Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 310, 2004 г.

НИНА НИКОЛАЕВНА УРАЛЬЦЕВА К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Нина Николаевна Уральцева – специалист с мировой известностью в области нелинейных уравнений с частными производными. Ей принадлежат фундаментальные результаты по теории эллиптических и параболических уравнений и вариационных неравенств. Она является автором более 100 научных работ и трех монографий [1–3]. Эти монографии получили всемирное признание, переведены в США, Франции и Китае, и являются настольными книгами для любого специалиста по теории уравнений с частными производными.

Родилась Нина Николаевна 24 мая 1934 года в семье студентов политехнического института. Ее отец – Николай Федорович Уральцев долгие годы работал инженером Ленэнерго и умер четверть века назад. Мать – Змановская Лидия Ивановна была учителем физики средней школы. Эта мудрая и приветливая женщина полна энергии и сейчас, в свои 94 года. Младший брат Нины Николаевны, Игорь, как и сестра, получил образование на физическом факультете Ленинградского государственного университета (ЛГУ). Игорь был талантливым физиком – экспериментатором, доктором физико-математических наук. Он работал в Физико-Техническом институте им. А. Ф. Иоффе (Физтехе) в области лазерной оптики. К сожалению, он скоропостижно скончался в 1992 году. Его работы и идеи оказались востребованными, получили дальнейшее развитие в трудах его коллег и учеников.

Увлечение математикой и физикой началось у Нины Николаевны в школьные годы. Она училась в знаменитой 239-ой (тогда женской) школе. В то время школа базировалась в известном доме "со львами" около Исаакиевской площади, и еще не была физико-математической. По инициативе Нины и ее школьной подруги Ники Гуман в школе был организован кружок по математике, занятия в котором вел студент математико-механического факультета ЛГУ Михаил Соломонович Бирман. Позже девочки стали постоянными членами кружка при Дворце пионеров (руководитель – Илья Яковлевич Бакельман). В старших классах обе они были победителями городской олимпиады по математике.

В 1951 году Нина Николаевна окончила 239 школу с золотой медалью и поступила на физический факультет ЛГУ. С самого начала обучения она принимала активное участие в работе кружка, организованного Ольгой Александровной Ладыженской. В 1956 году кафедра математической физики физфака стала "выпускной". Первыми ее выпускниками стали Н. Н. Уральцева, Л. Д. Фаддеев, В. Н. Гуман и В. И. Соболев.

В 1956 году Нина Николаевна вышла замуж за ее однокурсника Геннадия Львовича Бира. Геннадий Львович стал известным физиком-теоретиком. Им написана монография по применению теории групп к физике твердого тела (совместно с его учителем Г. Е. Пикусом). Он работал в Физтехе вплоть до своей смерти в 1975 году.

Вскоре в семье выпускников физфака произошло радостное событие – родился сын Коля. Николай Геннадьевич Уральцев продолжил дело отца. Он – физик-теоретик, специалист по теории элементарных частиц. Похоже, что и внук Нины Николаевны Геннадий найдет себя в области естественных наук. По крайней мере, в свои 14 лет он успешно решает олимпиадные задачи.

В студенческие годы и в аспирантуре научным руководителем Нины Николаевны была Ольга Александровна Ладыженская, с которой у нее сложился тесный творческий контакт. За долгие годы совместной работы они получили много блестящих результатов. Творческая дружба переросла в теплые человеческие отношения, которые продолжались до смерти Ольги Александровны, ушедшей от нас, к сожалению, в начале 2004 года.

Кандидатскую диссертацию Нина Николаевна защитила в 1960 году ("Регулярность решений многомерных квазилинейных уравнений и вариационных задач"), а уже через 4 года она успешно защитила и докторскую диссертацию ("Краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений и систем второго порядка").

