Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 309, 2004 г.

Л. Ю. Колотилина

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ДИАГОНАЛЬНОГО МАСШТАБИРОВАНИЯ ДЛЯ КВАЗИВЕЩЕСТВЕННЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ 3×3 МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$ – эрмитова положительно определенная матрица. Под проблемой оптимального диагонального масштабирования A мы будем понимать следующую задачу: найти невырожденную диагональную матрицу $D_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ такую, что

$$k(D_0^* A D_0) = \inf_{D\in D(n,\mathbb{C})} k(D^* A D), \tag{1.1}$$

где через $D(n,\mathbb{C})$ обозначена группа всех невырожденных диагональных матриц из $\mathbb{C}^{n\times n}$, а

$$k(B) = \lambda_1(B)/\lambda_n(B) \tag{1.2}$$

– это спектральное число обусловленности эрмитовой положительно определенной матрицы B, собственные значения которой положительны и занумерованы в порядке невозрастания:

$$\lambda_1(B) \geqslant \lambda_2(B) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(B) > 0.$$

В дальнейшем мы будем говорить, что матрица A *оптимально отмасштабирована*, если для нее справедливо равенство (1.1) при $D_0 = I_n$, где через I_n обозначается единичная матрица порядка n. Кроме того, если верно равенство (1.1), то число обусловленности $k(D_0^* A D_0)$ мы будем называть *оптимальным числом обусловленности* для A (относительно преобразований подобия с невырожденными диагональными матрицами) и будем обозначать его через $k_{\rm opt}(A)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ-2268.2003.1.

В действительности, при изучении проблемы оптимального масштабирования нас интересует не только проблема нахождения матрицы D_0, осуществляющей оптимальное симметричное масштабирование, но и следующие связанные с ней задачи:

(i) выяснить, является ли данная матрица оптимально отмасштабированной;

(ii) описать все оптимально отмасштабированные матрицы (в терминах, допускающих практическую проверку);

(iii) найти $k_{\mathrm{opt}}(A)$;

(iv) определить спектральную структуру матрицы $D_0^*AD_0$ (в частности, определить, является ли спектр $D_0^*AD_0$ простым).

Очерченный круг задач, связанных с задачей (1.1), имеет как самостоятельное значение в рамках теории матриц, так и важные приложения. Отметим, прежде всего, что если B – невырожденная $n\times n$ матрица, то, в силу соотношений

$$DB(DB)^* = D(BB^*)D^*, \quad (BD)^*\, BD = D^*(B^*B)D,$$

задача минимизации спектрального числа обусловленности B за счет ее одностороннего диагонального масштабирования эквивалентна минимизации числа обусловленности эрмитовой положительно определенной матрицы BB^* или B^*B за счет ее симметричного диагонального масштабирования. Отметим далее, что решение задачи (1.1) дает оптимальный диагональный переобуславливатель D_0, который может быть использован для повышения скорости сходимости при итерационном решении системы линейных уравнений с матрицей A. Наконец, упомянем, что спектральное число обусловленности играет ключевую роль в теории возмущений для систем линейных уравнений и задач на собственные значения, поскольку характеризует чувствительность решения к возмущениям начальных данных и ошибкам округления.

Задача (1.1) исследовалась во многих работах и, в частности, в [4, 5, 7–10]. Напомним, что в статье [5] было представлено условие, формулируемое в терминах собственных векторов матрицы A, отвечающих ее наибольшему и наименьшему собственным значениям, при выполнении которого матрица A является оптимально отмасштабированной. Кроме того, было показано, что если крайние собственные значения простые, то это условие является и необходимым (точная формулировка этого результата будет представлена ниже, см. лемму 3.6). В работе [8] для эрмитовых положительно определенных матриц были получены необходимые и достаточные условия оптимальной отмасштабированности, которые обобщают результат Форсайта–Штрауса на случай матриц, имеющих кратные крайние собственные значения. Тем самым задача (ii) теоретически решена, хотя имеющееся решение обладает ограниченной практической значимостью.

Наиболее простой способ диагонального масштабирования матриц – это их масштабирование по Якоби, в результате которого все диагональные элементы матрицы становятся равными единице. Хорошо известно [5], что в случае 2-циклических эрмитовых положительно определенных матриц масштабирование по Якоби оптимально в смысле задачи (1.1). Более того, как указано в [5], положительно определенная матрица вида

$$\begin{bmatrix} c_1 I_p & B \\ B^* & c_2 I_q \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2$.

В случае же произвольных эрмитовых положительно определенных матриц порядка n масштабирование по Якоби является квазиоптимальным, т.е. справедливо неравенство

$$k(D_A^{-1/2} A D_A^{-1/2}) \leqslant n k_{\mathrm{opt}}(A),$$

где D_A – это диагональная часть A [10].

В общем случае надеяться на полное теоретическое решение задачи оптимального масштабирования, под которым мы понимаем решение задачи (1.1) и задач (i)–(iv), вряд ли возможно. К этому выводу приводит уже анализ случая квазивещественных матриц порядка 3, представленный в данной работе.

Здесь и ниже, матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, называется *квазивещественной*, если существует такая унитарная диагональная матрица S, что $S^*AS \in \mathbb{R}^{n\times n}$; в противном случае матрица A называется *существенно комплексной.*

Основные результаты, касающиеся решения проблемы оптимального диагонального масштабирования для неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных матриц порядка 3, представлены в §3. Для этого случая мы приводим явное описание всех оптимально отмасштабированных матриц, которые (с точностью до положительного множителя и преобразования подобия с унитарной диагональной матрицей) исчерпываются вещественными симметричными матрицами четырех канонических типов, а для заданной матрицы C мы приводим формулы для определения $k_{\mathrm{opt}}(C)$, матрицы D_0, решающей задачу (1.1), а также собственных значений оптимально отмасштабированной матрицы $D_0^* C D_0$. Указанные результаты позволяют нам также исследовать вопрос об оптимальности масштабирования по Якоби для неприводимых квазивещественных 3×3 матриц.

Здесь кажется уместным напомнить результаты по проблеме оптимального масштабирования, полученные для случая 3×3 матриц к настоящему времени.

Теорема 1.1 [7]. *Пусть A – эрмитова положительно определенная матрица порядка 3. Матрица A оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда найдутся такие ее собственные векторы $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, отвечающие наибольшему и наименьшему собственным значениям соответственно, что*

$$|x_i| = |y_i|, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Заметим, что если в условиях теоремы 1.1 матрица A вещественна и имеет кратное собственное значение, то отвечающий ему собственный вектор, для которого выполнено условие (1.4), может оказаться комплексным.

Теорема 1.2 [9]. *Пусть $C = (c_{ij})$ – вещественная симметричная положительно определенная 3×3 матрица такая, что*

(a) $a_i > 0$ *и* $c_{ii} - a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, *где*

$$a_i = \frac{c_{ik} c_{ij}}{c_{jk}} \quad (i, j, k \quad \textit{все различны}), \tag{1.5}$$

(b)

$$\frac{a_i}{c_{ii} - a_i} \leqslant \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{c_{jj} - a_j}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Тогда матрица

$$D_0 = \operatorname{diag}\Big((c_{11} - a_1)^{-1/2}, (c_{22} - a_2)^{-1/2}, (c_{33} - a_3)^{-1/2} \Big) \tag{1.7}$$

является решением задачи (1.1).

В §3 мы получим независимое доказательство теоремы 1.1 в неприводимом квазивещественном случае, основанное на описании всех оптимально отмасштабированных 3×3 матриц. Результат же теоремы 1.2, относящийся к случаю матриц, диагонально подобных оптимально отмасштабированным матрицам, имеющим кратное собственное значение, будет полностью перекрыт.

