадлежать более узкому множеству, чем пространство $W_2^1(\Omega, R^m)$.

Состоянием равновесия двухфазовой упругой среды называется пара $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$, доставляющая функционалу (1.4) глобальный мимнимум на области его определения. Состояние равновесия называется однофазовым, если $\widehat{\chi} \equiv 0$ или $\widehat{\chi} \equiv 1$ и двухфазовым в противном случае.

Естественно *ожидать* существование таких чисел $t_\pm(\sigma)$, $-\infty < t_-(\sigma) \leqslant t_+(\sigma) < \infty$, что при $\mu < t_-(\sigma)$ функция $\widehat{\chi} \equiv 1$, при $\mu > t_+(\sigma)$ функция $\widehat{\chi} \equiv 0$, а при $\mu \in (t_-(\sigma), t_+(\sigma))$ функция $\widehat{\chi}$ не тождественна ни нулю, ни единице. Кроме того, при достаточно больших σ числа $t_-(\sigma)$ и $t_+(\sigma)$ совпадают, поскольку при больших σ наличие межфазовых границ энергетически невыгодно. Температуры $t_\pm(\sigma)$ назовем температурами фазовых переходов. В том случае, если функционал энергии зависит от дополнительных параметров, природа которых будет рассмотрена ниже, числа $t_\pm$ будут функциями σ и этих параметров.

Первое и второе слагаемые в функционале (1.4) по-разному ведут себя при изменении масштаба области Ω. Действительно, пусть

$$\begin{gathered}
\Omega_\lambda = \{\lambda x : \quad x \in \Omega\}, \quad \lambda \in (0, \infty), \\
\widetilde{u}(y) = \lambda u(x), \quad \widetilde{\chi}(y) = \chi(x), \quad \widetilde{h}(y) = h(x), \\
y = \lambda x, \quad y \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Тогда $\widetilde{u}^i_{y_j}(y) = u^i_{x_j}(x)$, $\widetilde{h}^i_{y_i}(y) = h^i_{x_i}(x)\lambda^{-1}$. Поскольку

$$\int\limits_{\Omega_\lambda} \widetilde{\chi}(y)\widetilde{h}^i_{y_i}(y)\,dy = \lambda^{m-1}\int\limits_{\Omega} \chi(x)h^i_{x_i}\,dx,$$

справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_\lambda} |D\widetilde{\chi}| = \lambda^{m-1}\int\limits_{\Omega} |D\chi|.$$

Следовательно, указывая среди аргументов функционала область интегрирования, получаем

$$I[\widetilde{u}, \widetilde{\chi}, \mu, \sigma, \Omega_\lambda] = \lambda^m I[u, \chi, \mu, \frac{\sigma}{\lambda}, \Omega]. \tag{1.8}$$

Из равенства (1.8) следует, что задача по определению состояния равновесия в области Ω_λ с температурой μ и коэффициентом поверхностного натяжения σ сводится к такой же задаче в области Ω с той же температурой, но с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma\lambda^{-1}$. Эти рассуждения показывают, что температуры фазовых переходов при $\sigma > 0$ *могут* зависеть не только от характеристик упругой среды (чисел $a^{\pm}_{ijkl}$, $\zeta^{\pm}_{ij}$, σ), но и от размеров области. Оказывается, что на справедливость этих правдоподобных рассуждений определенную коррекцию оказывают граничные условия.

В данной работе проведены исследования зависимости температур фазовых переходов от размеров области для двух типов граничных условий. В первом случае граница области подвержена гидростатическому давлению p, во втором – на границе области фиксировано нулевое поле смещений.

Для первого случая числа $t_\pm = t_\pm(p)$ (зависимость от $a^{\pm}_{ijkl}$ и $\zeta^{\pm}$ явно не указана) найдены в явном виде. Оказывается, что

$t_+(p) = t_-(p)$ для всех p. Таким образом, в первом случае температуры фазовых переходов существует и не зависит от области, занимаемой упругой средой.

Во втором случае для частного вида плотностей (1.1) доказано существование температур фазовых переходов $t_\pm = t_\pm(\sigma, \Omega)$ (зависимость от $a^\pm_{ijkl}$ и $\zeta^\pm$ явно не указана). При $\sigma > 0$ установлено существование такого числа $\lambda_* = \lambda_*(\sigma, \Omega) \in (0, \infty)$, что в Ω_λ при фиксированном σ и всех $\lambda \in (0, \lambda_*]$ числа $t_\pm(\sigma, \Omega_\lambda)$ определяются лишь характеристиками упругой среды (коэффициентами $a^\pm_{ijkl}$, $\zeta^\pm_{ij}$), не зависят от λ и совпадают друг с другом. Таким образом, во втором случае температуры фазовых переходов перестают зависеть от области Ω_λ, полученной из области Ω согласно (1.7) с достаточно малым λ. При $\lambda \to \infty$ температуры $t_\pm(\sigma, \lambda)$ стремятся к конечным пределам, которые так же не зависят от области Ω и определяются теми же характеристиками упругой среды. При $\sigma = 0$ температуры $t_\pm(0, \lambda)$ различны и не зависят от λ.

