Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

А. И. Назаров

ВЫРОЖДЕННАЯ ЗАДАЧА ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Нине Николаевне
с признательностью**

Задачи с краевым условием Вентцеля, возникающие при описании разнообразных физических процессов в средах, содержащих тонкие пленки из материала с высокой проводимостью, исследовались многими авторами (историю вопроса и обширную библиографию можно найти в обзоре [1]).

Данная статья продолжает серию работ [2, 3], посвященных исследованию *вырожденной* задачи Вентцеля. В такой задаче граничный оператор допускает тотальное вырождение в главных членах, что описывает ситуацию, когда толщина пленки может обращаться в нуль. Вместе с тем предполагается, что члены первого порядка в граничном условии образуют невырожденный некасательный оператор. В [2] были получены априорные оценки решения в C^γ (для стационарной и нестационарной задачи), а в [3] – оценки в $C^{1+\gamma}$ в стационарном случае (для полностью нелинейной и квазилинейной задачи). В настоящей работе устанавливаются оценки решения квазилинейной стационарной задачи в $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$ и доказывается теорема существования.

Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – вектор в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|x|$. Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. $\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_i(x))$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x. Для x из приграничной полосы $\Omega(r^0) = \big\{x \in \Omega : 0 < \mathrm{dist}\{x; \partial\Omega\} < r_0\big\}$ толщины r_0, через x' обозначается вектор касательных координат x в сопровождающем базисе гиперповерхности $\partial\Omega$; в частности, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ для плоских частей границы.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00276.

Обозначим Ω^+ часть Ω, лежащую в полупространстве $x_n > 0$, а $\Gamma(\Omega^+)$ – часть $\partial\Omega^+$, лежащую в плоскости $x_n = 0$.

Введем обозначения

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}, \quad \Gamma_R = \Gamma(B_R^+).$$

Индексы i, j, k изменяются от 1 до n, а индексы l, m, s – от 1 до $n-1$. Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Обозначим D_i оператор дифференцирования по переменной x_i. В частности, $Du = (D_i u) = (D'u, D_n u)$ есть градиент функции u; $D^2 u = (D_i D_j u)$, $DD'u = (D_i D_m u)$, ${D'}^2 u = (D_s D_m u)$, ${D'}^3 u = (D_l D_s D_m u)$, $D{D'}^2 u = (D_i D_s D_m u)$, $D^2 D' u = (D_i D_j D_m u)$.

Обозначим $du = (d_m u)$ касательный градиент, а $d^2 u$ – матрицу вторых ковариантных производных u на многообразии $\partial\Omega$. В частности, $du = D'u$ и $d^2 u = {D'}^2 u$ на $\Gamma(\Omega^+)$.

Для вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим операторы

$$\delta = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{p_i}{|p|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \delta' = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{p'_s}{|p'|^2}\frac{\partial}{\partial x'_s}.$$

Введем следующие пространства:

$C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных функций с нормой $\|\cdot\|_\Omega$;

$C^k(\overline{\Omega})$ – пространство функций, имеющих непрерывные производные до k-го порядка включительно;

$C^\gamma(\overline{\Omega})$, $C^{k+\gamma}(\overline{\Omega})$, $(0 < \gamma < 1)$ – пространства Гельдера с нормами

$$\|u\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})} = \|u\|_\Omega + [u]_{\gamma,\Omega},$$

$$\|u\|_{C^{k+\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_\Omega + \|D^k u\|_\Omega + [D^k u]_{\gamma,\Omega},$$

соответственно, где $[\cdot]_{\gamma,\Omega}$ – постоянная Гельдера с показателем γ;

$W_q^k(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_q^k(\Omega)} = \|D^k u\|_{q,\Omega} + \|u\|_{q,\Omega},$$

где $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ обозначает норму в $L_q(\Omega)$;

аналогично, $W_q^k(\partial\Omega)$ – пространство с нормой

$$\|u\|_{W_q^k(\partial\Omega)} = \|d^k u\|_{q,\partial\Omega} + \|u\|_{q,\partial\Omega}.$$

Введем обозначение

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} f = \sup_{\Omega} f - \inf_{\Omega} f.$$

В дальнейшем показатель q может принимать значения $n<q<\infty$. Для обозначения различных констант используются буквы M, N, K, C с индексами или без них. Для указания величин, от которых они зависят, мы используем запись $N(\dots)$. Мы не будем отмечать зависимость постоянных от n.

§1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Изучаются решения квазилинейного равномерно эллиптического уравнения

$$\mathfrak{L}[u] \equiv a^{ij}(x,u,Du)D_iD_ju + a(x,u,Du) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющие квазилинейному граничному условию Вентцеля

$$\mathfrak{B}[u] \equiv \tau(x)\Big[\alpha^{sm}(x,u,du)d_sd_mu + \alpha_1(x,u,du)\Big] + \\ + \alpha_2(x,u,Du) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

Мы считаем, что условие (2) является *равномерно вырождающимся* условием Вентцеля, т.е. функция τ допускает полное вырождение, в то время как оператор в квадратных скобках равномерно эллиптичен по касательным переменным. Кроме того, член α_2 представляет собой производную по некасательному к $\partial\Omega$ векторному полю.