На кафедре математической физики математико-механического факультета ЛГУ (ныне СПбГУ) Нина Николаевна работает с 1959 года. После смерти Владимира Ивановича Смирнова в 1974 году она стала исполнять обязанности заведующего кафедрой. С 1977 года по сей день Нина Николаевна руководит этой кафедрой. Читая основные и специальные курсы лекций по математической физике, она привлекает студентов к научной работе. Совместно с В. А. Солонниковым она написала пособие для студентов о пространствах Соболева и теоремах вложения [4]. Это пособие пришлось по душе не только студентам, оно востребовано и специалистами. Жаль только, что оно стало уже библиографической редкостью.

Нина Николаевна требовательный и, в то же время, заботливый научный руководитель. Ей благодарны ученики разных поколений. Многие из них, пройдя серьезную школу, стали самостоятельными специалистами по теории уравнений с частными производными. Под руководством Нины Николаевны защищены 14 кандидатских диссертаций, две ее ученицы стали докторами наук.

Ее научную деятельность условно можно объединить в несколько циклов.

Первый цикл ее работ выполнен в 60-е годы, он посвящен равномерно эллиптическим и равномерно параболическим уравнениям. В частности, он включает работы по многомерным регулярным вариационным задачам.

Работы, выполненные в этой области до середины 50-х годов, относились к двумерному случаю. В работах С.Н. Бернштейна начала прошлого века была выявлена роль априорных оценок при исследовании разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений. Он описал условия, состоящие в ограничениях на порядки роста по градиентам функций, образующих уравнение, при которых можно ожидать получение таких оценок. Эти порядки роста теперь принято называть естественными. Для класса квазилинейных уравнений явно не содержащих искомую функцию, С. Н. Бернштейн получил необходимые для доказательства классической разрешимости априорные оценки (в случае двух пространственных переменных).

Позднее Ж. Лерэ и Ю. Шаудер разработали общие топологические методы нахождения неподвижных точек компактных отображений, которые позволили доказывать существование решений в условиях неединственности. Эти работы подтвердили определяющую роль априорных оценок, и для квазилинейных уравнений второго порядка проблема существования классических решений свелась к получению оценок решений в пространстве Гельдера $C^{1+\alpha}$.

Известные к середине 50-х годов результаты о классической разрешимости для квазилинейных уравнений касались только двумерной задачи Дирихле, но и здесь оставалось неясным, можно ли доказать разрешимость для всего класса только в предположении естественных порядков роста.

Задачи вариационного исчисления "подсказали" концепцию обобщенного решения. Усилиями многих выдающихся ученых, включая Гильберта, Тонелли, Морри, Сигалова, были созданы прямые методы вариационного исчисления, позволяющие доказать в многомерном случае существование обобщенного решения уравнения Эйлера с помощью минимизации соответствующих функционалов. В то же время оказалось, что при доказательстве регулярности экстремалей роль размерности весьма существенна. К началу 40-х годов Ч. Морри исследовал гладкость экстремалей в двумерном случае.

В 1955 году О. А. Ладыженская прочитала на физическом факультете спецкурс по своим новым результатам о параболических уравнениях. Эти результаты раскрывали идею метода вспомогательных функций (ведущего начало от работ С. Н. Бернштейна) и демонстрировали, как оценивается максимум модуля градиента решения в случае любого числа независимых переменных. В частности, Ольга Александровна показала, что для оценки $\max|u_x|$ достаточно естественных ограничений роста, если известна оценка модуля непрерывности самого решения u.

Существенный сдвиг в изучении многомерных задач произошел после появления работ Де Джорджи [5] и Нэша [6], в которых для простейших линейных уравнений дивергентного вида с ограниченными измеримыми коэффициентами (соответственно эллиптического и параболического типов) была установлена оценка гельдеровской нормы обобщенных решений. Отсюда следовала регулярность экстремалей для простейших функционалов (интегрант явно зависит только от градиента функции).

Идеи Де Джорджи получили глубокое развитие в работах Нины Николаевны Уральцевой, выполненных, в основном, с Ольгой Александровной Ладыженской.