2. Формулировка результатов. Предположим, что граница области $\partial\Omega \in C^1$ и подвержена гидростатическому давлению $p \in R^1$. Тогда функционал (1.4) приобретает дополнительное слагаемое и записывается в виде

$$I[u, \chi, \mu, \sigma, p] = \int_\Omega \{\chi(F^+(\nabla u) + \mu) + (1 - \chi)F^-(\nabla u)\}\, dx + \\ + p \int_{\partial\Omega} u_n \, dS + \sigma \int_\Omega |D\chi|, \tag{2.1}$$

где u_n – нормальная компонента вектор-функции u на $\partial\Omega$.

Для удобства формулировки утверждения введем линейное отображение $A : R^{m\times m}_s \to R^{m\times m}_s$ по формуле

$$(A^\pm\zeta)_{ij} = a^\pm_{ijkl}\zeta_{kl}, \quad \zeta \in R^{m\times m}_s. \tag{2.2}$$

Из предположений (1.2) вытекает симметрия и положительная определенность этих отображений относительно скалярного произведения (1.3). Из положительной определенности $A^\pm$ следует существование обратных операторов $(A^\pm)^{-1}$.

Введем функцию

$$\mu(p) = \frac{p^2}{4}\,\mathrm{tr}[A^{-1}]I - p\,\mathrm{tr}[\zeta], \tag{2.3}$$

где $[\alpha] = \alpha^+ - \alpha^-$ – скачок величины α, I – единичная матрица в пространстве R^m. С помощью функции (2.3) определим множества $V_+, V_-, V_= \subset R^2$

$$\begin{aligned} V_+ &= \{\mu, p \colon \mu > \mu(p)\}, \\ V_- &= \{\mu, p \colon \mu < \mu(p\}, \\ V_= &= \{\mu, p \colon \mu = \mu(p)\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Положим
$$\xi^\pm(p) = \zeta^\pm - \frac{p}{2}(A^\pm)^{-1}I. \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Множество всех состояний равновесия функционала* (2.1) *задается равенством*

a) *при* $\mu, p \in V_+$
$$\widehat{\chi}(x) \equiv 0, \quad \widehat{u}(x) = x_0 + Bx + \xi^-(p)x,$$

b) *при* $\mu, p \in V_-$
$$\widehat{\chi}(x) \equiv 1, \quad \widehat{u}(x) = x_0 + Bx + \xi^+(p)x,$$

c) *при* $\mu, p \in V_=$ *и* $\sigma > 0$ *множество всех состояний равновесия состоит только из пар раздела* a) *и* b), *при* $\sigma = 0$ *к ним может добавиться двухфазовое состояние равновесия.*

Здесь x_0 *– произвольная точка в пространстве* R^m, B *– произвольная кососимметрическая матрица* ($B^* = -B$) *в пространстве* R^m.

Из теоремы 1 следует существование температур фазовых переходов $t_\pm$, для которых справедливы равенства
$$t_\pm = t_\pm(p) = \mu(p)$$
с функцией $\mu(p)$ из (2.3). Поэтому температуры фазовых переходов для функционала (2.1) определяются только давлением p и характеристиками среды (величинами $a^\pm_{ijkl}$, $\zeta^\pm$), но не зависит от области Ω и σ.

Рассмотрим теперь частный случай плотностей энергии (1.1)
$$\begin{gathered} a^\pm_{ijkl} = \frac{a}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + b\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \zeta^\pm_{ij} = c^\pm\delta_{ij}, \\ a > 0, \quad b \geqslant 0, \quad c^\pm \in R^1, \quad c^+ \neq c^-, \end{gathered} \tag{2.6}$$

для которых функции $F^{\pm}(M)$ примут вид

$$F^{\pm}(M) = a\,\mathrm{tr}(e(M) - c^{\pm}I)^2 + b\,\mathrm{tr}^2(e(M) - c^{\pm}I). \tag{2.7}$$

Фиксируем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x)$, $x \in R^m$ со свойством

$$\Delta p(x) \equiv \nu,$$

где ν – некоторая константа. В ограниченной области Ω с дважды непрерывно дифференцируемой границей рассмотрим функционал (1.4), (2.7) на следующей области определения

$$\begin{gathered} u = v + \nabla p, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \\ \chi \text{ – измеримая характеристическая функция} \end{gathered} \tag{2.9}$$

в случае $\sigma = 0$ и

$$\begin{gathered} u = v + \nabla p, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \\ \text{характеристическая функцмя} \quad \chi \in BV(\Omega) \end{gathered} \tag{2.10}$$

в случае $\sigma > 0$.