Предположим, что (a^{ij}), (α^{sm}) – симметричные матрицы, и функции a^{ij}, a, α^{sm}, α_1 и α_2 дважды дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют некоторым естественным структурным ограничениям.

Для оператора в области эти ограничения можно сформулировать следующим образом:

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n; \tag{A0}$$

$$(1+|p|)\cdot\left|\frac{\partial a^{ij}(x,u,p)}{\partial p}\right|, \quad \left|\delta a^{ij}(x,u,p)\right|, \quad \left|\delta' a^{ij}(x,u,p)\right| \leqslant \mu_1; \tag{A1a}$$

$$(1+|p|)\cdot\left|\frac{\partial a(x,u,p)}{\partial p}\right|,\ \left|\delta a(x,u,p)\right|,\ \left|\delta' a(x,u,p)\right|\leqslant \mu_1(1+|p|^2); \quad \text{(A1b)}$$

$$\left|\frac{\partial^2 a^{ij}(x,u,p)}{\partial p^2}\right|\leqslant \mu_2; \quad \text{(A2a)}$$

$$\left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial p\partial u}\right|^2,\quad \left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial p\partial x}\right|^2,\quad \left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial u^2}\right|,\quad \left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial u\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial^2 a^{ij}}{\partial x^2}\right|\leqslant \mu_2\varPhi(x); \quad \text{(A2b)}$$

$$\left|\frac{\partial^2 a}{\partial p^2}\right|^2,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial p\partial u}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial p\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial u\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|\leqslant \mu_2\varPhi(x), \quad \text{(A2c)}$$

при любых $x\in\varOmega$, $u\in\mathbb{R}^1$, $p\in\mathbb{R}^n$. Здесь ν – некоторая положительная константа, а $\mu_1=\mu_1(|u|)$, $\mu_2=\mu_2(|u|+|p|)$ – неубывающие функции своих аргументов.

Для граничного оператора мы сформулируем соответствующие ограничения:

$$\tau\geqslant 0,\quad \tau\in W^2_\infty(\partial\varOmega); \quad \text{(D)}$$

$$\nu_1|\xi|^2\leqslant \alpha^{sm}(x,u,p')\xi'_s\xi'_m\leqslant \nu_1^{-1}|\xi|^2\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n; \quad \text{(B0a)}$$

$$\frac{\partial\alpha_2(x,u,p)}{\partial p}\cdot\mathbf{n}(x)\leqslant -\chi; \quad \text{(B0b)}$$

$$(1+|p'|)\cdot\left|\frac{\partial\alpha^{sm}(x,u,p')}{\partial p'}\right|,\quad \left|\delta'\alpha^{sm}(x,u,p')\right|\leqslant \pi_1; \quad \text{(B1a)}$$

$$\begin{gathered}|\alpha_1(x,u,p')|,\ (1+|p'|)\cdot\left|\frac{\partial\alpha_1(x,u,p')}{\partial p'}\right|,\\ \left|\delta'\alpha_1(x,u,p')\right|\leqslant \pi_1(1+|p'|^2);\end{gathered} \quad \text{(B1b)}$$

$$|\alpha_2(x,u,p)|,\ (1+|p|)\cdot\left|\frac{\partial\alpha_2(x,u,p)}{\partial p}\right|,\ \left|\delta'\alpha_2(x,u,p)\right|\leqslant \chi^{-1}(1+|p|); \quad \text{(B1c)}$$

$$\left|\frac{\partial^2\alpha^{sm}}{\partial p'^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha^{sm}}{\partial p'\partial u}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha^{sm}}{\partial p'\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha^{sm}}{\partial u\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha^{sm}}{\partial x'^2}\right|\leqslant \pi_2; \quad \text{(B2a)}$$

$$\left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial p'^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial p'\partial u}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial p'\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x'^2}\right|\leqslant \pi_2; \quad \text{(B2b)}$$

$$\left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial p^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial p\partial u}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial p\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial u\partial x'}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x'^2}\right|\leqslant \pi_2, \quad \text{(B2c)}$$

для любых $x\in\partial\varOmega$, $u\in\mathbb{R}^1$, $p\in\mathbb{R}^n$. Здесь ν_1 и χ – некоторые положительные константы, а $\pi_1=\pi_1(|u|)$, $\pi_2=\pi_2(|u|+|p|)$ – неубывающие функции своих аргументов.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\partial\Omega \in W_q^4$;

2) *для всех возможных решений* $u_\sigma \in W_q^4(\Omega) \cap W_q^4(\partial\Omega)$ *задач*

$$\begin{cases} \sigma\mathfrak{L}[u] + (1-\sigma)\Delta u = 0 & \text{в} \quad \Omega, \\ \sigma\mathfrak{B}[u] + (1-\sigma)(\Delta' u - u) = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases} \quad \sigma \in [0;1] \tag{3}$$

справедлива оценка

$$\|u_\sigma\|_\Omega \leqslant M_0;$$

3) *выполнены условия* (A0), (A1), (A2), (D), (B0), (B1), (B2);

4) *в условии* (A2) $\Phi \in L_q(\Omega)$.