При выводе результатов §3 мы будем использовать вспомогательные результаты, представленные в §2.

В заключение же этого вводного параграфа мы приведем решение проблемы оптимального диагонального масштабирования для случая 2×2 матриц и для случая приводимых 3×3 матриц.

С помощью упомянутого выше результата Форсайта–Штрауса для матриц вида (1.3) или же результатов работ [1–3], в которых исследуется блочный 2×2 случай, нетрудно доказать следующую простую теорему, дающую решение проблемы оптимального масштабирования для матриц порядка 2.

Теорема 1.3. *Пусть матрица* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}$ *эрмитова и положительно определена. Тогда A оптимально отмасштабирована в том и только том случае, когда $a = c$, так что $D_0 = \alpha D_A^{-1/2}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, и*

$$k_{\mathrm{opt}}(A) = \frac{\sqrt{ac} + |b|}{\sqrt{ac} - |b|}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим случай приводимых эрмитовых положительно определенных матриц порядка 3. Если матрица C диагональна, то, очевидно, она оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда все ее диагональные элементы совпадают; при этом $k_{\mathrm{opt}}(C) = 1$. Если же матрица C не является диагональной, то, как следует из приводимой ниже теоремы, условие $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ достаточно для того, чтобы C была оптимально отмасштабированной, но не является необходимым, как в случае 2×2 матриц.

Теорема 1.4. *Пусть $C = (c_{ij})$ – приводимая эрмитова положительно определенная матрица порядка 3, причем элемент c_{ij}, где $i < j$, отличен от нуля. Тогда C оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда*

$$c_{ii} = c_{jj} \quad \text{и} \quad \sqrt{c_{ii}c_{jj}} - |c_{ij}| \leqslant c_{kk} \leqslant \sqrt{c_{ii}c_{jj}} + |c_{ij}|, \tag{1.9}$$

и
$$k_{\rm opt}(C)=\frac{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}+|c_{ij}|}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}-|c_{ij}|}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Заметим, что с учетом теоремы 1.3 мы имеем

$$k_{\rm opt}(C)\leqslant k\big(D_c^{-1/2}CD_c^{-1/2}\big)$$

$$=k\left(\begin{bmatrix}(c_{ii})^{-1/2} & & 0\\ & (c_{jj})^{-1/2} & \\ 0 & & (c_{kk})^{-1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij} & 0\\ c_{ji} & c_{jj} & 0\\ 0 & 0 & c_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(c_{ii})^{-1/2} & & 0\\ & (c_{jj})^{-1/2} & \\ 0 & & (c_{kk})^{-1/2}\end{bmatrix}\right)$$

$$=k\left(\begin{bmatrix}1 & \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} & 0\\ \frac{c_{ji}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}+|c_{ij}|}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}-|c_{ij}|}$$

$$=k_{\rm opt}\left(\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}\right)\leqslant k_{\rm opt}(C). \tag{1.11}$$

Тем самым равенство (1.10) установлено.

Следовательно, матрица C оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда
$$k(C)=\frac{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}+|c_{ij}|}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}-|c_{ij}|}. \tag{1.12}$$

Покажем, что равенство (1.12) равносильно условиям (1.9). Если (1.12) справедливо, то с учетом (1.11) мы имеем
$$k(C)=k_{\rm opt}\left(\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}\right)\leqslant k\left(\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}\right)\leqslant k(C), \tag{1.13}$$

откуда, в частности, следует, что подматрица $\left[\begin{smallmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{smallmatrix}\right]$ оптимально отмасштабирована. Тогда по теореме 1.3 мы необходимо имеем
$$c_{ii}=c_{jj}. \tag{1.14}$$

Ввиду неравенств
$$\lambda_1(C)\geqslant\lambda_1\left(\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}\right)\quad\text{и}\quad\lambda_3(C)\leqslant\lambda_2\left(\begin{bmatrix}c_{ii} & c_{ij}\\ c_{ji} & c_{jj}\end{bmatrix}\right),$$

из соотношений (1.13) и (1.14) также следует, что

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(C) &= \lambda_1\left(\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix}\right) = \sqrt{c_{ii}c_{jj}} + |c_{ij}|, \\
\lambda_3(C) &= \lambda_2\left(\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix}\right) = \sqrt{c_{ii}c_{jj}} - |c_{ij}|.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Поскольку в условиях теоремы c_{kk} есть собственное значение матрицы C, то $\lambda_1(C) \geqslant c_{kk} \geqslant \lambda_3(C)$, что с учетом (1.15) и означает, что оба неравенства в (1.9) верны.

Наконец, если выполнены условия (1.9), то равенство (1.12), означающее, что C оптимально отмасштабирована, тривиально следует из соотношений

$$
\lambda_1(C) = \max\left\{\lambda_1\left(\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix}\right), c_{kk}\right\} = \max\left\{\sqrt{c_{ii}c_{jj}} + |c_{ij}|, c_{kk}\right\},
$$

$$
\lambda_3(C) = \min\left\{\lambda_2\left(\begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix}\right), c_{kk}\right\} = \min\left\{\sqrt{c_{ii}c_{jj}} - |c_{ij}|, c_{kk}\right\}.
$$

□

§2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе вводятся в рассмотрение некоторые скалярные и матричные величины, связанные с заданной 3×3 эрмитовой положительно определенной матрицей и инвариантные относительно преобразований подобия с невырожденными диагональными матрицами. Исследуются свойства этих величин и их связь со свойствами исходной матрицы. Результаты этого параграфа будут использованы при выводе основных результатов работы, содержащих решение проблемы оптимального масштабирования для неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных матриц в 3×3 случае.

Определим на комплексной плоскости функцию $\operatorname{sign} x$ стандартной формулой

$$
\operatorname{sign} x = \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}
$$

Пусть $C = (c_{ij})$ – эрмитова положительно определенная 3×3 матрица. Введем в рассмотрение следующие скалярные величины:

$$\alpha(C) = c_{12}c_{23}c_{31}, \quad \varepsilon(C) = \operatorname{sign}\alpha(C), \tag{2.1}$$

$$\gamma_i(C) = 1 - \frac{1}{c_{ii}c'_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.2}$$

а в предположении, что внедиагональные элементы i-ой строки матрицы C отличны от нуля, положим

$$\zeta_i(C) = \frac{c_{ii}|c_{kj}|}{|c_{ki}|\,|c_{ij}|}, \quad j \neq i, \quad k \neq i, \quad j \neq k, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{2.3}$$

Здесь и ниже для элементов обратной матрицы используется обозначение

$$C^{-1} = (c'_{ij}).$$

Определим матрицу

$$I(C) \equiv C \circ C^{-T} = (c_{ij}c'_{ji}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \tag{2.4}$$

где $\circ$ обозначает покомпонентное (адамаровское, или шуровское) произведение матриц.

Справедливы следующие очевидные результаты.