Введем функции

$$\begin{gathered} \mu_+(\nu, \sigma, \Omega) = 2\nu[c](a + bm) - m[c^2](a + bm) + \gamma(\sigma, \Omega), \\ \mu_-(\nu, \sigma, \Omega) = 2\nu[c](a + bm) - m[c^2](a + bm) - \gamma(\sigma, \Omega), \\ \sigma \geqslant 0, \quad \nu \in R^1, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где непрерывная по σ функция $\gamma(\sigma, \Omega)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} \gamma(0, \Omega) = \gamma_0 \equiv [c]^2 \frac{a + bm}{a + b}, \\ \text{существует такое} \quad \sigma_* = \sigma_*(\Omega) > 0, \quad \text{что} \\ \gamma(\sigma, \Omega) > 0, \quad \text{при} \quad \sigma \in [0, \sigma_*), \\ \gamma(\sigma, \Omega) = 0, \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant \sigma_*, \\ \gamma(., \Omega) \text{ – строго монотонно убывает} \\ \text{на интервале} \quad [0, \sigma_*]. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Для каждых фиксированных σ и Ω графики функций $\mu_\pm(.,\sigma,\Omega)$ разбивают плоскость параметров μ,ν на зоны

$$\begin{gathered} V_>(\sigma,\Omega)=\{\mu,\nu: \quad \mu>\mu_+(\nu,\sigma,\Omega\}, \\ V_<(\sigma,\Omega)=\{\mu,\nu: \quad \mu<\mu_-(\nu,\sigma,\Omega)\}, \\ V_=^\pm(\sigma,\Omega)=\{\mu,\nu: \quad \mu=\mu_\pm(\nu,\sigma,\Omega)\}, \\ V(\sigma,\Omega)=\{\mu,\nu: \quad \mu_-(\nu,\sigma,\Omega)<\mu<\mu_+(\nu,\sigma,\Omega)\} \end{gathered} \tag{2.13}$$

Заметим, что при $\sigma\in[0,\sigma_*)$ все зоны (2.13) – непустые множества, а при $\sigma\geqslant\sigma_*$

$$V(\sigma,\Omega)=\emptyset, \quad V_=^+(\sigma,\Omega)=V_=^-(\sigma,\Omega). \tag{2.14}$$

Теорема 2. *Существует такия функция $\gamma_\pm(\sigma,\Omega)$, удовлетворяющая условиям (2.12) при некотором положительном $\sigma_*=\sigma_*(\Omega)$, что в зонах (2.13) множество всех состояний равновесия функционала (1.4) с плотностями энергии (2.7) и областью определения (2.9), (2.10) задается следующими соотношениями.*

Если $\sigma\in[0,\sigma_*)$, то

при $\mu,\nu\in V_>(\sigma,\Omega)$

множество всех состояний равновесия исчерпывается парой

$$\widehat{u}\equiv\nabla p, \quad \widehat{\chi}\equiv 0,$$

при $\mu,\nu\in V_<(\sigma,\Omega)$

множество всех состояний равновесия исчерпывается парой

$$\widehat{u}\equiv\nabla p, \quad \widehat{\chi}\equiv 1,$$

при $\mu,\nu\in V(\sigma,\Omega)$

существуют только двухфазовые состояния равновесия,

при $\mu,\nu\in V_=^\pm(\sigma,\Omega)$

множество всех состояний равновесия состоит
из состояний равновесия из зон $V_>$ и $V_<$ соответственно
и хотя бы одного двухфазового состояния равновесия, если $\sigma>0$.

Если $\sigma > \sigma_*$, то характер состояний равновесия в зонах $V_>$ и $V_<$ сохраняется, а в зоне $V_=^+ = V_=^-$ существуют только оба состояния равновесия из зон $V_>$ и $V_<$.

Если $\sigma = \sigma_*$, то характер состояний равновесия в зонах $V_>$ и $V_<$ сохраняется, а в зоне $V_=^+ = V_=^-$ наряду состояний равновесия из зон $V_>, V_<$ существует хотя бы одно двухфазовое сотояние равновесия.