Тогда задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

§2. Оценки вторых производных. Доказательство теоремы 1

Поскольку уравнение (1) равномерно эллиптично, внутренние оценки вторых производных хорошо известны (см., например, [4]). Поэтому достаточно получить лишь соответствующие приграничные оценки, распрямив границу в окрестности произвольной точки и рассматривая локальную задачу:

$$a^{ij}(x,u,Du)D_iD_ju + a(x,u,Du) = 0 \quad \text{в} \quad B_1^+, \tag{4}$$

$$\tau(x)\Big[\alpha^{sm}(x,u,D'u)D_sD_mu + \alpha_1(x,u,D'u)\Big] + \\ + \alpha_2(x,u,Du) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{5}$$

Лемма 2.1. *Пусть функция* $u \in W_n^4(B_1^+) \cap W_\infty^4(\Gamma_1)$ *является решением задачи* (4)–(5), *и пусть*

$$\|u\|_{B_1^+} \leqslant M_0, \quad \|Du\|_{B_1^+} \leqslant M_1.$$

Предположим также, что при $|u| \leqslant M_0$, $|p| \leqslant M_1$ *выполнены условия* (A0), (A1), (A2), (D), (B0), (B1), (B2), *причем в условии* (A2) $\Phi \in L_n(B_1^+)$.

Тогда существуют константы $\gamma \in]0,1[$ *и* C_1, *такие, что при* $R \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{osc}_{B_R^+} {D'}^2 u \leqslant C_1 R^\gamma \cdot \big(1 + \max_{B_1^+} |DD'u|\big), \tag{6}$$

причем $\gamma = \gamma(n, \nu^{-1}, \nu_1^{-1}, \chi^{-1}, ||D'\tau||_{\Gamma_1})$, *а* C_1 *зависит от* n, ν^{-1}, ν_1^{-1}, χ^{-1}, μ_1, μ_2, π_1, π_2, M_0, M_1, $||\Phi||_{n,B_1^+}$ *и* $||\tau||_{W^2_\infty,\Gamma_1}$.

Доказательство. Обозначим $\lambda_k = ||D'^k\tau||_{\infty,\Gamma_1}$, $k = 1, 2$, и заметим (см., например, [5, §3.2]), что

$$|D'\tau(x)| \leqslant N\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\tau(x)}. \tag{7}$$

Возьмем единичный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию $\xi_n = 0$, и положим, аналогично [6, теорема 6.1],

$$M_2' = \max_{B_1^+} |DD'u|, \quad h_\xi = \frac{D_\xi D_\xi u}{1 + M_2'}$$

(D_ξ обозначает производную по направлению вектора ξ). Очевидно, что $|h_\xi| \leqslant 1$.

Введем обозначения

$$\alpha^{sm} = \alpha^{sm}(x, u(x), D'u(x)), \quad \beta^i = -\frac{\partial\alpha_2}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x));$$

$$\mathcal{B} \equiv -\tau\alpha^{sm}D_sD_m + \beta^iD_i.$$

Продифференцируем граничное условие (5) дважды по направлению вектора ξ и перенесем члены $\tau\alpha^{sm}D_sD_mD_\xi D_\xi u + \partial\alpha_2/\partial p_iD_iD_\xi D_\xi u$ в правую часть. Оставшиеся члены оценим с помощью структурных условий (B1), (B2) и неравенства Коши, с учетом (7) и очевидных неравенств

$$|D_\xi u| \leqslant |D'u| \leqslant M_1; \qquad |D_sD_\xi u| \leqslant |D'^2u|; \quad |D_\xi D_\xi u| \leqslant |D'^2u|;$$
$$|D_iD_\xi u| \leqslant |DD'u|; \qquad |D_sD_mD_\xi u| \leqslant |D'^3u|; \quad |D_sD_\xi D_\xi u| \leqslant |D'^3u|.$$

После деления на $1 + M_2'$ получится дифференциальное неравенство

$$|\mathcal{B}h_\xi| \leqslant N_1(\pi_1, \pi_2, M_1) \cdot \tau \cdot \frac{1 + |D'^2u|}{1 + M_2'} \cdot \left(1 + |D'^2u|^2 + |D'^3u|\right) +$$
$$+ N_2(\pi_1, \pi_2, \lambda_2, M_1) \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{|D'^3u|}{1 + M_2'} + N_2(\pi_1, \pi_2, \lambda_2, M_1) \cdot \frac{1 + |DD'u|^2}{1 + M_2'}$$
$$\text{на} \quad \Gamma_1. \tag{8}$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (4) дважды по направлению вектора ξ, перенеся члены $a^{ij}D_iD_jD_\xi D_\xi u$ в правую часть и оценивая оставшиеся члены с помощью структурных условий (A1), (A2) и неравенства Коши, с учетом очевидных неравенств

$$|D_iD_jD_\xi u| \leqslant |D^2D'u|; \quad |D_jD_\xi D_\xi u| \leqslant |DD'^2u|,$$

