Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

В. В. Жиков

О ПЛОТНОСТИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА–ОРЛИЧА

1. Введение

За последние годы много внимания было уделено вариационным задачам для интегральных функционалов вида

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}\,dx,$$

где измеримый в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ показатель $p(x)$ удовлетворяет условию

$$1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty. \tag{1.1}$$

С такими функционалами очень естественно связаны пространства Соболева–Орлича, и многие вопросы общей теории получают более ясный ответ в терминах этих пространств. Например, наличие эффекта Лаврентьева эквивалентно тому, что гладкие функции не плотны в пространстве Соболева–Орлича.

Приведем некоторые сведения из теории пространств Соболева–Орлича, см. [1], [2]. Через $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$ таких, что

$$A_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Класс $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ будет банаховым (рефлексивным) пространством, если норму определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0, \quad A_p(\lambda^{-1} f) \leqslant 1\}. \tag{1.2}$$

Заметим, что inf в (1.2) достигается, если $A_p(f) > 0$, кроме того,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \lambda > 0 \Longleftrightarrow A_p(\lambda^{-1} f) = 1.$$

Отсюда получаем следующие свойства

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \geqslant 1 &\Longrightarrow \|f\|^\alpha_{L^{p(\cdot)}} \leqslant A_p(f) \leqslant \|f\|^\beta_{L^{p(\cdot)}}, \\ \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leqslant 1 &\Longrightarrow \|f\|^\beta_{L^{p(\cdot)}} \leqslant A_p(f) \leqslant \|f\|^\alpha_{L^{p(\cdot)}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Нам понадобится следующая простая

Лемма 1.1. *Пусть ограниченная в $L^{p(\cdot)}$ последовательность f_ε такова, что $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ почти всюду на Ω. Тогда $f \in L^{p(\cdot)}$ и $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ в $L^{p(\cdot)}$.*

Предположим, область Ω ограничена и имеет липшицеву границу. Определим пространство Соболева–Орлича

$$W^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega), \quad \int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty\},$$

$$\|u\|_{W^{p(\cdot)}(\Omega)} = \Big|\int\limits_\Omega u\,dx\Big| + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}},$$

где $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}}$ означает норму функции $|\nabla u|$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Определим также связанное с задачей Дирихле пространство

$$W_0^{p(\cdot)} = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega), \quad \int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty\},$$

$$\|u\|_{W_0^{p(\cdot)}} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

Лемма 1.2. *Множество $W_0^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ плотно в $W_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Доказательство. Для срезки

$$u^{(k)} = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad |u(x)| \leqslant k \\ \pm k, & \text{если} \quad |u(x)| > k \end{cases}$$

имеем $|\nabla u^{(k)}| \leqslant |\nabla u|$, и по теореме Лебега $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla u^{(k)}|^p\, dx \to 0$. Лемма доказана.

Лемма1.3. *Если показатель p непрерывен в $\overline{\Omega}$, то имеет место вложение $W^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Выполнено также неравенство типа Фридрихса*

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant c_0 \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{p(\cdot)}(\Omega). \tag{1.4}$$

Доказательство. Достаточно проверить указанное вложение в каждой подобласти $\Omega \cap B$, где B шар малого радиуса. Считаем, что

$$p_2 = \max_{\Omega\cap B} p(x) \leqslant \frac{n+1}{n} p_1, \qquad p_1 = \min_{\Omega\cap B} p(x).$$

Тогда в силу теоремы вложения Соболева

$$W^{p(\cdot)}(\Omega \cap B) \subset W^{1,p_1}(\Omega \cap B) \subset L^{p_2}(\Omega \cap B) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega \cap B) \qquad (1.5)$$

и искомое вложение установлено. Само неравенство (1.4) легко проверяется обычным рассуждением от противного. Лемма доказана.

Пространство $W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определим как множество функций $u \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, имеющих градиент (в смысле распределений) из $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \quad \nabla u \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\|u\|_{W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

Легко проверить, что финитные функции плотны в $W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

2. Логарифмическое условие.