Лемма 2.1. *Для любой эрмитовой положительно определенной 3×3 матрицы C и любой невырожденной диагональной 3×3 матрицы D справедливы равенства*

$$\varepsilon(D^*CD) = \varepsilon(C); \tag{2.5}$$

$$\gamma_i(D^*CD) = \gamma_i(C), \quad i = 1, 2, 3; \tag{2.6}$$

если величина $\zeta_i(C)$ определена, то

$$\zeta_i(D^*CD) = \zeta_i(C), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3; \tag{2.7}$$

кроме того,

$$I(D^*CD) = I(C); \tag{2.8}$$

$$I(C) = [I(C)]^*. \tag{2.9}$$

Равенства (2.5)–(2.8) означают, что скалярные величины $\varepsilon(C)$, $\gamma_i(C)$ и $\zeta_i(C)$, а также матрица $I(C)$ все инвариантны относительно преобразований подобия с невырожденными диагональными матрицами, что и обусловливает их значение при исследовании интересующей нас проблемы. В частности, из соотношений (2.5)–(2.8) следует, что указанные величины инвариантны относительно умножения исходной матрицы C на любое положительное число.

Как легко понять, для приводимой эрмитовой 3×3 матрицы C ни одна из величин $\zeta_i(C)$, $i = 1, 2, 3$, не определена, поскольку знаменатели в (2.3) все равны нулю. Величины $\zeta_i(C)$ нам потребуются при исследовании неприводимых эрмитовых (положительно определенных) матриц C, для которых справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть 3×3 матрица $C = (c_{ij})$ неприводима и эрмитова. Тогда существует такой индекс i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, что $\zeta_i(C)$ определена.*

Доказательство. Как легко понять, из неприводимости и эрмитовости 3×3 матрицы следует, что хотя бы в одной из ее строк, скажем i-ой, оба внедиагональных элемента отличны от нуля, а тогда $\zeta_i(C)$ определена. $\square$

Следующая техническая лемма может быть установлена непосредственной проверкой.

Лемма 2.3. *Пусть 3×3 матрица C квазивещественна и эрмитова. Тогда*

$$\alpha(C) = c_{ij}c_{jk}c_{ki} \tag{2.10}$$

для всех наборов различных i, j и k, где $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$.

Основываясь на хорошо известной формуле

$$c'_{ij} = \pm C_{ji}/\det C, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.11}$$

где C_{ji} – это алгебраическое дополнение элемента c_{ji} в матрице C, легко убедиться в справедливости следующих результатов.

Лемма 2.4. *Пусть $C = (c_{ij})$ – невырожденная 3×3 матрица. Тогда*

$$\begin{gathered} c'_{21} = \frac{c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33}}{\det C}, \quad c'_{31} = \frac{c_{32}c_{21} - c_{31}c_{22}}{\det C}, \\ c'_{32} = \frac{c_{31}c_{12} - c_{32}c_{11}}{\det C}; \end{gathered} \tag{2.12}$$

$$c'_{ii} = \frac{c_{jj}c_{kk} - |c_{jk}|^2}{\det C}, \quad j \neq i, \quad k \neq i, \quad j \neq k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.13}$$

а для эрмитовой матрицы C справедливы соотношения

$$\begin{gathered} c_{12}c'_{21} = \frac{\alpha(C) - |c_{12}|^2 c_{33}}{\det C}, \quad c_{13}c'_{31} = \frac{\overline{\alpha(C)} - |c_{13}|^2 c_{22}}{\det C}, \\ c_{23}c'_{32} = \frac{\alpha(C) - |c_{23}|^2 c_{11}}{\det C}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Заметим, что поскольку для эрмитовой матрицы C матрица $I(C)$ также эрмитова в силу (2.9), то $I(C)$ вполне определяется равенствами (2.14).

Следующая теорема показывает, что квазивещественные невырожденные эрмитовы 3×3 матрицы могут быть охарактеризованы в терминах $\varepsilon(C)$ и $I(C)$.

Теорема 2.1. *Пусть $C = (c_{ij})$ – невырожденная эрмитова 3×3 матрица. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *C квазивещественна;*
(ii) *C^{-1} квазивещественна;*
(iii) *$\varepsilon(C) \in \mathbb{R}$;*
(iv) *$\varepsilon(C^{-1}) \in \mathbb{R}$;*
(v) *$I(C) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;*
(vi) *$I(C^{-1}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.*

Доказательство. Покажем сперва, что $(i) \Longrightarrow (iii)$. Действительно, если матрица C квазивещественна, а унитарная диагональная матрица S такова, что $S^*CS \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, то, очевидно, $\varepsilon(S^*CS) \in \mathbb{R}$, а в силу леммы 2.1 и $\varepsilon(C) \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $(iii) \Longrightarrow (i)$. Заметим, что если C диагональна, то она вещественна в силу эрмитовости. Если матрица C приводима, но отлична от диагональной, то при некоторых различных i, j и k мы имеем

$$c_{ij} \neq 0, \quad c_{ik} = 0, \quad c_{jk} = 0,$$

а тогда при

$$S = \operatorname{diag}(s_1, s_2, s_3),$$

где

$$s_i = \operatorname{sign} c_{ij}, \quad s_j = s_k = 1,$$

и $\widetilde{C} = S^*CS$ мы, очевидно, имеем

$$\overline{\widetilde{c}_{ji}} = \widetilde{c}_{ij} = \overline{s}_i c_{ij} s_j = \overline{\operatorname{sign} c_{ij}} c_{ij} = |c_{ij}| \in \mathbb{R},$$

а так как остальные внедиагональные элементы $\widetilde{C}$ равны нулю, то $\widetilde{C} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Если же матрица C неприводима, то она необходимо имеет строку, не содержащую нулевых элементов. Пусть

$$c_{ij}c_{ik} \neq 0, \quad \text{где} \quad j \neq i, \ k \neq i, \ j < k.$$

Тогда, положив

$$s_i = 1, \quad s_j = \operatorname{sign} c_{ji}, \quad s_k = \operatorname{sign} c_{ki},$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_{ij} &= \overline{s}_i c_{ij} s_j = c_{ij} \operatorname{sign} c_{ji} = |c_{ij}|, \\
\widetilde{c}_{ik} &= \overline{s}_i c_{ik} s_k = c_{ik} \operatorname{sign} c_{ki} = |c_{ik}|, \\
\widetilde{c}_{jk} &= \overline{s}_j c_{jk} s_k = \operatorname{sign} c_{ij} c_{jk} \operatorname{sign} c_{ki} = \operatorname{sign}(c_{ij}c_{jk}c_{ki})|c_{jk}|.
\end{aligned}$$

По лемме 2.3, $\operatorname{sign}(c_{ij}c_{jk}c_{ki}) = \varepsilon(C)$. Тем самым мы показали, что если $\varepsilon(C) \in \mathbb{R}$, то матрица $\widetilde{C} = S^*CS$ вещественна, а матрица C квазивещественна.

Равносильность утверждений (iii) и (v) следует из выражений (2.14) для элементов матрицы $I(C)$ и того факта, что $\det C \in \mathbb{R}$ в силу эрмитовости C.

Равносильность (iv) и (vi) следует из уже установленной равносильности (iii) и (v).

Равносильность (i) и (ii) очевидна, а равносильность (v) и (vi) вытекает из тривиального соотношения

$$I(C^{-1}) = [I(C)]^T.$$

□

Лемма 2.5. *Пусть $A = (a_{ij})$ – эрмитова положительно определенная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$a_{ii}a'_{ii} \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.15}$$

где $A^{-1} = (a'_{ij})$, причем все неравенства в (2.15) являются строгими тогда и только тогда, когда каждый столбец A имеет, по крайней мере, два ненулевых элемента. В частности, если матрица A неприводима, то все неравенства в (2.15) строгие.