получим дифференциальное неравенство

$$|\mathcal{L}h_\xi| \leqslant N_3(\mu_1,\mu_2,M_1)\cdot\frac{1+|D^2u|}{1+M_2'}\cdot\big(\varPhi+|D^2u|^2+|D^2D'u|\big) \quad \text{в} \quad B_1^+, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{L} \equiv -a^{ij}D_iD_j, \quad a^{ij}=a^{ij}(x,u(x),Du(x)).$$

Заметим, что величина D_nD_nu может быть оценена через D_iD_ju $(i+j<2n)$ из уравнения (4). Из условий (A0) и (A1) вытекает

$$|D^2u| \leqslant N_4(\nu^{-1},\mu_1,M_1)\cdot(1+|DD'u|).$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (4), из условий (A0), (A1) получаем

$$|D^2D'u| \leqslant N_5(\nu^{-1},\mu_1,M_1)\cdot(1+|DD'^2u|+|DD'u|^2).$$

С учетом полученных соотношений неравенство (9) примет вид:

$$\begin{gathered}|\mathcal{L}h_\xi| \leqslant N_6(\nu^{-1},\mu_1,\mu_2,M_1)\times\\ \times\frac{1+|DD'u|}{1+M_2'}\cdot\big(\varPhi+|DD'u|^2+|DD'^2u|\big) \quad \text{в} \quad B_1^+.\end{gathered} \tag{10}$$

Далее, аналогично [6, теорема 6.1], возьмем в $\mathbb{R}^n$ набор единичных векторов $\{\xi_t\}$, $t=1,\ldots,(n-1)^2$, содержащий базисные векторы $e_1,\ldots,e_{n-1}$ и векторы $2^{-1/2}(e_l\pm e_m)$, $1\leqslant l\leqslant m\leqslant n-1$.

Нетрудно убедиться, что при таком выборе $\{\xi_t\}$ будут выполнены оценки

$$\begin{gathered}\sum_{t=1}^{(n-1)^2}(D'h_{\xi_t})^2 \geqslant N_7\cdot\left(\frac{|D'^3u|}{1+M_2'}\right)^2,\\ \sum_{t=1}^{(n-1)^2}(Dh_{\xi_t})^2 \geqslant N_7\cdot\left(\frac{|DD'^2u|}{1+M_2'}\right)^2,\end{gathered} \tag{11}$$

где N_7 – абсолютная константа.

Рассмотрим функции

$$w_r^{\pm} = \pm h_{\xi_r} + \varepsilon \sum_{t=1}^{(n-1)^2} (h_{\xi_t})^2,$$

де ε – положительная константа, которая будет определена ниже.

Из (8), (10), (11), (A0) и (B0a), используя неравенство Коши, выводим

$$\mathcal{L}w_r^{\pm} \leqslant \mathcal{L}h_{\xi_t}(\pm\delta_t^r + 2h_{\xi_t}) - 2\varepsilon\nu N_7 \cdot \left(\frac{|DD'^2u|}{1+M_2'}\right)^2 \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant N_8(\nu^{-1},\mu_1,\mu_2,M_1,\varepsilon^{-1}) \cdot \big(\varPhi+1+|DD'u|^2\big) - \varepsilon\nu N_7 \cdot \left(\frac{|DD'^2u|}{1+M_2'}\right)^2;$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}w_r^{\pm} &\leqslant \mathcal{B}h_{\xi_t}(\pm\delta_t^r + 2h_{\xi_t}) - 2\varepsilon\nu_1 N_7 \cdot \left(\frac{|D'^3u|}{1+M_2'}\right)^2 \leqslant\\ &\leqslant N_9(\nu_1^{-1},\pi_1,\pi_2,M_1,\varepsilon^{-1}) \cdot \tau \cdot (1+|D'^2u|^2) + \\ &+ N_{10}(\nu_1^{-1},\pi_1,\pi_2,\lambda_2,M_1,\varepsilon^{-1}) \cdot \frac{1+|DD'u|^2}{1+M_2'}.\end{aligned} \tag{13}$$

Введем теперь барьерную функцию

$$v = \theta_1\big|D'u - D'u(0)\big|^2 + \theta_2 x_n \cdot \frac{1+|DD'u|^2}{1+M_2'},$$

где θ_1, θ_2 – положительные константы, которые будут определены позже.

Применим к функции v оператор $\mathcal{L}$ на множестве B_1^+. Возникающие члены $-2\theta_1 a^{ij}(D_l u - D_l u(0))D_l D_i D_j u$ и $-2\theta_2 x_n a^{ij} D_m D_k D_i D_j u \cdot \frac{D_m D_k u}{1+M_2'}$ можно выразить, продифференцировав уравнение (4) по x_l и по x_m, x_k соответственно. Оценивая оставшиеся члены с помощью структурных условий и неравенства Коши, с учетом очевидного неравенства

$$-2\theta_2 x_n a^{ij} D_m D_k D_i u D_m D_k D_j u \leqslant 0,$$

получим

$$\mathcal{L}v \leqslant N_{11}(\mu_1,\mu_2,M_1)\theta_1|D'u-D'u(0)|(1+|DD'u|^2)-2\theta_1\nu|DD'u|^2+$$
$$+N_{12}(\nu^{-1},\mu_1,\mu_2,M_1,\varepsilon^{-1})\left(1+\theta_2^2+(\theta_2 x_n|DD'u|)^2\right)(1+|DD'u|^2)+$$
$$+\varepsilon\nu N_7\cdot\left(\frac{|DD'^2u|}{1+M_2'}\right)^2+N_{13}(\mu_1,\mu_2,M_1)(\theta_2 x_n|DD'u|)\varPhi. \qquad (14)$$