Фиксируем ограниченную область Ω с дважды непрерывно дифференцируемой границей и рассмотрим задачу о фазовых переходах для функционала (1.4) с плотностями энергии (2.7). Будем считать, что поле смещений на $\partial\Omega$ фиксировано и равно нулю. Последнее требование удовлетворяется при $p \equiv 0$, что приводит к равенству $\nu = 0$ и соответствующим изменениям в области определения функционала (2.9), (2.10). Как изменятся температуры фазовых переходов при замене области Ω на область Ω_λ согласно правилу (1.7)? Ответ на этот вопрос дает теорема 2. Применяя эту теорему при $\nu = 0$ и пользуясь формулой (1.8), приходим к выводу, что температуры фазовых переходов $t_\pm(\sigma, \Omega_\lambda)$ в области Ω_λ определяются с помощью функций (2.11) равенствами

$$t_\pm(\sigma, \Omega_\lambda) \equiv t_\pm(\sigma, \lambda) = \mu_\pm(0, \frac{\sigma}{\lambda}, \Omega).$$

В силу свойств (2.11)

$$\begin{gathered}
\lim_{\lambda\to\infty} t_\pm(\sigma, \lambda) = -m[c^2](a+bm) \pm [c]^2\frac{a+bm}{a+b}, \quad \text{при} \quad \sigma > 0, \\
t_\pm(\sigma, \lambda) = -m[c^2](a+bm), \quad \text{при} \quad \sigma > 0, \quad \lambda \leqslant \lambda_*, \\
t_\pm(0, \lambda) = -m[c^2](a+bm) \pm [c^2]\frac{a+bm}{a+b}.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Следовательно, при достаточно малых λ температуры фазовых переходов перестают зависеть от λ и Ω и определяются лишь характеристиками $a, b, c^\pm$ упругой среды.

Существуют различные постановки вариационной задачи о фазовых переходах в теории упругости. Эти постановки, как правило, сводятся к той или иной регуляризации функционала

$$I_0[u, \chi] = \int\limits_\Omega \{\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\, dx. \tag{2.16}$$

Регуляризация становится излишней, если функционал (2.16) достигает глобального минимума. Для плотностей (2.6) и нулевых граничных условий на поле смещений реализуется именно этот благоприятный случай. Поэтому соотношения (2.15) позволяют провести гипотетический эксперимент, доказывающий или опровергающий наличие поверхностного натяжения. Согласно (2.15) при $\sigma = 0$ температуры фазовых переходов $t_\pm$ различны и не зависят от области Ω, а при $\sigma > 0$ температуры фазовых переходов $t_\pm$ зависят от λ и при достаточно малых λ совпадают друг с другом.

3. Доказательство теоремы 1. Пользуясь формулой Стокса, получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} u_n\,dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} u\,dx = \int\limits_{\Omega} \{\chi \operatorname{div} u + (1-\chi)\operatorname{div} u\}\,dx \tag{3.1}$$

для любой характеристической функции χ. Далее

$$\operatorname{div} u = \operatorname{tr} e(\nabla u) = \langle e(\nabla u), I\rangle = 2\langle A^\pm e(\nabla u), \frac{1}{2}(A^\pm)^{-1} I\rangle,$$

где I – единичная матрица в R^m. Следовательно,

$$\langle A^\pm(e(\nabla u) - \zeta^\pm), (e(\nabla u) - \zeta^\pm)\rangle + p \operatorname{div} u =$$

$$= \langle A^\pm(e(\nabla u) - \xi^\pm(p)), (e(\nabla u) - \xi^\pm(p))\rangle - \frac{p^2}{4}\operatorname{tr}(A^\pm)^{-1} I + p \operatorname{tr}\zeta^\pm. \tag{3.2}$$

Поэтому из (3.1), (3.2) для функционала (2.1) вытекает представление

$$\begin{gathered} I[u,\chi,\mu,\sigma,p] = \int\limits_{\Omega} \Big\{\chi\langle A^+(e(\nabla u) - \xi^+(p)), (e(\nabla u) - \xi^+(p))\rangle + \\ +(1-\chi)\langle A^-(e(\nabla u) - \xi^-(p)), (e(\nabla u) - \xi^-(p))\rangle\Big\}\,dx + \qquad (3.3) \\ +(\mu - \mu(p))\int\limits_{\Omega} \chi\,dx + \sigma\int\limits_{\Omega} |D\chi| + |\Omega|\Big\{-\frac{p^2}{4}\operatorname{tr}(A^-)^{-1} I + \mu \operatorname{tr}\zeta^-\Big\}. \end{gathered}$$

Учитывая, что общее решение уравнения

$$e(\nabla u) = \xi^\pm(p), \quad u \in W_2^1(\Omega, R^m)$$

задается равенством

$$u(x) = x_0 + Bx + \xi^{\pm}(p)x$$

(см., например, [2]) с произвольной точкой $x_0 \in R^m$ и кососимметрической матрицей B, приходим к справедливости утверждений a), b) и утверждения c) при $\sigma > 0$ теоремы. Если $\mu, p \in V_=$ и $\sigma = 0$, то состояниями равновесия функционала (2.1) служат те и только те пары $\widehat{u}$, $\widehat{\chi}$ из множества (1.5), для которых

$$\widehat{\chi}(x)|e(\nabla\widehat{u}(x)) - \xi^+(p)| + (1-\widehat{\chi}(x))|e(\nabla\widehat{u}(x) - \xi^-(p)| = 0 \qquad (3.4)$$

при почти всех $x \in \Omega$. Возможность наличия двухфазовых решений уравнения (3.4) подробно обсуждается в [3, стр. 11].