В связи с вопросом о плотности гладких функций определим пространства:

$$H_0 = H_0^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ как замыкание множества } C_0^\infty(\Omega) \text{ в } W_0^{p(\cdot)}(\Omega) = W_0,$$

$$H = H^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ как замыкание множества } C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ в } W^{p(\cdot)}(\Omega) = W,$$

$$H = H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \text{ как замыкание множества } C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ в } W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = W.$$

Пример 1. (см. [3]). Пусть $n = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ – единичный круг,

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \qquad\qquad x_1x_2 > 0, \\ \beta, & \text{если} \quad x_1x_2 < 0, \quad 1 < \alpha < 2 < \beta. \end{cases}$$

Тогда $H_0 \neq W_0$, $H \neq W$ (этот результат также следует из теоремы 5.1).

По контрасту с этим примером рассмотрим другой.

Пример 2. Тот же показатель $p(x)$, но $\Omega = \{\frac{1}{2} < |x| < 1\}$ – кольцо. Тогда $H_0 = W_0$, $H = W$.

Очевидно, что если показатель $p(x)$ принимает только два значения, то возникают геометрические мотивы, так как все зависит от геометрических свойств отдельных фаз. Для непрерывных показателей проблема плотности гладких функций носит иной характер.

Пусть $w(t)$ – непрерывная неубывающая функция на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$, $w(0)=0$. Функция w будет служить модулем непрерывности показателя $p(x)$, если

$$|p(x)-p(y)| \leqslant w(|x-y|) \quad \forall x,y\in\Omega, \quad |x-y|\leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

В работах [4]–[7] было показано, что в случае $w(t)=\frac{k_0}{\ln\frac{1}{t}}$ гладкие функции плотны в пространствах Соболева–Орлича, $H_0^{p(\cdot)}(\Omega)=W_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, $H^{p(\cdot)}(\Omega)=W^{p(\cdot)}(\Omega)$. Если не считать определенных нюансов, связанных с границей области Ω, то основной шаг составляло следующее утверждение о равномерной ограниченности сглаживающих операторов.

Для $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$f_\varepsilon(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy, \quad \rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}x),$$

$$\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \rho\geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\,dx=1, \quad \rho(x)=0 \text{ при } |x|\geqslant 1.$$

Теорема 2.1. *Если $w(t)=\frac{k_0}{ln\frac{1}{t}}$ – модуль непрерывности показателя $p(x)$, то*

(i) $$\|f_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c(\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}), \quad c=c(k_0,\rho,\beta); \tag{2.2}$$

(ii) $\|f_\varepsilon-f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\to 0$ *как только* $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Считаем, что $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\leqslant\tau=(\max\rho)^{-1}$. Тогда

$$|f_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon^{-n}\max\rho\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f|\,dx\leqslant\varepsilon^{-n}. \tag{2.3}$$

Положив $p_\varepsilon(x)=\min\{p(y),|x-y|<\varepsilon\}$, сделаем два замечания. Во-первых,

$$p_\varepsilon(x)\leqslant p(y) \text{ при } |x-y|<\varepsilon, \tag{2.4}$$

что непосредственно ясно. Во-вторых,

$$|\lambda|^{p(x)}\leqslant(e^{nk_0}+1)|\lambda|^{p_\varepsilon(x)} \text{ при } |\lambda|\leqslant\varepsilon^{-n}, \tag{2.5}$$

так как $0 \leqslant p(x) - p_\varepsilon(x) \leqslant w(\varepsilon)$,

$$|\lambda|^{p(x)} = |\lambda|^{p(x)-p_\varepsilon(x)}|\lambda|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant (|\lambda|^{w(x)}+1)|\lambda|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant \\ \leqslant (\varepsilon^{-nw(\varepsilon)}+1)|\lambda|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant (e^{nk_0}+1)|\lambda|^{p_\varepsilon(x)}$$

в силу логарифмического условия.