Аналогично, применяя к функции v оператор $\mathcal{B}$ на множестве $\varGamma_1$, выражая члены $-2\theta_1\tau\alpha^{sm}(D_l u-D_l u(0))D_lD_sD_m u+2\theta_1\partial\alpha_2/\partial p_i(D_l u-D_l u(0))D_iD_l u$ из продифференцированного уравнения (5) и оценивая оставшиеся члены, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{B}v \leqslant N_{14}(\pi_1,\pi_2,\lambda_2,M_1)\theta_1\tau|D'u-D'u(0)|(1+|D'^2u|^2)+\\ +N_{15}(\pi_1,\pi_2,\lambda_2,M_1)\theta_1|D'u-D'u(0)|-\\ -2\theta_1\tau\nu_1|D'^2u|^2-\theta_2\chi\frac{1+|DD'u|^2}{1+M_2'}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Поскольку мы располагаем гельдеровскими оценками Du ([3, §2]), можно подобрать $R_0=R_0(\nu^{-1},\nu_1^{-1},\chi^{-1},\lambda_1,\mu_1,\pi_1,M_0,M_1)<1$ так, что

$$|D'u-D'u(0)|\cdot\max\{N_{11},N_{14}\}\leqslant\min\{\nu,\nu_1\} \quad \text{в} \quad B^+_{R_0}, \qquad (16)$$

и, более того,

$$\operatorname*{osc}_{B^+_R}\left|D'u-D'u(0)\right|^2\leqslant N_{16}R^{\gamma_1} \qquad (17)$$

при любых $R\leqslant R_0$. Здесь N_{16} есть функция тех же аргументов, что и R_0, а $\gamma_1=\gamma_1(\nu^{-1},\nu_1^{-1},\chi^{-1},\lambda_1)$.

Далее, в силу тех же оценок можно рассматривать уравнение (4) как линейное уравнение с гельдеровскими коэффициентами при граничном условии Дирихле класса $C^{1+\gamma_1}$. Локальная оценка вторых производных ([7, §3.2]) дает

$$|D^2u(x)|\leqslant N_{17}(\nu^{-1},\nu_1^{-1},\chi^{-1},\lambda_1,\mu_1,\pi_1,M_0,M_1)\cdot x_n^{\gamma_1-1}. \qquad (18)$$

Из (12)–(15) с учетом (16) и (18) получаем

$$\mathcal{L}(w_r^\pm+v)\leqslant|DD'u|^2\cdot\{-\theta_1\nu+N_{18}\}+N_{19}\cdot(\varPhi+1) \quad \text{в} \quad B^+_{R_0},$$

$$\mathcal{B}(w_r^\pm+v)\leqslant\tau|D'^2u|^2\cdot\{-\theta_1\nu_1+N_9\}+$$
$$+\frac{1+|DD'u|^2}{1+M_2'}\cdot\{-\theta_2\chi+N_{10}\}+N_{20} \quad \text{на} \quad \varGamma^+_{R_0},$$

где N_{18} и N_{19} зависят только от ν^{-1}, ν_1^{-1}, χ^{-1}, λ_1, μ_1, μ_2, π_1, M_0, M_1, ε^{-1} и θ_2, а N_{20} – от ν_1^{-1}, π_1, π_2, M_1, $||\tau||_{W^2_\infty,\Gamma_1}$, ε^{-1}.

Если теперь взять

$$\theta_2 = \frac{N_{10}}{\chi}, \quad \theta_1 = \max\left\{\frac{N_{18}}{\nu}, \frac{N_9}{\nu_1}\right\},$$

то при всех $r = 1, \ldots, (n-1)^2$ для функций $\widetilde{w}_r^\pm = w_r^\pm + v$ справедливы неравенства

$$\mathcal{L}\widetilde{w}_r^\pm \leqslant N_{19} \cdot (\Phi + 1) \;\text{ в }\; B^+_{R_0}, \quad \mathcal{B}\widetilde{w}_r^\pm \leqslant N_{20} \;\text{ на }\; \Gamma_{R_0}. \tag{19}$$

Далее наше доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2 [3]. Отметим прежде всего, что оценку (6) достаточно доказать для $R \leqslant R_0$. Рассмотрим такое R и выберем r^* так, чтобы

$$\omega_{r^*} = \operatorname*{osc}_{B_R^+} h_{\xi_{r^*}} = \max_r \operatorname*{osc}_{B_R^+} h_{\xi_r}.$$

Положим $\varepsilon = \frac{1}{10(n-1)^2}$. Тогда ввиду (17) и (18) нетрудно убедиться, что

$$\frac{4}{5}\omega_{r^*} - N_{21}R^{\gamma_1} \leqslant \operatorname*{osc}_{B_R^+} \widetilde{w}_{r^*}^\pm \leqslant \frac{6}{5}\omega_{r^*} + N_{21}R^{\gamma_1}, \tag{20}$$

где $N_{21} = \theta_1 N_{16} + \theta_2 N_{17}$.