4. Доказательство теоремы 2. Доказательство этой теоремы разобьем на ряд этапов

(1) *Существование состояний равновесия.* При $\sigma > 0$ доказательство существования состояний равновесия приведено в [4, стр. 32]. При $\sigma = 0$ существование состояний равновесия при условиях (2.6) и $\partial\Omega \in C^2$ доказано в [5]. Там же установлена справедливость теоремы 2 при $\sigma = 0$.

(2) *Преобразование функционала.* Поскольку

$$\begin{gathered}
\operatorname{tr}(e(\nabla u) - c^{\pm}I)^2 = \\
= \operatorname{tr} e^2(\nabla v) + 2p_{x_i x_j} v^i_{x_j} + p_{x_i x_j} p_{x_i x_j} - 2c^{\pm} \operatorname{div} v + m(c^{\pm})^2 - 2c^{\pm}\nu, \\
\operatorname{tr}^2(e(\nabla u) - c^{\pm}I) = \\
= \operatorname{tr}^2 e(\nabla v) + 2\nu \operatorname{div} v + \nu^2 - 2mc^{\pm} \operatorname{div} v - 2\nu mc^{\pm} + m^2(c^{\pm})^2, \\
u = v + \nabla p, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m),
\end{gathered} \qquad (4.1)$$

получаем

$$\begin{gathered}
\chi F^+ + (1-\chi)F^- + \mu\chi = \\
= a \operatorname{tr} e^2(\nabla v) + b \operatorname{tr}^2 e(\nabla v) + \chi(\gamma - 2[c](a+bm)\operatorname{div} v) + \\
+ a p_{x_i x_j} p_{x_i x_j} + b\nu^2 + c^-(a+bm)(mc^- - 2\nu) + \\
+ 2a p_{x_i x_j} v^i_{x_j} + 2(\nu b - c^-(a+bm)) \operatorname{div} v, \\
\gamma = \mu - 2\nu[c](a+bm) + m[c^2](a+bm).
\end{gathered} \qquad (4.2)$$

Следовательно,

$$
\begin{gathered}
I[u,\chi,\mu,\nu,\sigma]=J[v,\chi,\gamma,\sigma]+\phi(\nu),\\
J[v,\chi,\gamma,\sigma]=\\
=\int\limits_{\Omega}\{a\operatorname{tr}e^2(\nabla v)+b\operatorname{tr}^2 e(\nabla v)+\chi(\gamma-2[c](a+bm)\operatorname{div}v)\}\,dx+\\
+\sigma\int\limits_{\Omega}|D\chi|, \qquad (4.3)\\
\phi(\nu)=(b\nu^2+c^-(a+bm)(mc^- -2\nu))|\Omega|+2a\int\limits_{\Omega}p_{x_ix_j}p_{x_ix_j}\,dx.
\end{gathered}
$$

Заметим, что функционал J можно записать в аналогичной (1.4) форме

$$
\begin{gathered}
J[v,\chi,\gamma,\sigma]=\int\limits_{\Omega}\{\chi(\Phi^+(\nabla v)+\gamma)+(1-\chi)\Phi^-(\nabla v)\}\,dx+\sigma\int\limits_{\Omega}|D\chi|,\\
\Phi^+(\nabla v)=a\operatorname{tr}e^2(\nabla v)+b\operatorname{tr}^2 e(\nabla v)-2[c](a+bm)\operatorname{tr}e(\nabla v),\\
\Phi^-(\nabla v)=a\operatorname{tr}e^2(\nabla v)+b\operatorname{tr}^2 e(\nabla v). \qquad (4.4)
\end{gathered}
$$

Из представления (4.3) следует, что нахождение состояний равновесия $\widehat{u},\widehat{\chi}$ для функционала (1.4), (2.7) на области определения (2.10) эквивалентно определению состояний равновесия $\widehat{v},\widehat{\chi}$ функционала J среди всех v,χ из множества

$$
v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m),\quad \text{характеристическая функция}\quad \chi\in BV(\Omega). \qquad (4.5)
$$

а на области определения (2.9) – из множества

$$
v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m),\quad \chi \text{ – измеримая характеристическая функция.} \qquad (4.6)
$$

Из справедливости утверждения теоремы 2 для функционала $I[u,\chi,\mu,0]$ следует, что для состояний равновесия функционала