Далее, по интегральному неравенству Йенсена

$$|f_\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_\varepsilon(x)}\rho_\varepsilon(x-y)dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|f(y)|^{p(y)}+|f(y)|)\rho_\varepsilon(x-y)dy$$

где использовано неравенство (2.4). Теперь из (2.3), (2.5) имеем

$$|f_\varepsilon(x)|^{p(x)} \leqslant (e^{nk_0}+1)\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|f(y)|^{p(y)}+|f(y)|)\rho_\varepsilon(x-y)dy,$$

$$A_p(f_\varepsilon) \leqslant (e^{nk_0}+1)(A_p(f)+\tau) \text{ при } \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \tau = (\max\rho)^{-1}. \quad (2.6)$$

Отсюда легко следует оценка (2.2). В самом деле, имеем цепочку неравенств

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} + \|f\|_{L^1} \leqslant \tau \overset{(1.3)}{\Longrightarrow} A_p(f) \leqslant \tau^\beta + 1 \overset{(2.6)}{\Longrightarrow}$$

$$A_p(f_\varepsilon) \leqslant (e^{nk_0}+1)(\tau^\beta+1) \overset{(1.3)}{\Longrightarrow} \|f_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leqslant 1 + (e^{nk_0}+1)(\tau^\beta+1) \equiv \gamma.$$

Это означает, что

$$\|f_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leqslant \tau^{-1}\gamma(\|f\|_{L^{p(\cdot)}} + \|f\|_{L^1})$$

и оценка (2.2) доказана. Утверждение (ii) о сходимости следует из теоремы Банаха–Штейнгауза. Действительно, множество финитных функций из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, а для каждой такой функции f имеем

$$f_\varepsilon \to f \text{ в } L^\beta(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f_\varepsilon \to f \text{ в } L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что замена модуля $w(t) = \frac{1}{ln\frac{1}{t}}$ на $\frac{1}{(ln\frac{1}{t})^s}$, где $s \in (0,1)$, уже не обеспечивает плотности гладких функций (а значит, и равномерной ограниченности сглаживающих операторов).

Пример 3 (см. [5]–[7]). Пусть $n = 2$, $\Omega = \{|x| < \frac{1}{2}\}$, r, θ – полярные координаты,

$$p(x) = 2 + \frac{\cos 2\theta}{(ln\frac{1}{r})^s}.$$

Тогда $H_0 = W_0$ при $s \geqslant 1$, $H_0 \neq W_0$ при $0 < s < 1$. Первый случай обслуживается теоремой 4.1, а второй – теоремой 5.1.

3. Обобщение логарифмического условия.

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Если $w(t)$ – модуль непрерывности показателя p (см. (2.1)) и*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{nw(t)}{\alpha}} dt = \infty, \tag{3.1}$$

то гладкие функции плотны в пространстве Соболева–Орлича.

Примером модуля непрерывности, удовлетворяющего условию (3.1), служит

$$\omega(t) = \frac{k \ln\ln\frac{1}{t}}{\ln\frac{1}{t}}, \quad 0 < k \leqslant \frac{\alpha}{n}. \tag{3.2}$$

Для ясности рассмотрим случай пространства $W^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Считаем, что $u \in W^{p(\cdot)}$ финитна, а именно сосредоточена в шаре $|x| < R$. Пусть $\Omega = \{|x| < 2R\}$, $f(x) = |\nabla u(x)| + d^{-1}(x)|u(x)|$, где $d(x)$ – расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$. В силу финитности u в Ω имеем $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Введем максимальную функцию

$$g(x) = \sup_B \frac{1}{|B|} \int\limits_B f(y) dy,$$

где sup берется по всем шарам $B = B(x)$ с центром в точке x, и положим

$$E(\lambda, g) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) > \lambda\}.$$

Известно [9], стр. 255, что

$|u(x) - u(y)| \leqslant c\lambda|x - y|$ для почти всех точек $x, y \in F_\lambda = \Omega \setminus E(\lambda, g)$