Первая ее работа, посвященная регулярности решений многомерных вариационных задач [7], составила основу кандидатской диссертации. В работе [8] 1962 года ею получена оценка гельдеровских норм градиентов решений через их максимум модуля для квазилинейных уравнений общего вида при выполнении только условия эллиптичности. Этот важный результат стал классическим, он позволил свести задачу получения оценки в пространстве $C^{1+\alpha}$ к задаче оценки C^1-нормы решения. В той же работе выделен класс диагональных эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту, для которого установлены оценки гельдеровской нормы решений. Заметим, что позднее интерес к таким системам очень возрос в связи с изучением гармонических отображений многообразий.

В цикле работ 60-х годов Н. Н. Уральцева и О. А. Ладыженская построили достаточно полную теорию разрешимости классических краевых задач для равномерно эллиптических и равномерно параболических квазилинейных уравнений с дивергентной главной частью.

Разработанные ими методы позволили проследить для уравнений дивергентного вида зависимость гладкости обобщенных решений от гладкости данных. В частности, было доказано, что при естественных ограничениях на порядки роста, регулярность слабых экстремалей многомерных регулярных вариационных задач полностью определяется гладкостью интегранта [9]. Таким образом, в определенном смысле было завершено исследование 19-ой и 20-ой проблем Гильберта для уравнений второго порядка. В рамках построенной теории были также выделены классы квазилинейных систем с диагональной главной частью, для которых сохраняются свойства, присущие скалярным уравнениям.

При изучении квазилинейных уравнений выявилась роль получения точной информации о дифференциальных свойствах обобщенных решений линейных уравнений. В упомянутом цикле работ прослежена точная зависимость гладкости обобщенных решений линейных уравнений от гладкости данных. Эти результаты, несомненно, обогатили теорию линейных эллиптических и параболических уравнений.

По результатам интенсивной и плодотворной работы были написаны монографии [1] и [3]. Позже, в 1973 году, монография [1] была переиздана в сильно расширенном виде [2].

Отметим, что в работах 60-х и 70-х годов, а также в упомянутых монографиях, содержится ряд глубоких результатов по теории квазилинейных уравнений общего недивергентного вида.

В начале 80-х годов, привлекая технику, разработанную Н. В. Крыловым и М. В. Сафоновым, Нина Николаевна (совместно с О. А. Ладыженской) исследовала краевые задачи для общего вида квазилинейных уравнений с особенностями и полностью нелинейные уравнения. В частности, ею получены результаты по разрешимости основных краевых задач в пространствах Соболева [10–12].

Другой цикл работ Нины Николаевны относится к теории вариационных неравенств, охватывающих широкий круг задач с выпуклыми ограничениями, в том числе, нелинейных геометрических задач и контактных задач теории упругости.

Важной проблемой теории вариационных неравенств является исследование регулярности обобщенных решений. Известно, что порог гладкости решений вариационных неравенств определяется характером ограничений на функции, и доказательство предельной гладкости требует, как правило, особых усилий. Владение сложной аналитической техникой позволило Нине Николаевне получить замечательные результаты при изучении точной зависимости гладкости обобщенных решений вариационных неравенств от данных задачи и доказательстве предельной гладкости решений.

Одной из важных прикладных задач, описываемой вариационным неравенством, является задача Синьорини – задача о деформации под действием внешних сил упругого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. Эта задача и некоторые ее модификации изучались в работах Нины Николаевны, а также работах, совместных с А. А. Архиповой (см. работы [13–16] и ссылки в них). В работе [14] Нина Николаевна доказала предельную гладкость решения (непрерывность по Гельдеру первых производных) скалярной задачи Синьорини для линейного эллиптического оператора. Этот результат лег в основу работы [17] Р.Шумана, который установил предельную гладкость решения задачи Синьорини для системы теории упругости. Точный результат о предельной гладкости решения скалярной задачи Синьорини для линейного параболического оператора получен в работе Нины Николаевны (совместно с А. А. Архиповой) [16]. В этой работе для доказательства гельдеровости пространственных производных решения в предписанном параболическом цилиндре, Нина Николаевна виртуозно сочетает различные аналитические методы.