$J[v,\chi,\gamma,0]$ справедливо следующее описание

$$\begin{gathered}\text{при } \gamma \leqslant -\gamma_0 \text{ у функционала } J[v,\chi,\gamma,0] \text{ существуют}\\ \text{только однофазовые состояния равновесия } \widehat{v}=0,\ \widehat{\chi}=1,\\ \text{при } \gamma \geqslant \gamma_0 \text{ у функционала } J[v,\chi,\gamma,0] \text{ существуют}\\ \text{только однофазовые состояния равновесия } \widehat{v}=0,\ \widehat{\chi}=0,\\ \text{при } \gamma \in (-\gamma_0,\gamma_0) \text{ у функционала } J[v,\chi,\gamma,0] \text{ существуют}\\ \text{только двухфазовые состояния равновесия.}\end{gathered} \tag{4.7}$$

(3) *Оценка равновесного поля смещений.* Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\widehat{v}_{\gamma,\sigma},\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma}$ – состояние равновесия функционала $J[v,\chi,\gamma,\sigma]$ для $\gamma\in R^1$, $\sigma\geqslant 0$. Тогда для любого $q\geqslant 1$ существует такая константа $C=C(a,b,[c],\Omega,q)$, что $\|\widehat{v}_{\gamma,\sigma}\|\leqslant C$.*

Доказательство. Поскольку функция $\widehat{v}_{\gamma,\sigma}$ доставляет минимум функционалу $J[.,\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma},\gamma,\sigma]$, справедливо равенство

$$0=J_v[\widehat{v}_{\gamma,\sigma},\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma},\gamma,\sigma]h=$$
$$=\int_\Omega \{a\widehat{v}^i_{\gamma,\sigma x_j}h^i_{x_j}+(a+2b)\widehat{v}^i_{\gamma,\sigma x_i}h^j_{x_j}-2[c](a+bm)\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma}h^i_{x_i}\}\,dx$$

для всех $h\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m)$. Следовательно, функция $\widehat{v}_{\gamma,\sigma}$ является обобщенным решением задачи Дирихле для эллиптической системы

$$a\Delta\widehat{v}_{\gamma,\sigma}+(a+2b)\nabla\operatorname{div}\widehat{v}_{\gamma,\sigma}=2[c](a+bm)\nabla\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma},$$
$$\widehat{v}_{\gamma,\sigma}|_{\partial\Omega}=0.$$

Поскольку $\|\widehat{\chi}_{\gamma,\sigma}\|_{L_q}\leqslant|\Omega|^{1/q}$, утверждение леммы при $q>1$ является следствием общей теории эллиптических задач [6, гл.6.4]. При помощи доказанного неравенства с $q>1$, получаем требуемое неравенство с $q=1$. $\square$

(4) *Функция $\sigma(\gamma)$.* Благодаря лемме 1 к функционалу (4.4) применимы результаты работы [7]. Из них следует существование такой непрерывной неотрицательной функции $\sigma_0(\gamma)$, зависящей от области Ω и чисел a, b, $c^\pm$, что

а) при $0 < \sigma < \sigma_0(\gamma)$ у функционала $J[v, \chi, \gamma, \sigma]$ существуют только двухфазовые состояния равновесия,

б) при $\sigma > \sigma_0(\gamma)$ у функционала $J[v, \chi, \gamma, \sigma]$ существуют только однофазовые состояния равновесия,

в) при $\sigma = \sigma_0(\gamma) > 0$ у функционала $J[v, \chi, \gamma, \sigma]$ существуют как однофазовые, так и двухфазовые состояния равновесия.

Нам предстоит доказать ряд дополнительных свойств функции $\sigma_0(\gamma)$, обусловленных конкретным видом функционала J.

Лемма 2. *Функция $\sigma_0(\gamma) = 0$ для всех $\gamma \notin (-\gamma_0, \gamma_0)$, и $\sigma_0(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (-\gamma_0, \gamma_0)$.*

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения предположим противное. Пусть $\widetilde{\gamma} \notin (-\gamma_0, \gamma_0)$, но у функционала $J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, \sigma]$ для некоторого $\sigma > 0$ существует двухфазовое сотояние равновесия $\widehat{v}, \widehat{\chi}$. Тогда

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, \sigma] \leqslant J[v, 1, \widetilde{\gamma}, \sigma] = J[v, 1, \widetilde{\gamma}, 0],$$

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, \sigma] \leqslant J[v, 0, \widetilde{\gamma}, \sigma] = J[v, 0, \widetilde{\gamma}, 0]$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$ и указанного σ. Следовательно,

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, 0] < J[v, 1, \widetilde{\gamma}, 0], \quad J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, 0] < J[v, 0, \widetilde{\gamma}, 0]$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$. Поэтому у функционала $J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, 0]$ существует только двухфазовое сотояние равновесия, что противоречит (4.7).