Доказательство. Ясно, что достаточно установить неравенство (2.15) для $i = 1$. Представим матрицу A в следующем блочном 2×2 виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^* \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда, как хорошо известно,

$$a'_{11} = \left(a_{11} - A_{21}^* A_{22}^{-1} A_{21}\right)^{-1},$$

откуда, ввиду положительной определенности A, следует, что

$$(a'_{11})^{-1} \leqslant a_{11}. \tag{2.16}$$

Тем самым неравенство (2.15) доказано. Далее, неравенство (2.16) является равенством в том и только том случае, когда

$$A_{21}^* A_{22}^{-1} A_{21} = 0, \quad \text{где} \quad A_{21}^* = [a_{12}, \ldots, a_{1n}].$$

Поскольку главная подматрица A_{22} матрицы A положительно определена, последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда $A_{21} = 0$, т.е. тогда и только тогда, когда первый стобец матрицы A имеет единственный ненулевой элемент. $\square$

Из леммы 2.5 немедленно вытекает следующее нужное нам утверждение.

Следствие 2.1. *Если C – эрмитова положительно определенная 3×3 матрица, то*

$$\gamma_i(C) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

причем если C неприводима, то все эти неравенства являются строгими.

Следующий результат тривиальным образом вытекает из определения (2.4), которое естественным образом обобщается на произвольное $n \geqslant 1$.

Лемма 2.6. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, невырождена. Тогда*

$$I(A)e = e, \tag{2.17}$$

где $e = [1, \ldots, 1]^T$.

Замечание 2.1. Из леммы 2.6 следует, что $\lambda = 1$ является собственным значением матрицы $I(A)$ для любой невырожденной A.

Если же матрица A эрмитова и положительно определена, то (см., например, [6, теорема 5.4.3(b)]) $\lambda = 1$ в действительности является наименьшим собственным значением $I(A)$.

Лемма 2.7. *Пусть 3×3 матрица C квазивещественна, неприводима, эрмитова и положительно определена. Тогда либо*

$$\alpha(C) < |c_{ij}|^2 c_{kk} \quad \text{для всех различных } i, j \text{ и } k, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3, \tag{2.18}$$

либо найдутся такие различные i, j и k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$, что

$$|c_{jk}|^2 c_{ii} \leqslant \alpha(C) < \min\left\{|c_{ij}|^2 c_{kk}, |c_{ik}|^2 c_{jj}\right\}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Заметим сперва, что в условиях леммы матрица $I(C)$ корректно определена. В силу теоремы 2.1, как $\alpha(C)$, так и $I(C)$ вещественны. Предположим, что условия (2.18) не выполнены, т.е. для некоторых различных i, j и k справедливо неравенство

$$|c_{jk}|^2 c_{ii} \leqslant \alpha(C). \tag{2.20}$$

Ввиду соотношений (2.14) из леммы 2.4 и неравенства $\det C > 0$, из (2.20) вытекает, что

$$c_{jk} c'_{kj} \geqslant 0, \tag{2.21}$$

а тогда с учетом лемм 2.6 и 2.5 мы имеем

$$c_{ji} c'_{ij} = \left(1 - c_{jj} c'_{jj}\right) - c_{jk} c'_{kj} < -c_{jk} c'_{kj} \leqslant 0.$$

Следовательно, по лемме 2.4,

$$\frac{\alpha(C) - |c_{ij}|^2 c_{kk}}{\det C} = c_{ji} c'_{ij} < 0,$$

откуда следует, что

$$\alpha(C) < |c_{ij}|^2 c_{kk}.$$

Аналогично, в силу лемм 2.6 и 2.5 и неравенства (2.21) мы имеем

$$c_{ki} c'_{ik} = \left(1 - c_{kk} c'_{kk}\right) - c_{kj} c'_{jk} < -c_{kj} c'_{jk} = -\overline{c_{jk} c'_{kj}} \leqslant 0,$$

так что по лемме 2.4

$$\frac{\alpha(C) - |c_{ik}|^2 c_{jj}}{\det C} = c_{ki} c'_{ik} < 0$$

и, следовательно,

$$\alpha(C) < |c_{ik}|^2 c_{jj}.$$

Лемма 2.7 доказана полностью. $\square$

§3. Основные результаты

В этом параграфе мы решаем проблему оптимального диагонального масштабирования для неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных 3×3 матриц.

Первая теорема этого параграфа дает описание неприводимых эрмитовых положительно определенных 3×3 матриц, которые диагонально подобны оптимально отмасштабированным матрицам, имеющим двукратное собственное значение.

Теорема 3.1. *Неприводимая эрмитова положительно определенная 3×3 матрица $C = (c_{ij})$ диагонально подобна оптимально отмасштабированной матрице A, имеющей двукратное собственное значение, тогда и только тогда, когда C не имеет нулевых элементов,*

$$\varepsilon(C) = \pm 1, \tag{3.1}$$

и

$$\gamma_i(C)\zeta_i^2(C) \geqslant 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

При этом диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$, где

$$d_i = \frac{|c_{jk}|}{[c_{ii}|c_{jk}|^2 - \alpha(C)]^{1/2}}, \quad j \neq i, \ k \neq i, \ j \neq k, \ i = 1, 2, 3, \tag{3.3}$$

корректно определена и имеет положительные диагональные элементы, а матрица $A = DCD$ оптимально отмасштабирована,

$$\operatorname{Spec}(A) = \left\{1, 1, -\frac{\alpha(C)/\det C}{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}}\right\}, \tag{3.4}$$

и

$$k_{\mathrm{opt}}(C) = k(A) = \left[-\frac{\alpha(C)/\det C}{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}}\right]^{\varepsilon(C)}. \tag{3.5}$$

Доказательству теоремы 3.1 мы предпошлем три леммы, первая из которых является незначительным обобщением теоремы 5.2 из [9].

Лемма 3.1. *Эрмитова положительно определенная матрица вида*

$$A = I_n + \xi x x^*,$$

где $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ *и* $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, *оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда*

$$2|x_i|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Доказательство. Предположим сперва, что $\xi > 0$. Определим унитарную матрицу $S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ по формуле

$$s_i = \begin{cases} \operatorname{sign} x_i, & x_i \neq 0, \\ 1, & x_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что матрица $A_S = S^*AS$ оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда этим свойством обладает A. При этом

$$A_S = I_n + yy^T,$$

где $y = (y_i)$ и $y_i = \xi^{1/2}|x_i| > 0$, $i = 1, \ldots, n$. В силу теоремы 5.2 из [9], матрица A_S оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$y_i^2 \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j^2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Поскольку $\xi > 0$, неравенства (3.7) очевидно равносильны неравенствам

$$|x_i|^2 \leqslant \sum_{j \neq i} |x_j|^2 = \|x\|^2 - |x_i|^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые, в свою очередь, равносильны неравенствам (3.6).