причем постоянная $c \geqslant 1$ зависит от n. Кроме того, по построению $|u(x)| \leqslant \lambda\rho(x)$ на F_λ. Отсюда следует, что функция $u(x)|_{F_\lambda \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)}$ является $c\lambda$ – липшицевой, и по известной теореме (см.[9], стр. 80) ее можно продолжить на $\mathbb{R}^n$ с сохранением константы Липшица. В результате получаем

$$u_\lambda \in W_0^\infty(\Omega), \quad \nabla u_\lambda = \nabla u \quad \text{п.в. на } \Omega \setminus E(\lambda, g),$$

$$|\nabla u_\lambda| \leqslant c\lambda \quad \text{п.в на } \Omega,$$

$$\int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla u_\lambda|^p dx = \int\limits_{E(\lambda,g)} |\nabla u - \nabla u_\lambda|^p dx \leqslant c_1 \Big(\int\limits_{E(\lambda,g)} |\nabla u|^p dx + \int\limits_{E(\lambda,g)} \lambda^p dx \Big). \tag{3.3}$$

Так как $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int\limits_{E(\lambda,g)} |\nabla u|^p dx = 0$, то для наших целей достаточно доказать, что

$$\Phi(\lambda) \equiv \int\limits_{E(\lambda,g)} \lambda^p dx \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

В этом случае из (3.3) будет следовать $\nabla u_\lambda \to \nabla u$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, а сходимость $u_\lambda \to u$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обеспечивается неравенством (1.4). Более того, достаточно существования последовательности $\lambda_k \to \infty$, для которой $\Phi(\lambda_k) \to 0$. В свою очередь, такая последовательность существует, если для некоторой непрерывной неотрицательной функции $\varphi(\lambda)$ $(\lambda \geqslant 2)$ выполнено

$$\int\limits_2^\infty \varphi(\lambda) d\lambda = \infty, \quad \int\limits_2^\infty \varphi(\lambda)\Phi(\lambda) d\lambda < \infty. \tag{3.4}$$

Дальнейшие рассуждения уже не связаны с исходной задачей аппроксимации, а представляют собой некоторую оценку для максимальной функции $g = Mf$, где $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $f \geqslant 0$.

По теореме Витали найдутся непересекающиеся шары $\{B_i\} = \{B(x_i, r_i)\}$ такие, что

$$E(\lambda, g) \subset \bigcup B(x_i, 5r_i), \quad \int\limits_{B_i} f(y) dy > \lambda |B_i|.$$

Отсюда

$$|B_i|\lambda \leqslant \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} f dy + \int\limits_{B_i\cap\{f\leqslant\frac{\lambda}{2}\}} f dy \leqslant \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} f dy + \frac{\lambda}{2}|B_i|,$$

$$|B_i| \leqslant \frac{2}{\lambda} \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} f dy, \tag{3.5}$$

Если $p_i^+ = \max\limits_{B(x_i,5r_i)} p(y)$, то при $\lambda \geqslant 1$

$$\Phi(\lambda) \leqslant \sum_i \int\limits_{B(x_i,5r_i)} \lambda^p\, dx \leqslant 5^n \sum_i \lambda^{p_i^+}|B_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot 5^n \sum_i \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} \lambda^{p_i^+-1} f\, dx \leqslant 2\cdot 5^n \sum_i \lambda^{w(5r_i)} \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} \lambda^{p-1} f\, dx.$$

Без потери общности считаем, что $\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leqslant 5^{-(n+1)}$. Тогда (см. (3.5))

$$|B_i| \leqslant \frac{2}{\lambda}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\alpha\, dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}} |B_i|^{\frac{1}{\alpha'}} \Longrightarrow r_i \leqslant 5^{-1}\lambda^{-\frac{\alpha}{n}},$$

и, определив функцию $\varphi(\lambda)$ равенством

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1+w(\lambda^{-\frac{\alpha}{n}})}}, \tag{3.6}$$