Доказательство второй части леммы также проведем от противного. Пусть $\widetilde{\gamma} \in (-\gamma_0, \gamma_0)$, но у функционала $J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, \sigma]$ для всех $\sigma > 0$ существуют только однофазовые состояния равновесия. Тогда существует такая последовательность $\sigma_n > 0$, $\sigma_n \to 0$, что состояниями равновесия функционала $J[v\chi, \widetilde{\gamma}, \sigma_n]$ будут функции $\widehat{v}_n = \widehat{v} = 0$, $\widehat{\chi}_n = \widehat{\chi}$, причем $\widehat{\chi} = 1$ или $\widehat{\chi} = 0$ сразу для всех n. Поскольку

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, 0] = J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, \sigma_n] \leqslant J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, \sigma_n]$$

для всех n и всех v, χ из множества (4.5), после предельного перехода по $n \to \infty$, получаем

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, 0] \leqslant J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, 0] \quad \text{для всех} \quad v, \chi \in (4.5).$$

Следовательно,

$$J[\widehat{v}, \widehat{\chi}, \widetilde{\gamma}, 0] \leqslant \inf_{v,\chi \in (4.5)} J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, 0] = \inf_{v,\chi \in (4.6)} J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, 0]$$

(равенство двух инфимумов доказано в [4, стр. 47]). Поэтому у функционала $J[v, \chi, \widetilde{\gamma}, 0]$ с $\widetilde{\gamma} \in (-\gamma_0, \gamma_0)$ существует однофазовое состояние равновесия $\widehat{v}, \widehat{\chi}$, что противоречит (4.7). □

Из непрерывности и финитности функции $\sigma_0(\gamma)$ следует ее ограниченность. Положим $\sigma_* = \max_{\gamma \in R^1} \sigma_0(\gamma)$.

Лемма 3. *Функция $\sigma_0(\gamma)$ четная.*

Доказательство. Непосредственно проверяется равенство

$$J[v, \chi, \gamma, \sigma] = J[-v, 1 - \chi, -\gamma, \sigma] - \gamma|\Omega|, \tag{4.8}$$

справедливое для всех v, χ из множества (4.5). Пусть $\widehat{v}_0$, $\widehat{\chi}_0$ – состояние равновесия для некоторых γ_0, σ_0. Записывая (4.8) для $\widehat{v}_0$, $\widehat{\chi}_0$, γ_0, σ_0 и вычитая из (4.8) с $\gamma = \gamma_0$, $\sigma = \sigma_0$ полученное равенство, придем к соотношению

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant J[v, \chi, \gamma_0, \sigma_0] - J[\widehat{v}_0, \widehat{\chi}_0, \gamma_0, \sigma_0] = \\ &= J[-v, 1 - \chi, -\gamma_0, \sigma_0] - J[-\widehat{v}_0, 1 - \widehat{\chi}_0, -\gamma_0, \sigma_0]. \end{aligned}$$

Если v, χ пробегают все множество (4.5), то $-v$, $1-\chi$ также пробегают все множество (4.5). Поэтому из последнего соотношения следует, что пара $-\widehat{v}_0,$, $1-\widehat{\chi}_0$ является состоянием равновесия для функционала $J[v, \chi, -\gamma_0, \sigma_0]$.

Проведенное рассуждение показывает, что у функционалов $J[v, \chi, \gamma_0, \sigma_0]$ и $J[v, \chi, -\gamma_0, \sigma_0]$ одновременно существуют либо не существуют двухфазовые (однофазовые) сотояния равновесия.

Пусть $\sigma_0 = \sigma_0(\gamma_0) > 0$. Тогда из свойств функции $\sigma_0(\gamma)$ вытекает, что у функционала $J[v, \chi, \gamma_0, \sigma_0(\gamma_0)]$ существует как однофазовое, так и двухфазовое состояние равновесия. Следовательно, и у функционала $J[v, \chi, -\gamma_0, \sigma_0(\gamma_0)]$ существует как однофазовое, так и двухфазовое состояние равновесия. Последнее возможно, лишь при условии $\sigma_0(\gamma_0) = \sigma_0(-\gamma_0)$. □

Для доказательства следующей леммы нам потребуется ряд определений. Положим

$$J^+[v, \gamma] = J[v, 1, \gamma, \sigma], \quad J^-[v] = J[v, 0, \gamma, \sigma],$$

$$j^+(\gamma) = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)} J^+[v,\gamma] = \gamma, \quad j^- = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)} J^-[v] = 0,$$

$$j_{\min} = \min\{j^+(\gamma), j^-\}, \quad j(\gamma,\sigma) = \inf_{v,\chi \in (4.5)} J(v,\chi,\gamma,\sigma].$$