Если же $\xi < 0$, то, как легко убедиться,

$$A^{-1} = I_n + \eta x x^*,$$

где

$$\eta = \frac{-\xi}{1 + \xi\|x\|^2} = \frac{-\xi}{x^*Ax/\|x\|^2} > 0.$$

В силу уже доказанного, матрица A^{-1} оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.6). Теперь утверждение леммы следует из того факта, что матрицы A и A^{-1} являются оптимально отмасштабированными одновременно. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* 3×3 *матрица*

$$A = I_3 + \xi x x^*, \tag{3.8}$$

где $\xi \neq 0$, $x = (x_i)$ *и* $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, *эрмитова и положительно определена. Тогда для любого* i, $1 \leqslant i \leqslant 3$,

$$\gamma_i(A)\,\zeta_i^2(A) \geqslant 1 \Longleftrightarrow 2|x_i|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{3.9}$$

Доказательство. Из равенства (3.8) легко следует, что $1+\xi\|x\|^2 = \dfrac{x^*Ax}{\|x\|^2} > 0$ и

$$A^{-1} = I_3 - \frac{\xi}{1+\xi\|x\|^2} x x^*. \tag{3.10}$$

В силу соотношений (3.8) и (3.10) мы имеем:

$$\gamma_i(A) = 1 - \frac{1}{a_{ii}a'_{ii}} = 1 - \frac{1}{(1+\xi|x_i|^2)\Big(1 - \dfrac{\xi|x_i|^2}{1+\xi\|x\|^2}\Big)}, \tag{3.11}$$

а из (3.8) также следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_i(A) &= \frac{a_{ii}|a_{kj}|}{|a_{ij}|\,|a_{ki}|} = \frac{|\xi|(1+\xi|x_i|^2)x_k\,\overline{x}_j}{|\xi|^2 x_i\,\overline{x}_j\,x_k\,\overline{x}_i} \\ &= \frac{1+\xi|x_i|^2}{|\xi|\,|x_i|^2}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

С помощью соотношений (3.11) и (3.12) нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\gamma_i(A)\zeta_i^2(A) = \frac{(\|x\|^2 - |x_i|^2)(1+\xi|x_i|^2)}{|x_i|^2(1+\xi\|x\|^2 - \xi|x_i|^2)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

из которых легко следует равносильность неравенств в (3.9). $\square$

Из лемм 3.1 и 3.2 немедленно вытекает следующий результат, который и будет использован при доказательстве теоремы 3.1.

Лемма 3.3. *Эрмитова положительно определенная* 3×3 *матрица вида*

$$A = I_3 + \xi x x^*,$$

где $\xi \neq 0$, $x = (x_i)$ *и* $x_i \neq 0$, $i = 1,2,3$, *оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда справедливы неравенства*

$$\gamma_i(A)\zeta_i^2(A) \geqslant 1, \quad i = 1,2,3. \tag{3.13}$$

Доказательство теоремы 3.1. *Необходимость.* Пусть $\lambda > 0$ – двукратное собственное значение оптимально отмасштабированной матрицы

$$A = D^*CD. \tag{3.14}$$

Тогда, очевидно, C диагонально подобна и матрице $\lambda^{-1}A$, которая также оптимально отмасштабирована и имеет двукратное собственное значение, равное 1. Поэтому, не теряя общности, сразу же будем предполагать, что

$$\operatorname{Spec}(A) = \{1, 1, \mu\}, \quad \mu > 0.$$

Заметим, что из неприводимости матриц C и A немедленно следует, что $\mu \neq 1$, так как в противном случае эрмитова матрица A была бы диагональной.

Ясно, что матрицу A можно представить в виде

$$A = I_3 + (\mu - 1)xx^*, \quad \|x\| = 1, \tag{3.15}$$

где $x = (x_i)$ – это нормированный собственный вектор A, отвечающий ее простому собственному значению μ. Заметим также, что

$$x_i \neq 0, \quad i = 1,2,3,$$

поскольку в противном случае матрица A была бы приводимой. Следовательно, все элементы матриц A и C отличны от нуля.

С помощью леммы 2.1 из (3.14) и (3.15) мы выводим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(C) = \varepsilon(A) = \operatorname{sign}(a_{12}a_{23}a_{31}) &= \operatorname{sign}\left[(\mu-1)^3|x_1|^2|x_2|^2|x_3|^2\right] \\ &= \operatorname{sign}(\mu - 1) = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Таким образом, в силу теоремы 2.1 матрица C является квазивещественной.

Поскольку матрица A оптимально отмасштабирована, из леммы 3.3 следует, что справедливы неравенства

$$\gamma_i^2(A)\zeta_i^2(A) \geqslant 1, \quad i = 1,2,3,$$

которые, в силу леммы 2.1, равносильны неравенствам (3.2).

Достаточность. Пусть матрица C не содержит нулевых элементов и удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2). Заметим, что из неравенств (3.2) с учетом квазивещественности C, леммы 2.3 и определения 2.2 вытекает, что

$$\left(\frac{c_{ii}|c_{jk}|^2}{\alpha(C)}\right)^2 = \frac{c_{ii}^2|c_{jk}|^4}{|c_{ij}|^2|c_{jk}|^2|c_{ki}|^2} = \zeta_i^2(C) \geqslant \gamma_i^{-1}(C) > 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

так что для матрицы C мы имеем

$$c_{ii}|c_{jk}|^2 > |\alpha(C)| \geqslant \alpha(C), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Неравенства (3.17) показывают, что все знаменатели в формулах (3.3) строго положительны, а значит матрица D корректно определена и имеет положительные диагональные элементы. Положим

$$A = DCD. \tag{3.18}$$

Тогда, в силу (3.3), мы будем иметь:

$$\begin{aligned} a_{ii} = d_i^2 c_{ii} &= \frac{c_{ii}|c_{jk}|^2}{c_{ii}|c_{jk}|^2 - \alpha(C)} \\ &= 1 + \frac{\alpha(C)}{c_{ii}|c_{jk}|^2 - \alpha(C)}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{3.19}$$

и

$$a_{ij} = d_i c_{ij} d_j = \frac{|c_{jk}|\, c_{ij}\, |c_{ki}|}{\left[c_{ii}|c_{jk}|^2 - \alpha(C)\right]^{1/2}\left[c_{jj}|c_{ki}|^2 - \alpha(C)\right]^{1/2}}, \quad i \neq j. \tag{3.20}$$

Используя выражения (3.19) и (3.20) и лемму 2.3, нетрудно убедиться, что при

$$x = \begin{bmatrix} \left[c_{11}|c_{23}|^2 - \alpha(C)\right]^{-1/2} \\ \dfrac{\operatorname{sign} c_{21}}{\varepsilon(C)}\left[c_{22}|c_{13}|^2 - \alpha(C)\right]^{-1/2} \\ \dfrac{\operatorname{sign} c_{31}}{\varepsilon(C)}\left[c_{33}|c_{12}|^2 - \alpha(C)\right]^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

справедливо равенство

$$A = I_3 + \alpha(C) x x^*. \tag{3.22}$$

Действительно, равенство (3.22) очевидно верно для диагональных элементов A и для модулей ее внедиагональных элементов. Следовательно, нам нужно проверить его лишь для знаков внедиагональных элементов a_{ij} при $i < j$. При $i = 1$ мы очевидно имеем

$$\operatorname{sign}\left[\alpha(C)x_1\,\overline{x}_j\right] = \varepsilon(C)\frac{\overline{\operatorname{sign} c_{j1}}}{\varepsilon(C)} = \operatorname{sign} c_{1j} = \operatorname{sign} a_{1j}, \quad j = 2, 3,$$

а для $i = 2$ и $j = 3$ требуемое равенство устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\left[\alpha(C)x_2\,\overline{x}_3\right] &= \varepsilon(C)\frac{\operatorname{sign} c_{21}}{\varepsilon(C)}\;\frac{\overline{\operatorname{sign} c_{31}}}{\varepsilon(C)}\\ &= \frac{\operatorname{sign}\left(c_{21}\,c_{13}\right)}{\operatorname{sign}\left(c_{21}c_{13}c_{32}\right)} = \operatorname{sign} c_{23} = \operatorname{sign} a_{23}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.1), леммой 2.3, эрмитовостью матрицы C и положительностью диагональных элементов D.