получим

$$\Phi(\lambda)\leqslant 2\cdot 5^n(\varphi(\lambda))^{-1} \sum_i \int\limits_{B_i\cap E(\frac{\lambda}{2},f)} \lambda^{p-2} f\, dx \leqslant 2\cdot 5^n(\varphi(\lambda))^{-1} \int\limits_{E(\frac{\lambda}{2},f)} \lambda^{p-2} f\, dx,$$

$$\int\limits_2^\infty \varphi(\lambda)\Phi(\lambda) d\lambda \leqslant 2\cdot 5^n \int\limits_2^\infty d\lambda \int\limits_{E(\frac{\lambda}{2},f)} \lambda^{p-2} f\, dx$$

$$\leqslant 2^{\beta+1}5^n \int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{E(\lambda,f)} \lambda^{p-2} f\, dx.$$

Для постоянного $p>1$ выполнено соотношение

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{E(\lambda,f)} \lambda^{p-2} f dx = \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p\,dx,$$

из которого в случае переменного показателя $p(x)\geqslant \alpha>1$ следует оценка

$$\int_0^\infty d\lambda \int_{E(\lambda,f)} \lambda^{p-2} f\,dx \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p dx,$$

в чем нетрудно убедиться рассмотрев кусочно-постоянные $p(x)$. В результате

$$\int_2^\infty \varphi(\lambda)\Phi(\lambda)d\lambda \leqslant \frac{2^{\beta+1}5^n}{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p\,dx, \tag{3.7}$$

то есть условие $(3.4)_2$ выполнено. Остается заметить, что условие $(3.4)_1$ с функцией φ из (3.6) эквивалентно условию (3.1). Теорема доказана.

Допустим, что показатель $p(x)$ удовлетворяет логарифмическому условию, т.е. $w(t)=\frac{k_0}{ln\frac{1}{t}}$. В этом случае $\varphi(\lambda)=\lambda^{-1}e^{-\frac{k_0n}{\alpha}}$ и неравенство (3.7) дает

$$\int_2^\infty d\lambda \int_{E(\lambda,g)} \lambda^{p(x)-1}\,dx \leqslant c_1\int_{\mathbb{R}^n} f^p\,dx, \quad c_1=c_1(\alpha,\beta,k_0,n).$$

Заметим, что для постоянного p верно соотношение

$$\int_2^\infty d\lambda \int_{E(\lambda,g)} \lambda^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\int_{E(2,g)} g^p\,dx,$$

из которого в случае переменного $p(x)\leqslant\beta$ следует неравенство

$$\int_2^\infty d\lambda \int_{E(\lambda,g)} \lambda^{p-1}\,dx \geqslant \beta^{-1}\int_{E(2,g)} g^p\,dx.$$

Далее, используя классическую $L^\alpha(\mathbb{R}^n)$-оценку максимальной функции, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus E(2,g)} g^p\,dx \leqslant 2^\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} g^\alpha\,dx \leqslant \tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\alpha\,dx \leqslant \tau, \quad \tau=\tau(n,\alpha,\beta),$$

В результате всех оценок заключаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g^p\,dx \leqslant c_2\big(1+\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^p\,dx\big) \text{ при } \|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leqslant 5^{-(n+1)}.$$

Отсюда получаем (см. вывод неравенства (2.2) из (2.6)) оценку

$$\|g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)}), \quad c=c(\alpha,\beta,n,k_0). \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. *Пусть показатель $p(x)$ удовлетворяет логарифмическому условию, т.е. $w(t)=\frac{k_0}{ln\frac{1}{t}}$. Тогда выполнена оценка* (3.8), *в которой $g=Mf$ – максимальная функция.*

Из оценки (3.8) легко следует оценка (2.2). Отметим, что условие $\alpha>1$ (см. (1.1)) важно для вывода оценки (3.8), в то время как для оценки (2.2) оно не требуется. Открытый вопрос: *как обстоит с этими оценками в случае модуля непрерывности w из* (3.2)?

4. Случай одной особой точки.

Пусть $\Omega=\{|x|<\frac{1}{2}\}$ – шар и показатель $p(x)$ гладок вне начала координат.