Очевидно, что $j(\gamma,\sigma) \leqslant j_{\min}(\gamma)$ для всех $\sigma > 0$, $\gamma \in R^1$. Равенство $j(\gamma_0,\sigma_0) = j_{\min}(\gamma_0)$ возможно в том и только том случае, если у функционала $J[v,\chi,\gamma_0,\sigma_0]$ существует однофазовое сотояние равновесия $\widehat{v}_0, \widehat{\chi}_0$ (с $\widehat{\chi}_0 = 1$ при $\gamma_0 < 0$ и $\widehat{\chi}_0 = 0$ при $\gamma_0 > 0$). Если $j(\gamma_0,\sigma_0) < j_{\min}(\gamma_0)$, то у функционала $J[v,\chi,\gamma_0,\sigma_0]$ существуют только двухфазовые состояния равновесия. Из леммы 2 следует, что

$$j(\gamma,\sigma) = j_{\min}(\gamma) \quad \text{при} \quad \gamma,\sigma \notin (-\gamma_0,\gamma_0) \times (0,\sigma_*).$$

Так как функционал $J[v,\chi,\gamma,\sigma]$ при фиксированных v, и χ является вогнутой (и даже линейной) функцией аргументов $\gamma \in R^1$ и $\sigma > 0$, то функция $j(\gamma,\sigma)$ также будет вогнутой функцией этих аргументов. Полезность данного свойства функционала энергии на состоянии равновесия при исследовании функции $\sigma_0(\gamma)$ была отмечена в [8].

Лемма 4. *Функция $\sigma_0(\gamma)$ вогнута на положительной и отрицательной полуоси.*

Доказательство. Функция $j_{\min}(\gamma)$, рассматриваемая как функция двух переменных γ и σ выпукла при $\gamma,\sigma \in (-\infty,0] \times [0,\sigma)$ и $\gamma,\sigma \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. В силу вогнутости функции $j(\gamma,\sigma)$, $\gamma,\sigma \in (-\infty,\infty) \times (0,\infty)$ функция

$$\psi(\gamma,\sigma) = j_{\min}(\gamma) - j(\gamma,\sigma) \tag{4.9}$$

будет выпуклой на областях

$$\gamma,\sigma \in (-\infty,0] \times (0,\infty) \quad \text{и} \quad \gamma,\sigma \in [0,\infty) \times (0,\infty). \tag{4.10}$$

Точка γ, σ лежит над графиком функции $\sigma_0(\gamma)$ (то есть $\sigma \geqslant \sigma_0(\gamma) > 0$) в том и только том случае, если $\psi(\gamma,\sigma) = 0$. Из выпуклости функции (4.9) на выпуклых множествах (4.10) вытекает, что надграфик функции $\sigma_0(\gamma)$ является выпуклым множеством на каждой из полуосей $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$. Последнее свойство эквивалентно выпуклости функции $\sigma_0(\gamma)$ на каждой из этих полуосей. $\square$

(5) *Завершение доказательства теоремы* 2. Очевидно, что $\gamma(\sigma,\Omega)$ при $\sigma \in (0,\sigma_*]$ совпадает с положительным решением γ

уравнения $\sigma = \sigma_0(\gamma)$. Благодаря лемме 4, такое решение существует, единственно, непрерывно зависит от σ и строго монотонно убывает с ростом σ. При $\sigma > \sigma_*$ функция $\gamma(\sigma, \Omega) = 0$, а $\gamma(0, \Omega)$ в силу (4.7) определяется равенством (2.12). Описание множеств состояний равновесия, данное в теореме 2, вытекает из свойств а)–в) функции $\sigma_0(\gamma)$. $\square$

Литература

1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.* Наука, М. (1990).
2. Р. Темам, *Математические задачи теории пластичности.* Наука, М. (1991).
3. S. Muller, *Variational models for microstructure and phase transitions.* — Max-Plack-Institut fur Mathematik in den Naturwissenschaften, Lect. Notes No. 2, Leipzig (1998).
4. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды.* Изд. СПб. гос. университета, С.-Пб. (2000).
5. В. Г. Осмоловский, *Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов механики сплошной среды.* — В кн.: Проблемы математического анализа. Вып. 27, (2004), 171–206.
6. C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations.* Grundlehren der Math. Wiss. in Einzeldarstellungen **130**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1966).
7. В. Г. Осмоловский, *Зависимость характера состояний равновесия двухфазовой упругой среды от параметров задачи.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **271** (2000), 156–175.
8. А. С. Михайлов, В. С. Михайлов, *Фазовые переходы в многофазовых средах.* — В кн.: Проблемы математического анализа, вып. 20 (2000), 120–169.

Osmolovski V. G. Dependence of the phase transition temperature on the domain size.

The dependence of the phase transition temperature on the domain size is investigated for a double-well quadratic potential. It is shown that for a domain whose boundary is subjected to a hydrostatical pressure, the temperature of phase transitions is independent of the domain and the surface tension coefficient and depends exclusively on the properties of an elastic media. If the displacement field vanishes on the boundary, then for sufficiently small domains the temperature also does not depend on the surface tension and domain size and is determined by properties of an elastic media only.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 марта 2004 г.