Итак, матрица A удовлетворяет соотношению (3.22). Поскольку по условию C не содержит нулевых элементов, то не содержит их и A. Следовательно, $\alpha(C) \neq 0$ и все компоненты вектора x отличны от нуля, так что матрица A удовлетворяет условиям леммы 3.3. Поэтому оптимальная отмасштабированность A равносильна справедливости неравенств

$$\gamma_i(A)\zeta_i^2(A) \geqslant 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

которые, в силу леммы 2.1, равносильны неравенствам (3.2), справедливым по предположению.

Из представления (3.22) следует, что

$$\operatorname{Spec}(A) = \{1, 1, 1 + \alpha(C)\|x\|^2\}.$$

Простое собственное значение

$$\mu = 1 + \alpha(C)\|x\|^2 \tag{3.23}$$

матрицы A можно найти, воспользовавшись равенством

$$\mu = \det A = d_1^2 d_2^2 d_3^2 \det C$$

и приняв во внимание соотношение

$$d_1^2 d_2^2 d_3^2 = -\frac{\alpha^2(C)}{c_{12}c'_{21}c_{23}c'_{32}c_{31}c'_{13}(\det C)^3} = -\frac{\alpha(C)/(\det C)^2}{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}},$$

которое вытекает из формул (3.3) с учетом равенств (2.14) из леммы 2.4 и того факта, что $\alpha(C) \in \mathbb{R}$. Тем самым равенство (3.4) доказано.

Наконец, для доказательства (3.5) заметим, что из цепочки равенств

$$\begin{aligned}\varepsilon(C) = \varepsilon(A) &= \operatorname{sign}\left[\alpha^3(C)|x_1|^2|x_2|^2|x_3|^2\right] \\ &= \operatorname{sign}\alpha(C) = \operatorname{sign}\frac{\mu-1}{\|x\|^2} = \operatorname{sign}(\mu-1),\end{aligned}$$

основанной на соотношениях (3.22) и (3.23), следует, что

$$\varepsilon(C) = 1 \Longleftrightarrow \mu > 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon(C) = -1 \Longleftrightarrow \mu < 1. \tag{3.24}$$

Теперь в силу (3.4) и (3.24) мы имеем

$$k(A) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha(C)/\det C}{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}} & \text{при } \varepsilon(C) = 1, \\ -\dfrac{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}}{\alpha(C)/\det C} & \text{при } \varepsilon(C) = -1, \end{cases}$$

что и доказывает равенство (3.5). Теорема 3.1 доказана полностью. □

Заметим, что в условиях теоремы 3.1 справедливы неравенства (3.17), из которых, ввиду соотношений (2.14) из леммы 2.4, следует, что

$$\alpha(C)\alpha(C^{-1}) < 0,$$

так что $\varepsilon(C)$ и $\varepsilon(C^{-1})$ имеют противоположные знаки. Из этого факта вытекает, что, как и должно, формула (3.5) для оптимального (относительно преобразований подобия с диагональными невырожденными матрицами) числа обусловленности инвариантна относительно обращения матриц. С другой стороны, формула (3.5), как и следовало ожидать, инвариантна также и относительно рассматриваемых преобразований подобия, поскольку

$$\frac{\alpha(D^*CD)}{\det(D^*CD)} = \frac{\alpha(C)}{\det C}.$$

Ниже мы приводим некоторые простые, но важные следствия теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Если неприводимая эрмитова положительно определенная 3×3 матрица C существенно комплексна, то любая оптимально отмасштабированная матрица вида D^*CD имеет три различных собственных значения.*

Следствие 3.2. *Если неприводимая эрмитова положительно определенная 3×3 матрица C квазивещественна, а матрица $I(C)$ имеет неотрицательный внедиагональный элемент, то любая оптимально отмасштабированная матрица вида D^*CD имеет три различных собственных значения.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1, если бы оптимально отмасштабированная матрица D^*CD имела двукратное собственное значение, то C не имела бы нулевых элементов и были бы выполнены условия (3.1) и (3.2). В этом случае, как было показано при доказательстве теоремы 3.1 в части достаточности, были бы верны неравенства (3.17), из которых ввиду соотношений (2.14) из леммы 2.4 следовало бы, что

$$c_{ij}c'_{ji} < 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3,$$

так что все внедиагональные элементы матрицы $I(C)$ были бы строго отрицательными. $\square$

С учетом того факта, что, в силу теоремы 2.1, эрмитова положительно определенная матрица C существенно комплексна тогда и только тогда, когда $I(C) \notin \mathbb{R}^{3\times 3}$, утверждения следствий 3.1 и 3.2 можно также сформулировать и в следующем виде.

Следствие 3.3. *Если C – неприводимая эрмитова положительно определенная 3×3 матрица, а среди внедиагональных элементов матрицы $I(C)$ хотя бы один не является отрицательным числом, то любая оптимально отмасштабированная матрица, диагонально подобная C, имеет простой спектр.*

Следующие две леммы нужны для описания всех оптимально отмасштабированных неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных матриц и для доказательства единственности решения задачи (1.1) при соответствующих ограничениях на вид оптимально отмасштабированной матрицы.

Лемма 3.4. *Пусть вектор $x = (x_i) \in \mathbb{C}^3$, где $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет условию*

$$2|x_i| \leqslant \|x\|^2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.25}$$

Тогда существует такой вектор $y = (y_i) \in \mathbb{C}^3$, *что*

$$x^* y = 0 \quad \text{и} \quad |y_i| = |x_i|, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.26}$$

Доказательство. Ясно, что утверждение леммы достаточно доказать для случая

$$x_1 = 1, \quad |x_i| \leqslant 1, \quad i = 2, 3. \tag{3.27}$$

В предположениях (3.27) неравенства (3.25), очевидно, равносильны неравенству

$$1 \leqslant |x_2|^2 + |x_3|^2. \tag{3.28}$$

Положим

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\alpha_2 + i\sqrt{1-\alpha_2^2}\right) x_2 \\ \left(\alpha_3 - i\dfrac{|x_2|^2}{|x_3|^2}\sqrt{1-\alpha_2^2}\right) x_3 \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_2 = \frac{|x_3|^4 - |x_2|^4 - 1}{2|x_2|^2}, \quad \alpha_3 = \frac{|x_2|^4 - |x_3|^4 - 1}{2|x_3|^2}. \tag{3.29}$$

Как легко убедиться, в предположении, что $|x_2| \leqslant 1$ и $|x_3| \leqslant 1$, условия $|\alpha_2| \leqslant 1$ и $|\alpha_3| \leqslant 1$ равносильны неравенству (3.28), так что $\sqrt{1-\alpha_2^2} \in \mathbb{R}$. Теперь равенство $|x_i| = |y_i|$ очевидно выполняется при $i = 1, 2$, а при $i = 3$ оно легко доказывается с помощью соотношения

$$\alpha_3 = \frac{-1 - \alpha_2 |x_2|^2}{|x_3|^2},$$

следующего из (3.29). Наконец, ортогональность векторов x и y устанавливается непосредственной проверкой. □

Лемма 3.5. *Пусть эрмитова положительно определенная матрица* A *порядка* $n \geqslant 2$ *оптимально отмасштабирована и имеет такие собственные векторы* $x = (x_i)$ *и* $y = (y_i)$, *отвечающие ее старшему и младшему собственным значениям соответственно, что*

$$|x_i| = |y_i| \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.30}$$

и пусть $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ – *невырожденная диагональная матрица. Тогда матрица* $D^* A D$ *оптимально отмасштабирована в* *том и только том случае, когда $D = \beta S$, где $\beta \neq 0$, а S – унитарная диагональная матрица.*

Доказательство. В силу свойства экстремальности крайних собственных значений эрмитовых матриц мы имеем