Если $\omega_{r^*} \leq 5N_{21}R^{\gamma_1}$, то требуемая оценка (6) немедленно следует из нашего выбора r^*. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\omega_{l^*} > 5N_{21}R^{\gamma_1}$. При этом предположении неравенства (20) принимают вид

$$\frac{3}{5}\omega_{r^*} \leqslant \operatorname*{osc}_{B_R^+} \widetilde{w}_{r^*}^\pm \leqslant \frac{7}{5}\omega_{r^*}. \tag{21}$$

Определим $W_{r^*}^\pm = \sup_{B_R^+} \widetilde{w}_{r^*}^\pm$. Из (19) очевидно, что функции

$$V_{r^*}^\pm = \omega_{r^*}^{-1}\left(W_{r^*}^\pm - \widetilde{w}_{r^*}^\pm\right)$$

удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{L}V_{r^*}^\pm \geqslant -\omega_{r^*}^{-1}N_{19} \cdot (\Phi + 1) \;\text{ в }\; B_R^+, \quad \mathcal{B}V_{r^*}^\pm \geqslant -\omega_{r^*}^{-1}N_{20} \;\text{ на }\; \Gamma_R. \tag{22}$$

Заметим, что из (21) следует $V_{r^*}^+ + V_{r^*}^- \geqslant \frac{1}{5}$, и потому в каждой точке B_R^+ по крайней мере одна из функций $V_{r^*}^\pm$ удовлетворяет неравенству

$$V_{r^*}^\pm \geqslant \frac{1}{10}. \tag{23}$$

Выберем $\Lambda = \Lambda(\nu^{-1}, \nu_1^{-1}, \chi^{-1}, \lambda_1)$ достаточно большим, так чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\mathrm{meas}(\Gamma_1)}{\chi(\Lambda - \lambda_1)} \leqslant \sigma \tag{24}$$

(здесь $\sigma = \sigma(\nu, \nu_1)$ – константа из леммы 3.1 [3]).

Случай 1. $\tau(0) > \Lambda R$. Тогда

$$\tau(x) \geq (\Lambda - \lambda_1)R \quad \text{на} \quad \Gamma_R,$$

и потому второе из неравенств (22) можно переписать следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{B}} V_{r^*}^{\pm} \equiv -\alpha^{sm} D_s D_m V_{r^*}^{\pm} + \frac{\beta^i}{\tau} D_i V_{r^*}^{\pm} \geqslant -\omega_{r^*}^{-1} \frac{N_{20}}{\tau} \quad \text{на} \quad \Gamma_R. \tag{25}$$

Кроме того, структурное условие (B1c) и неравенство (24) приводят к оценке

$$\left\| \frac{(\beta^i)}{\tau} \right\|_{n-1,\Gamma_R} \leqslant \frac{\mathrm{meas}(\Gamma_1)}{\chi(\Lambda - \lambda_1)} \leqslant \sigma.$$

Наконец, согласно (23), по крайней мере одна из функций $V_{r^*}^{\pm}$ удовлетворяет условиям леммы 3.1 [3] с константой $k = 1/10$. Поэтому существуют положительные константы η_1 и K_1, зависящие только от ν^{-1} и ν_1^{-1}, такие, что для этой функции выполнено неравенство

$$V_{r^*}^{\pm} \geqslant \eta_1 k - K_1 R \big[\|(\mathcal{L} V_{r^*}^{\pm})_-\|_{n,B_R^+} + \|(\widetilde{\mathcal{B}} V_{r^*}^{\pm})_-\|_{n-1,\Gamma_R} \big] \quad \text{в} \ B_{R/2}^+,$$

или, с учетом (22), (24) и (25),

$$V_{r^*}^{\pm} \geqslant \frac{\eta_1}{10} - \omega_{r^*}^{-1} K_1 R \big[N_{19} \|\Phi + 1\|_{n,B_R^+} + N_{20} \sigma \chi \big] \quad \text{в} \ B_{R/2}^+.$$

Случай 2. $\tau^2(0) \leqslant \Lambda R$. Тогда

$$\tau(x) \leqslant (\Lambda + \lambda_1)R \qquad \text{на} \quad \Gamma_R.$$

Точно так же, как в случае 1, мы заключаем, что по крайней мере одна из функций $V_{r^*}^{\pm}$ удовлетворяет условиям леммы 3.2 [3] с константой $k = 1/10$. Поэтому существуют положительные константы η_2 и K_2, зависящие только от ν^{-1}, χ^{-1}, λ_1 и Λ, такие, что для этой функции выполнено неравенство

$$V_{r^*}^{\pm} \geqslant \eta_2 k - K_2 R\big[\|(\mathcal{L}V_{r^*}^{\pm})_-\|_{n,B_R^+} + \|(\mathcal{B}V_{r^*}^{\pm})_-\|_{\infty,\Gamma_R}\big] \text{ в } B_{R/2}^+,$$

или, с учетом (22),

$$V_{r^*}^{\pm} \geqslant \frac{\eta_2}{10} - \omega_{r^*}^{-1} K_2 R\big[N_{19}\|\Phi + 1\|_{n,B_R^+} + N_{20}\big] \text{ в } B_{R/2}^+.$$