В работе Нины Николаевны [18] содержится обзор результатов по проблеме регулярности решений вариационных неравенств, полученных к концу 80-х годов. В частности, в этой работе дан анализ результатов, полученных ею и ее учениками в этой области.

Третий цикл работ Н. Н. Уральцевой относится к квазилинейным уравнениям, имеющим различного рода вырождения эллиптичности по градиенту. В частности, ей принадлежит знаменитый результат о $C^{1+\alpha}$-регулярности p-гармонических функций [19]. Уравнения с p-лапласианом являются квазилинейными эллиптическими уравнениями с вырождением при нулевом значении градиента. Было известно, что решение такой задачи не может иметь соболевских вторых производных, и вопрос заключался в доказательстве непрерывности первых производных в окрестности множества, где градиент равен нулю. С этим вопросом к Нине Николаевне обратился Ю.Г.Решетняк в связи с исследованием многомерных квазиконформных отображений. К сожалению, результат, полученный Ниной Николаевной, долго оставался неизвестным за границей, и через 9 лет был передоказан и расширен К. Уленбек, Дж. Льюисом, Л-К. Эвансом, Ди-Бенедетто и другими авторами. Отметим, что этот результат стал особенно востребованным в наши дни в связи с большой популярностью тематики, связанной с исследованием p-лапласиана.

Для класса неравномерно эллиптических уравнений, включающих уравнение Эйлера для функционалов типа площади поверхности, Н. Н. Уральцевой разработан метод получения локальных оценок модуля градиента решения. Внутренние оценки градиента получены в работе [20], совместной с О. А. Ладыженской. Позднее, авторы распространили этот результат на класс сингулярно возмущенных задач [21]. Приграничные оценки градиента для краевого условия типа условия капиллярности (без ограничений на геометрию области), а также разрешимость соответствующих краевых задач, получены в серии работ [22–24].

Если говорить о задаче Дирихле для уравнений с оператором типа средней кривизны, то здесь существенную роль играет форма области. Так, например, для уравнения минимальной поверхности неоходимым условием существования классического решения является условие “выпуклости в среднем” области (средняя кривизна границы области неотрицательна). В случае области произвольной формы Де-Джорджи ввел понятие слабого решения в классе BV, которое естественно получается минимизацией соответствующего выпуклого функционала, и оно единственно. Во внутренних точках это решение определяет гладкую минимальную поверхность, а его патологическое поведение возникает на “плохих” участках границы (средняя кривизна границы отрицательна). Здесь возможен “отскок” решения от предписанных граничных значений. Приграничное поведение слабых решений изучал Л. Саймон.

Позднее, к 90-м годам, возник интерес к изучению движения поверхности под действием ее кривизны. В серии работ с В. И. Оликером Нина Николаевна изучала эволюцию непараметрической повехности S над ограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, при условии, что граница поверхности S закреплена, а внутренние точки S движутся в направлении нормали со скоростью, равной средней кривизне этой поверхности. Ранее, в работе Дж. Хуискена [25] было показано, что в случае выпуклой в среднем области Ω такая задача имеет глобальное классическое решение $u(\cdot,t)$, при этом $u(\cdot,t) \to F(\cdot)$, $t \to \infty$, где $F(\cdot)$ определяет классическую минимальную повехность, удовлетворяющую заданным граничным условиям. В работах Нины Николаевны (совместных с В. И. Оликером) такая задача изучалась без каких-либо ограничений на геометрию области [26–29]. По сравнению со стационарным случаем задача осложняется тем, что описывающее задачу параболическое уравнение не имеет дивергентной структуры. Авторами было предложено понятие слабого решения, доказано его глобальное существование и сходимость его при $t \to \infty$ к соответствующему слабому решению стационарной задачи.