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(D^*AD) &\geqslant \frac{(D^{-1}x)^*D^*AD(D^{-1}x)}{(D^{-1}x)^*(D^{-1}x)} \\
&= \frac{x^*Ax}{x^*D^{-*}D^{-1}x} = \frac{\lambda_1(A)\|x\|^2}{x^*D^{-*}D^{-1}x}, \\
\lambda_n(D^*AD) &\leqslant \frac{(D^{-1}y)^*D^*AD(D^{-1}y)}{(D^{-1}y)^*(D^{-1}y)} \\
&= \frac{y^*Ay}{y^*D^{-*}D^{-1}y} = \frac{\lambda_n(A)\|y\|^2}{y^*D^{-*}D^{-1}y},
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

причем неравенства в (3.31) обращаются в равенства тогда и только тогда, когда векторы $D^{-1}x$ и $D^{-1}y$ являются собственными для матрицы D^*AD и отвечают ее крайним собственным значениям. Поскольку, в силу (3.30),

$$\|x\| = \|y\| \quad \text{и} \quad x^*D^{-*}D^{-1}x = y^*D^{-*}D^{-1}y,$$

то из (3.31) следует, что

$$k(D^*AD) \geqslant k(A),$$

причем это неравенство обращается в равенство (т.е. обе матрицы A и D^*AD оптимально отмасштабированы) тогда и только тогда, когда

$$
\begin{aligned}
&D^*AD \cdot D^{-1}x = D^*Ax = \lambda_1(A)D^*x = \lambda_1(D^*AD)D^{-1}x, \\
&D^*AD \cdot D^{-1}y = D^*Ay = \lambda_n(A)D^*y = \lambda_n(D^*AD)D^{-1}y.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Соотношения (3.32), очевидно, равносильны равенствам

$$|d_i|^2 = \frac{\lambda_1(D^*AD)}{\lambda_1(A)} = \frac{\lambda_n(D^*AD)}{\lambda_n(A)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

означающим, что $D = \beta S$, где $\beta \neq 0$, а S – унитарная диагональная матрица. $\square$

Как было установлено (см. (3.21) и (3.22)), матрица C, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, диагонально подобна оптимально отмасштабированной матрице вида

$$I_3 + \alpha(C)xx^*, \quad \text{где} \quad 0 < 2|x_i|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha(C) \in \mathbb{R},$$

а тогда, очевидно, C диагонально подобна и оптимально отмасштабированной вещественной симметричной матрице

$$\begin{gathered} A = I_3 + \alpha(C)|x|\,|x|^T, \\ 0 < 2|x_i|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad i = 1,2,3, \quad \alpha(C) \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{3.33}$$

где $|x| = (|x_i|)$, отличающейся от предыдущей унитарным диагональным преобразованием подобия.

В дальнейшем оптимально отмасштабированные 3×3 матрицы A вида (3.33), отличающиеся от единичной на матрицу ранга 1, все внедиагональные элементы которой отличны от нуля и совпадают по знаку с $\varepsilon(A)$, мы будем называть *матрицами* I-*го канонического типа.*

Пусть A – 3×3 матрица вида (3.33). В соответствии с леммой 3.4 существует вектор $y = (y_i)$ такой, что $y \perp |x|$ и $|y_i| = |x_i|$, $i = 1,2,3$. Поскольку $|x|$ – собственный вектор A и отвечает ее простому собственному значению $\mu = 1 + \alpha(C)\|x\|^2$, а $\lambda = 1$ – двукратное собственное значение A, то y – собственный вектор A и отвечает $\lambda = 1$. Тогда, в силу леммы 3.5, матрица D^*AD, где $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$ невырождена, оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда $D = \beta S$, где $\beta \neq 0$, а S – унитарная диагональная матрица. Заметим теперь, что при $|\beta| \neq 1$ двукратное собственное значение матрицы D^*AD отлично от единицы, а при $\beta S \neq \varepsilon I_3$, где $|\varepsilon| = 1$, матрица $D^*|x|\,|x|^T D$ не является положительной. Тем самым мы показали, что в условиях теоремы 3.1 матрица C диагонально подобна *единственной* оптимально отмасштабированной матрице I-го типа.

Установленный факт в сочетании с теоремой 3.1 и равенствами (3.21) и (3.22) позволяет нам сформулировать следующее утверждение.

Следствие 3.4. *Эрмитова положительно определенная 3×3 матрица C диагонально подобна оптимально отмасштабированной матрице $D_0^* C D_0$ I-го канонического типа тогда и только тогда, когда она квазивещественна, не содержит нулевых элементов и удовлетворяет неравенствам* (3.2). *При этом матрица подобия $D_0 = \operatorname{diag}(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$ единственна с точностью до скалярного* *множителя* ε, $|\varepsilon|=1$, *и может быть вычислена по формулам*

$$
\begin{gathered}
d_1^{(0)}=\frac{|c_{23}|}{\bigl[c_{11}|c_{23}|^2-\alpha(C)\bigr]^{1/2}}=\Bigl(-\frac{c_{23}}{c_{23}'\det C}\Bigr)^{1/2},\\
d_i^{(0)}=\varepsilon(C)\frac{\operatorname{sign}c_{i1}|c_{jk}|}{\bigl[c_{ii}|c_{jk}|^2-\alpha(C)\bigr]^{1/2}}=\operatorname{sign}(c_{ij}\,c_{j1})\Bigl(-\frac{c_{1j}}{c_{1j}'\det C}\Bigr)^{1/2},\\
j\neq 1,i,\quad i=2,3.
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

Для описания неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных 3×3 матриц, диагонально подобных оптимально отмасштабированным матрицам с простым спектром, нам понадобятся вспомогательные результаты, приводимые ниже. Первый из них хорошо известен и был впервые опубликован в работе [5] (см. также [7–9]).

Лемма 3.6. *Пусть матрица* A *порядка* $n\geqslant 2$ *эрмитова и положительно определена и пусть* $x=(x_i)$ *и* $y=(y_i)$ – *ее собственные векторы, отвечающие ее старшему и младшему собственным значениям соответственно. Условие*

$$
|x_i|=|y_i|,\quad i=1,\dots,n, \tag{3.35}
$$

достаточно для того, чтобы матрица A *была оптимально отмасштабирована, а если крайние собственные значения* A *оба являются простыми, то условие* (3.35) *также и необходимо.*

Следующая лемма описывает, в частности, вещественные неприводимые оптимально отмасштабированные матрицы с простым спектром, которые мы будем относить к каноническому типу II_1.

Лемма 3.7. *Вещественная симметричная положительно определенная* 3×3 *матрица вида*

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{11}-\dfrac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{11}-\dfrac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\end{bmatrix},\ a_{12}\neq 0,\ a_{13}\neq 0, \tag{3.36}
$$

оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$a_{23}^2 \leqslant \frac{a_{12}^2\, a_{13}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2}. \tag{3.37}$$

При этом собственные значения A, занумерованные в порядке невозрастания, определяются по формулам

$$\begin{gathered} \lambda_1(A) = a_{11} + \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \quad \lambda_3(A) = a_{11} - \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \\ \lambda_2(A) = a_{11} - a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}\, a_{13}} \end{gathered} \tag{3.38}$$

и являются простыми тогда и только тогда, когда неравенство (3.37) *выполнено строго, а соответствующие собственные векторы A определяются соотношениями*

$$\begin{gathered} x^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} \\ -a_{12} \\ -a_{13} \end{bmatrix}, \\ x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{bmatrix}; \end{gathered} \tag{3.39}$$

кроме того, справедливы строгие неравенства

$$a_{11}a'_{11} > a_{ii}a'_{ii}, \quad i = 2, 3, \tag{3.40}$$

где через a'_{ij} обозначены элементы обратной матрицы A^{-1}.