Теорема 4.1. *Равенство $H_0=W_0$ выполнено в следующих случаях*

$$\text{(i)}\quad p(x)\leqslant n+w(|x|), \quad w(r)\leqslant cr^{\frac{w(r)}{n-1}}; \tag{4.1}$$

$$\text{(ii)}\quad p(0)>n, \quad |p(x)-p(0)|\leqslant w(|x|), \quad w(r)\leqslant cr^{\frac{2nw(r)}{p^2(0)-w^2(r)}}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Проверим, что $W_0\cap L^\infty\subset H_0$ (этого достаточно в силу леммы 1.2). Для $u\in W_0\cap L^\infty$ положим $u_t(x)=\eta_t(x)u(x)$,

$$\eta_t(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad r\in[t,1], \\ \frac{\ln\frac{r}{t}}{\ln\frac{1}{\delta}}+1 & \text{при} \quad r\in[t\delta,t], \\ 0 & \text{при} \quad r\in[0,t\delta], \end{cases}$$

где t, $\delta \in (0,1)$. Легко понять, что $u_t \in H_0$ благодаря гладкости показателя $p(x)$ вне начала координат. Докажем слабую сходимость

$$\nabla u_t = \nabla \eta_t u + \eta_t \nabla u \rightharpoonup \nabla u \text{ в } L^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ при } t \to 0.$$

Так как $\nabla u_t(x) \to \nabla u(x)$ п.в. на Ω, то надо проверить ограниченность семейства ∇u_t в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ (см. лемму 1.1). Для этого (поскольку $u \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \eta_t \leqslant 1$) достаточно ограниченности семейства $\nabla \eta_t$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

В случае (i)

$$\int\limits_\Omega |\nabla \eta_t|^p\,dx \leqslant |\Omega| + \int\limits_\Omega |\nabla \eta_t|^{n+w(t)} \leqslant |\Omega| + \frac{1}{(\ln\frac{1}{\delta})^{n+w(t)} w(t)(t\delta)^{w(t)}}.$$

При фиксированном t знаменатель дроби достигает максимума, если положить $\ln\frac{1}{\delta} = \frac{n+w}{w}$. В результате

$$\int\limits_\Omega |\nabla \eta_t|^p\,dx \leqslant |\Omega| + \frac{1}{t^w\, e^{-(w+n)}(\frac{w+n}{w})^{w+n}} \leqslant |\Omega| + \frac{cw^{n-1}}{t^w}$$

и при выполнении условия (4.1) величина справа ограничена.

В случае (ii) в качестве приближения к u берем $u_t = \eta_t(x)(u(x) - u(0)) + u(0)$. Достаточно проверить, что семейство $\nabla \eta_t(u - u(0))$ ограничено в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. С помощью неравенства Морри

$$|u(x) - u(0)| \leqslant c|x|^{(1-\frac{n}{p(0)-w(t)})}, \quad |x| \leqslant t,$$

несложными вычислениями приходим к оценке

$$\Phi(t) \equiv \int\limits_\Omega |\nabla \eta_t|^p |u - u(0)|^p\,dx \leqslant |\Omega| + \frac{c_1}{(\ln\frac{1}{\delta})^{p(0)+w(t)} w(t) t^{\frac{2nw(t)}{p(0)-w(t)}}}$$

и, полагая в ней $\ln\frac{1}{\delta} = \frac{p(0)+w(t)}{2nw(t)}$, получим

$$\Phi(t) \leqslant |\Omega| + c\frac{(w(t))^{p(0)+w(t)}}{t^{\frac{2nw(t)}{p(0)-w(t)}}}.$$

При выполнении условия (4.2) величина Φ ограничена. Теорема доказана.

Отметим, что условие (4.1) неулучшаемо в том смысле, что показатель $\frac{1}{n-1}$ нельзя уменьшить (см. пример 4 в §5). С условием (4.2) дело обстоит иначе, например, при $n = 2$ его можно заменить простым неравенством $p(x) \geqslant 2$. Этот случай сводится (по двойственности) к случаю $p(x) \leqslant 2$, $w(t) \equiv 0$.