Таким образом, в любом случае имеем

$$V_{r^*}^{\pm} \geqslant \eta - \omega_{r^*}^{-1} K R \quad \text{в} \quad B_{R/2}^+,$$

где

$$\eta = \frac{\min\{\eta_1, \eta_2\}}{10}, \qquad K = \max\{K_1, K_2\} \cdot \big[N_{19}\|\Phi + 1\|_{n,B_R^+} + N_{20}\big].$$

Теперь с учетом (21) оценка

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}^+} \widetilde{w}_{r^*}^{\pm} \leqslant \max\left\{\frac{5\eta}{14} \operatorname*{osc}_{B_R^+} \widetilde{w}_{r^*}^{\pm},\ \frac{7K}{10\eta} R\right\} \tag{26}$$

получается стандартным образом.

Итак, для любого $R \leq R_0$ существует число $r^* \in \{1, \dots, n-1\}$, такое, что одна из двух функций $\widetilde{w}_{r^*}^{+}$ и $\widetilde{w}_{r^*}^{-}$ удовлетворяет (21) и (26). Лемма 4.9 [7, гл. II] показывает, что

$$\operatorname*{osc}_{B_R^+} h_{\xi_r} \leqslant N_{22} R^{\gamma} \quad \text{при} \quad r = 1, \dots, n-1, \qquad R \leqslant R_0,$$

и остается заметить, что согласно выбору h_{ξ_r} требуемая оценка (6) прямо следует из последнего неравенства. □

Теорема 2. *Пусть $\partial\Omega \in W_n^4$, функция $u \in W_n^4(\Omega) \cap W_\infty^4(\partial\Omega)$ является решением задачи* (1)–(2), *и пусть*

$$\|u\|_\Omega \leqslant M_0, \quad \|Du\|_\Omega \leqslant M_1.$$

Предположим, что при $|u| \leqslant M_0$, $|p| \leqslant M_1$ выполнены структурные условия (A0), (A1), (A2), (D), (B0), (B1), (B2), *причем в условии* (A2) *$\Phi \in L_n(\Omega)$.*

Тогда

$$\|D^2 u\|_{\overline{\Omega}} \leqslant M_2, \quad [D^2 u]_{\gamma,\Omega} \leqslant M_{2,\gamma},$$

где $\gamma \in]0;1[$ – константа из леммы 2.1, а M_2 и $M_{2,\gamma}$ определяются теми же величинами, что и константа C_1 в лемме 2.1, а также свойствами $\partial\Omega$.

Доказательство. Положим $C_2 = \max\limits_{\overline{\Omega}} |D^2u|$.

Распрямив границу в окрестности произвольной точки $y^* \in \partial\Omega$, заметим, что

$$\|DD'u\|_{\Gamma_1} \leqslant \widetilde{N}_0 C_2,$$

где $\widetilde{N}_0$ определяется только свойствами $\partial\Omega$.

Лемма 2.1 дает неравенство

$$[{D'}^2 u]_{\gamma,\Gamma_{1/2}} \leqslant N_{23}\big(1 + C_2\big),$$

и, следовательно, ввиду произвольности y^*,

$$\|u\|_{C^{2+\gamma}(\partial\Omega)} \leqslant N_{24}\big(1 + C_2\big).$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) как линейное уравнение с гельдеровскими коэффициентами при граничном условии Дирихле класса $C^{2+\gamma}$. Тогда оценка Шаудера ([7, §3.2]) дает

$$[D^2u]_{\gamma,\Omega} \leqslant N_{25}\big(1 + C_2\big), \tag{27}$$

(заметим, что константы N_{23}, N_{24}, N_{25} зависят только от величин, приведенных в условии теоремы), а компактность вложения $C^\gamma(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$ дает для любого $\varepsilon > 0$

$$C_2 = \|D^2u\|_\Omega \leqslant \varepsilon C_2 + N_{26}(\varepsilon^{-1})$$

(N_{26} зависит также от величин, указанных в условии теоремы).

Положив $\varepsilon = \frac{1}{2}$, мы оценим $\|D^2u\|_\Omega$, после чего неравенство (27) дает оценку $[D^2u]_{\gamma,\Omega}$. □

Замечание. В теоремах 2.1 и 2.2 [3] оценки первых производных решения задачи (1)–(2) были получены при условии $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Аналогично, в лемме 2.1 и в теореме 2 можно считать, что $u \in C^3(\overline{\Omega})$. Для этого в лемме 2.1 следует одно из дифференцирований заменить на разностное отношение с шагом ρ и вместо функций h_ξ рассматривать функции $\widetilde{h}_\xi = \frac{\Delta_{\xi,\rho} D_\xi u}{1+M_2'}$, а затем перейти к пределу при $\rho \to 0$.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что при $\sigma < 1$ граничное условие в (3) является равномерно эллиптическим (невырожденным) условием Вентцеля. Поэтому задача (3) имеет хотя бы одно решение $u_\sigma \in C^{2+\widetilde{\gamma}}(\overline{\Omega})$ при некотором $\widetilde{\gamma} \in]0,1[$ (см. [8, теорема 3]).