Для доказательства единственности полученного решения потребовалось детальное исследование свойств решения вблизи плохих участков границы, а также изучение поведения края поверхности над $\partial\Omega$. Последний может быть трактован как свободная граница в некоторой параболической задаче с препятствием. Более того, для доказательства единственности требовалась информация о гладкости свободной границы в окрестности точек ее контакта с предписанной границей.

Вопрос о гладкости свободной границы для задачи с препятствием во внутренних точках области был исследован Л. Кафарелли [30]. В работе [30] исследован вопрос о регулярности свободной границы в эллиптической задаче с препятствием, а также в параболической задаче при дополнительном условии на знак производной решения по времени. Однако поведение свободной границы в точках контакта ранее не изучалось. Таким образом, для окончательного решения задачи о движении поверхности под действием средней кривизны, нужно было исследовать поведение свободной границы в точках контакта. С этой проблематикой связан интерес Нины Николаевны к задачам со свободной границей.

В течении последних 10 лет она изучает свойства свободных границ. Первоначально была рассмотрена эллиптическая задача с препятствием. Для нее Нина Николаевна получила исчерпывающие результаты о характере поведения свободной границы в окрестности точек контакта – C^1-регулярность. Затем совместно со шведским математиком Х. Шаголяном она получила аналогичные результаты для более общего случая, когда решение не предполагается знакопостоянным [31]. В недавних работах, выполненных вместе со своей ученицей Д. Апушкинской и Х. Шаголяном, с той же степенью полноты исследована параболическая задача с препятствием [32]. Для эллиптической задачи с препятствием, моделирующей двухфазную среду, Нина Николаевна доказала оптимальную гладкость – ограниченность их вторых производных. Во всех этих исследованиях, помимо техники масштабных изменений и blow-up предельных переходов, важную роль играет соответствующий глобальный анализ, а также применение различного рода формул монотонности.

Работы Нины Николаевны последних лет свидетельствуют о том, что она полна творческих сил. Продолжая активную научную работу, она много времени и сил отдает научно-редакционной работе, являясь ответственным редактором Трудов Санкт-Петербургского математического общества, сборников “Проблемы математического анализа”, членом редколлегии журналов “Алгебра и анализ”, “Вестник СПбГУ”. Нина Николаевна – член двух докторских диссертационных Ученых советов, член экспертного совета ВАК. Уже многие годы она руководитель гранта РФФИ, а также член экспертного совета РФФИ.

За цикл работ по равномерно эллиптическим и параболическим уравнениям она удостоена (совместно с Ольгой Александровной Ладыженской) государственной премии, премии П. Л. Чебышева АН СССР, а также первой премии Ленгосуниверситета. Она отмечена премией ЛГУ за педагогическое мастерство.

Нина Николаевна – Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный работник Высшей школы, Почетный профессор Санкт-Петербургского университета. За заслуги в научно-педагогической деятельности она награждена медалью “За трудовое отличие”.

Международное математическое сообщество высоко ценит научные достижения Н. Н. Уральцевой. Она читает лекции и выступает с докладами на математических конференциях во многих странах мира. В настоящее время Нина Николаевна возглавляет Комитет по премиям молодым математикам Европейского Математического Союза.

Коллеги сердечно поздравляют Нину Николаевну со знаменательной датой и желают ей больших творческих успехов.

Архипова А. А., Серегин Г. А.

Литература

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, Москва (1964).
2. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, второе переработанное издание. Наука, Москва (1973).
3. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, Москва (1967).
4. В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Обобщенные производные и пространства Соболева.* — В кн.: Избранные главы анализа и высшей алгебры, изд-во ЛГУ (1981).