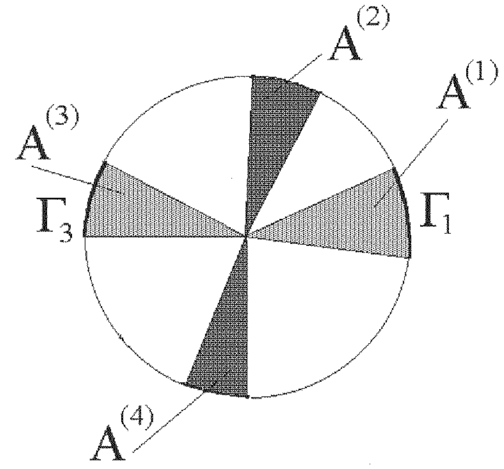
5. Контрпримеры.

Здесь рассматривается случай $n = 2$, $\Omega = \{|x| < r_0\}$.

Теорема 5.1. *Пусть $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ – четыре непересекающихся сектора, расположенные в круговом порядке (см. рис.), и*

$$\int\limits_{A^{(1)}\cup A^{(3)}} |x|^{-p'(x)}dx < \infty, \qquad \int\limits_{A^{(2)}\cup A^{(4)}} |x|^{-p(x)}dx < \infty, \tag{5.1}$$

где $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. Тогда $H_0 \neq W_0$.



Доказательство. Пусть $r = |x|$, θ – полярные координаты,

$$R \in (0, r_0), \quad B_R = \{|x| < R\}, \quad A_R^{(1)} = A^{(1)} \cap B_R, \quad A_R^{(3)} = A^{(3)} \cap B_R.$$

Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$u(\theta, R) = -\int\limits_R^{r_0} \frac{\partial u}{\partial r}(\theta, r)dr = \int\limits_0^R \frac{\partial u}{\partial r}(\theta, r)dr + c, \quad c = u(0).$$

Интегрируя по угловой дуге Γ_1, получим по неравенству Юнга

$$\int\limits_{\Gamma_1} |u(\theta,R)|d\theta \leqslant \frac{1}{|\Gamma_1|}\int\limits_{A^{(1)}} r^{-1}|\nabla u|dx \leqslant$$

$$\frac{1}{|\Gamma_1|}\Bigg(\int\limits_{A^{(1)}} |r|^{-p'(x)}\,dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\,dx\Bigg),$$

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma_1} (u(\theta,R)-c)d\theta\Bigg| \leqslant \frac{1}{|\Gamma_1|}\int\limits_{A_R^{(1)}} r^{-1}|\nabla u|\,dx \leqslant$$

$$\frac{1}{|\Gamma_1|}\Bigg(\int\limits_{A_R^{(1)}} |r|^{-p'(x)}\,dx + \int\limits_{B_R} |\nabla u|^{p(x)}\,dx\Bigg),$$

и аналогично для сектора $A^{(3)}$. Отсюда

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma_1} u(\theta,R)d\theta - \int\limits_{\Gamma_3} u(\theta,R)d\theta\Bigg| \leqslant c_0\Bigg(\int\limits_{A_R^{(1)}\cup A_R^{(3)}} |r|^{-p'(x)}\,dx + \int\limits_{B_R} |\nabla u|^{p(x)}\,dx\Bigg),$$

где $c_0 = \max\{|\Gamma_1|^{-1}, |\Gamma_3|^{-1}\}$. Эти неравенства очевидно сохраняются для функций $u \in H_0$, и поэтому

$$u \in H_0 \Longrightarrow \lim_{R\to 0}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_1} u(\theta,R)d\theta - \int\limits_{\Gamma_3} u(\theta,R)d\theta\Bigg) = 0. \qquad (5.2)$$

Остается предъявить функцию из W_0, для которой указанное в (5.2) предельное соотношение не выполнено. Достаточно взять $u_0(x) = (1-r^2)\Phi(\theta)$, где $\Phi(\theta)$ – гладкая функция с периодом 2π, обладает следующими свойствами:

$$0 \leqslant \Phi \leqslant 1, \quad \Phi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Phi|_{\Gamma_3} = 1, \quad \Phi' \text{ сосредоточена на } \Gamma_2 \cup \Gamma_4.$$