Рассматривая граничное условие в (3) как линейное *автономное* уравнение на $\partial\Omega$

$$(\sigma\tau\alpha^{sm} + (1-\sigma)\delta_s^m)d_s d_m u_\sigma + f = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{28}$$

где

$$f(x) = \sigma\Big[\tau(x)\alpha_1(x, u_\sigma(x), du_\sigma(x)) + \alpha_2(x, u_\sigma(x), Du_\sigma(x))\Big] - (1-\sigma)u_\sigma(x),$$

и учитывая структурные условия, мы заключаем, что коэффициенты и правая часть (28) принадлежат $C^{1+\widetilde{\gamma}}(\partial\Omega)$. Поэтому $u_\sigma \in C^{3+\widetilde{\gamma}}(\partial\Omega)$.

Аналогично, применение линейной теории к уравнению в области с учетом структурных условий дает $u_\sigma \in C^{3+\widetilde{\gamma}}(\overline{\Omega})$.

Теперь из структурных условий видно, что коэффициенты и правая часть (28) принадлежат $W^2_\infty(\partial\Omega)$. Поэтому с учетом $\partial\Omega \in W^4_q$ имеем $u_\sigma \in W^4_q(\partial\Omega)$.

Наконец, вновь рассматривая уравнение в области, получаем $u_\sigma \in W^4_q(\Omega)$.

По условию 2) теоремы множество $\{u_\sigma\}$, $\sigma \in [0;1[$, ограничено в $C(\overline{\Omega})$. Кроме того, очевидно, что все константы, входящие в структурные условия, могут быть выбраны не зависящими от σ. Из теорем 2.1 и 2.2 [3] следует, что множество $\{u_\sigma\}$ ограничено в $C^{1+\widetilde{\gamma}}(\overline{\Omega})$, а теорема 2 показывает, что это множество ограничено в $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$. Поэтому можно извлечь подпоследовательность $\sigma_k \to 1$, для которой u_{σ_k} сходятся в $C^2(\overline{\Omega})$. Очевидно, предельная функция дает решение задачи (1)–(2). □

Теорема 1 носит условный характер. Для ее применения необходимо иметь априорную оценку $\|u\|_\Omega$ (условие 2), которая может быть получена при различных условиях. Приведем один из возможных вариантов.

Лемма 2.2. *Пусть при* $|u| \geqslant M_0$ *выполнены условия*

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(u)\cdot a(x,u,0) < 0, && x \in \Omega,\\ &\operatorname{sign}(u)\cdot\big(\tau(x)\alpha_1(x,u,0) + \alpha_2(x,u,0)\big) \leqslant 0, && x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда выполняется условие 2) *теоремы* 1.

Доказательство. Пусть u – решение задачи (3), и

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u = u(x^0) > M_0.$$

Если $x^0 \in \Omega$, то $Du(x^0) = 0$. Согласно первому условию (29) u в окрестности точки x^0 является субрешением для оператора $\sigma\mathcal{L} + (\sigma - 1)\Delta$, и мы приходим к противоречию с принципом максимума.

Если же $x^0 \in \partial\Omega$, то $du(x^0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x^0) \geqslant 0$, $d^2u(x^0) \leqslant 0$. Поэтому из (B0a), (B0b) и второго условия (29) следует

$$\mathfrak{B}[u]\big|_{x=x^0} \leqslant \tau(x^0)\alpha_1(x^0, u(x^0), 0) + \alpha_2(x^0, u(x^0), 0) - \chi\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x^0) \leqslant 0.$$

При этом равенство нулю возможно только если $\partial u/\partial\mathbf{n}(x^0) = 0$. Но тогда $Du(x^0) = 0$, и вновь u в окрестности точки x^0 является субрешением для оператора $\sigma\mathcal{L} + (\sigma - 1)\Delta$, что противоречит лемме о нормальной производной.

Таким образом, $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u \leqslant M_0$. Точно так же $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u \geqslant -M_0$. □

Литература

1. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *A survey of results on nonlinear Venttsel problems.* — Appl. Math. **45**, No. 1 (2000), 69–80.
2. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида.* — В кн.: Проблемы математической физики и теории функций (Пробл. мат. анал., вып. 17). СПб. Изд. СПбГУ (1997), 3–19.
3. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Оценки градиента для решений стационарных вырожденных задач Вентцеля.* — В кн.: Нелинейные уравнения с частными производными и теория функций (Пробл. мат. анал., вып. 18). СПб. Изд. СПбГУ (1998), 43–69.
4. *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности.* — УМН **41**, No. 5 (1986), 59–83.
5. Н. В. Крылов, *Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера.* (Университетская серия. Т. 2), Научная книга, Новосибирск (1998).
6. N. S. Trudinger, *Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions.* — Trans. Am. Math. Soc. **278** (1983) 751–769.
7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* 2-е изд., Наука, М. (1973).

8. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *О квазилинейной стационарной задаче Вентцеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1995), 20–29.

Nazarov A. I. Degenerate Venttsel' boundary value problem to elliptic equations.

The existence theorem is proved for quasilinear degenerate elliptic Venttsel' BVP.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 марта 2004 г.