5. E. De Giorgi, *Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari.* — Memorie delle Acc.Sci. Torino, Ser.3, **3** (1957), 25–43.
6. J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* — Amer. J. Math., **80**, No. 4 (1958), 931–954.
7. Н. Н. Уральцева, *О регулярности решений многоиерных эллиптических уравнений.* — ДАН СССР, **130**, No. 6 (1960).
8. Н. Н. Уральцева, *Краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений и систем с дивергентной главной частью.* — ДАН СССР, **147**, No. 2 (1962).
9. O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, *On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems.* — Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961).
10. К. Туленбаев, Н. Н. Уральцева, *Нелинейная краевая задача для эллиптических уравнений общего вида.* Дифференциальные уравнения с частными производными. Изд-во ИМ СО АН СССР (1988).
11. Н. Н. Уральцева, *Оценки производных для решений полностью нелинейной параболической задачи с косой производной.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **188** (1991).
12. А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Задача с косой производной для квазилинейного параболического уравнения с особенностями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **200** (1992).
13. Н. Н. Уральцева, *О сильных решениях обобщенной задачи Синьорини.* — Сиб. мат. журн., XIX, No. 5 (1978).
14. Н. Н. Уральцева, *Непрерывность по Гельдеру градиентов решений параболических уравнений при граничном условии типа Синьорини.* — ДАН СССР, **280**, No. 3 (1985).
15. А. А. Архипова, Н. Н. Уральцева, *О существовании гладких решений задач с выпуклыми ограничениями на границе области для параболических систем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **171** (1988).
16. A. A. Arkhipova, N. N. Uraltseva, *Sharp estimates for solution of a parabolic Signorini problem.* — Math. Nachr., **177** (1996).
17. R. Schumann, *On the regularity of a contact boundary value problem.* — Z. Anan. Anwend., **9**, No. 5 (1990).
18. Н. Н. Уральцева, *О регулярности решений вариационных неравенств.* — УМН, **42**, No. 6 (1987).
19. Н. Н. Уральцева, *Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **7** (1968).
20. O. A. Ladyzenskaya, N. N. Uraltseva, *Local estimates for solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations.* — Comm. on pure and appl. math., XVIII (1970).
21. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Локальные оценки градиентов решений простейшей регуляризации некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **213** (1994).
22. Н. Н. Уральцева, *Разрешимость задачи о капиллярах.* — Вестник ЛГУ, сер. матем., **19** (1973).
23. Н. Н. Уральцева, *Разрешимость задачи о капиллярах. Ч. 2.* — Вестник ЛГУ, сер. матем., **1** (1975).

24. Н. Н. Уральцева, *Об оценках максимумов модулей градиентов решений задач капиллярности.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **115** (1981).
25. G. Huisken, *Nonparametric mean curvature with boundary conditions.* — J. Diff. Eq., **77** (1989).
26. V. Oliker, N. N. Uraltseva, *Evolution of nonparametric surface with speed depending on curvature. II. The mean curvature case.* — Comm on Pure Appl. Math., XLVI, No. 1 (1993).
27. V. Oliker, N. Uraltseva, *Evolution of nonparametric surface with speed depending on curvature.III.Some remarks on mean curvature and anisotropic flows.* — In: IMA volumes in Math. and Applic., **47**, Springer-Verlag (1993).
28. V. Oliker, N. N. Uraltseva, *Long time behavior of flows moving by mean curvature.* — Nonlinear Evolution Equations, AMS Translations, ser. 2, **164** (1995).
29. V. Oliker, N. N. Uraltseva, *Long time behavior of flows moving by mean curvature. II.* — Topological Methods in Nonlinear Analysis, **9** (1997).
30. L. A. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions.* — Acta Math., **139** (1977).
31. H. Shahgholian, N. N. Uraltseva, *Regularity properties of a free boundary contact points with the fixed boundary.* — Duke Math. J., **116**, No. 1 (2003).
32. D. Apushkinskaya, N. N. Uraltseva, H. Shahgholian, *On the global solutions of the parabolic obstacle problem.* — St.Petersburg Math. J., **14**, No. 1 (2003).