Поскольку $|\nabla u_0| \leqslant r^{-1}+c$ на $A^{(2)}\cup A^{(4)}$ и $|\nabla u_0| \leqslant c$ на $\Omega\setminus(A^{(2)}\cup A^{(4)})$, то в силу $(5.1)_2$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^p\,dx < \infty \Longrightarrow u_0 \in W_0,$$

и теорема доказана.

Пример 4. Пусть $\Omega = \{|x| < \frac{1}{2}\}$,

$$p(x) = 2 + k\chi(r)cos2\theta, \quad \chi(r) = \frac{lnln\frac{1}{r}}{ln\frac{1}{r}},$$

где $k > 0$ – параметр. Покажем, что

$$H_0 \neq W_0 \text{ при } k > 1, \quad H_0 = W_0 \text{ при } k < 1.$$

Пусть $k > 1$, $1 < k_1 < k$. Через $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ обозначим секторы

$$|\theta| < \delta, \quad |\theta - \frac{\pi}{2}| < \delta, \quad |\theta - \pi| < \delta, \quad |\theta - \frac{3}{2}\pi| < \delta$$

столь малого раствора 2δ, что

$$p(x) \leqslant 2 - k_1\chi(r) \text{ на } A^{(2)} \cup A^{(4)}, \quad p'(x) \leqslant 2 - k_1\chi(r) \text{ на } A^{(1)} \cup A^{(3)}.$$

Тогда условия (5.1) выполнены, например,

$$\int\limits_{A^{(1)} \cup A^{(3)}} \frac{dx}{|x|^{p'(x)}} \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^{1-k_1\chi(r)}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r(ln\frac{1}{r})^{k_1}} < \infty.$$

В случае $0 \leqslant k < 1$ модуль $w(t) = k\chi(t)$ удовлетворяет условию (4.1) и теорема 4.1 обеспечивает равенство $H_0 = W_0$.

Случай $k = 1$ остается невыясненным. Здесь не применимы ни теорема 4.1, ни теорема 5.1.

Литература

1. D. E. Edmunds, J. Rakosnik, *Sobolev embeddings with variable exponent.* — Studia Math., **143**(3) (2000), 267–293.
2. X. Fan, J. Shen, D. Zhao, *Sobolev embeddings theorems for spaces* $W^{k,p(x)}$. — J. Math. Anal. Appl., **262**, No. 2 (2001), 749–760.
3. Жиков В.В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССРб сер. матем., 1986, т. 50, №4, 675–711.
4. Fan Xianling, *Regularity of nonstandard lagrangian* $f(x,\xi)$. — Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **27**, No. 6, pp. 669–678 (1996).
5. V. V. Zhikov, *Lavrentiev's phenomenon and homogenization for some variational problems.* — Composite Media and Homogenization Theory, World Scientific, Singapore, 273–288 (1995).
6. В. В. Жиков, *Об эффекте Лаврентьева.* — ДАН РАН, т. 345, № 1 (1995), 10–14.

7. V. V. Zhikov, *On Lavrentiev's Phenomen.* — Russian Journal of Mathematical Pfysics, **3**, No. 2 (1995), 249–269.
8. V. V. Zhikov, *On Some Variational Problems.* — Russian Journal of Mathematical Physics, **5**(1) (1997), 105–116.
9. L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* — CRC Press. Boca Ration, Ann Arbor, London (1992).

Zhikov V. V. On density of smooth functions in Sobolev–Orlich spaces.

We study the question of density of smooth functions in Sobolev spaces of variable orders also called Sobolev–Orlich spaces. In particular, we generalize the earlier obtained logarithmic condition and give a number of examples.

Владимирский государственный
педагогический университет
E-mail: zhikov@ vgpu.vladimir.ru

Поступило 23 августа 2004 г.