Доказательство. Равенства

$$Ax^{(i)} = \lambda_i(A)x^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_i(A)$ и $x^{(i)}$ определяются по формулам (3.38) и (3.39), устанавливаются непосредственной проверкой. Далее, как нетрудно убедиться, неравенства

$$a_{11} - \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} \leqslant a_{11} - a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}\, a_{13}} \leqslant a_{11} + \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} \tag{3.41}$$

в точности равносильны неравенству (3.37), причем одно из неравенств в (3.41) обращается в равенство (т.е. A имеет двукратное собственное значение) тогда и только тогда, когда неравенство (3.37) обращается в равенство. При этом, поскольку компоненты векторов $x^{(1)}$ и $x^{(3)}$ равны по абсолютной величине, матрица A оптимально отмасштабирована в силу леммы 3.6. Если же неравенство (3.37) неверно, то неравенства (3.41) нарушены, и $\lambda_2(A)$ является крайним собственным значением A, причем спектр матрицы A простой. Поскольку компоненты векторов $x^{(2)}$ и $x^{(i)}$ при $i = 1$ или $i = 3$ не равны по абсолютной величине, A не может быть оптимально отмасштабированной опять же в силу леммы 3.6.

Для завершения доказательства леммы 3.7 нам остается убедиться в справедливости неравенств (3.40). Мы имеем:

$$a_{11}a'_{11} = a_{11}\frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\det A} = \frac{a_{11}}{\det A}\left[\left(a_{11} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\right)\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right) - a_{23}^2\right]$$
$$= \left(a_{11}^3 - a_{11}^2 a_{23}\,\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{13}}\right)\Big/ \det A,$$

$$a_{22}a'_{22} = a_{22}\frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\det A}$$
$$= \left(a_{11} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\right)\left[a_{11}\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right) - a_{13}^2\right]\Big/ \det A$$
$$= \left(a_{11}^3 - a_{11}^2 a_{23}\,\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{13}} + a_{11}a_{23}^2 - a_{11}a_{13}^2 + \frac{a_{13}^3 a_{23}}{a_{12}}\right)\Big/ \det A,$$

так что неравенство

$$a_{11}a'_{11} > a_{22}a'_{22} \tag{3.42}$$

равносильно неравенству

$$a_{11}a_{23}^2 < a_{11}a_{13}^2 - \frac{a_{13}^3 a_{23}}{a_{12}}.$$

Ввиду (3.37), для доказательства последнего неравенства нам достаточно убедиться, что справедливо соотношение

$$a_{11}\frac{a_{12}^2 a_{13}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2} < a_{11}a_{13}^2 - \frac{a_{13}^3 a_{23}}{a_{12}},$$

которое после деления на $a_{13}^2 > 0$ можно записать в виде

$$\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} < a_{11}\left(1 - \frac{a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{12}^2}\right) = a_{11}\frac{a_{13}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2}.$$

Как легко убедиться, полученное неравенство равносильно неравенству $\lambda_2(A) > 0$ (см. формулу (3.38)), которое справедливо в силу положительной определенности матрицы A. Тем самым неравенство (3.42) доказано.

Неравенство

$$a_{11}a'_{11} > a_{33}a'_{33}$$

устанавливается аналогично. Лемма доказана полностью. □

Замечание 3.1. В условиях леммы 3.7 собственные векторы $x^{(1)}$ и $x^{(3)}$ симметричной положительно определенной матрицы A, отвечающие ее старшему и младшему собственным значениям соответственно, связаны соотношением

$$x^{(3)} = Sx^{(1)}, \quad \text{где} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому, как следует из теоремы 2.2 работы [1] (см. также [2, теорема 4] и [3, теорема 3.1]), матрица A не только оптимально отмасштабирована относительно диагональных преобразований подобия, но и обладает более сильным свойством оптимальности, а именно:

$$k(A) \leqslant k(\Delta^* A \Delta),$$

где Δ – произвольная невырожденная блочно диагональная матрица вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Следующая теорема описывает неприводимые эрмитовы положительно определенные матрицы, которые диагонально подобны оптимально отмасштабированным матрицам вида (3.36), удовлетворяющим условию (3.37).

Теорема 3.2. *Эрмитова положительно определенная* 3×3 *матрица* $C = (c_{ij})$ *диагонально подобна симметричной матрице* A *вида* (3.36), *удовлетворяющей условию* (3.37), *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) $c_{12}c_{13} \neq 0$;

(ii) *матрица* C *квазивещественна;*

(iii)

$$|c_{12}|^2 c_{33} > \alpha(C) \quad \text{и} \quad |c_{13}|^2 c_{22} > \alpha(C); \tag{3.43}$$

(iv)

$$\gamma_1(C)\zeta_1^2(C) \leqslant 1. \tag{3.44}$$

Далее, если выполнены условия (i)–(iv), *то диагональная матрица* $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$, *определенная соотношениями*

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\frac{c_{22}c_{33} - |c_{23}|^2}{c_{11}}\right)^{1/2} = \left(\frac{c'_{11}}{c_{11}} \det C\right)^{1/2}, \\ d_2 &= \operatorname{sign} c_{21}\left(c_{33} - \frac{c_{13}c_{32}}{c_{12}}\right)^{1/2} = \operatorname{sign} c_{21}\left(-\frac{c'_{12}}{c_{12}} \det C\right)^{1/2}, \\ d_3 &= \operatorname{sign} c_{31}\left(c_{22} - \frac{c_{12}c_{23}}{c_{13}}\right)^{1/2} = \operatorname{sign} c_{31}\left(-\frac{c'_{13}}{c_{13}} \det C\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

невырождена, матрица D^*CD *оптимально отмасштабирована, ее собственные значения определяются по формулам*

$$\begin{aligned} \lambda_1(D^*CD) &= c'_{11} \det C\left[1 + \sqrt{\gamma_1(C)}\right], \\ \lambda_2(D^*CD) &= (\det C)^2 \frac{c'_{12}c'_{13}}{c_{12}c_{13}}, \\ \lambda_3(D^*CD) &= c'_{11} \det C\left[1 - \sqrt{\gamma_1(C)}\right], \end{aligned} \tag{3.46}$$

причем они все различны тогда и только тогда, когда неравенство (3.44) *является строгим, а для оптимального числа обусловленности матрицы* C *справедливы соотношения*

$$k_{\mathrm{opt}}(C) = \frac{1 + \sqrt{\gamma_1(C)}}{1 - \sqrt{\gamma_1(C)}} > \max_{i=2,3} \frac{1 + \sqrt{\gamma_i(C)}}{1 - \sqrt{\gamma_i(C)}}. \tag{3.47}$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что

$$D^*CD = A, \tag{3.48}$$

где A – вещественная симметричная положительно определенная матрица вида (3.36), удовлетворяющая условию (3.37). В этом предположении условия (i) и (ii) для C очевидно выполнены. Покажем, что справедливы неравенства (3.43). Первое из них,

$$|c_{12}|^2 c_{33} > \alpha(C) = c_{12}c_{23}c_{31}, \tag{3.49}$$

равносильно неравенству

$$1 > \frac{c_{23}c_{31}}{c_{33}c_{21}},$$

а поскольку, в силу (3.48), мы имеем

$$\frac{c_{23}c_{31}}{c_{33}c_{21}} = \frac{a_{23}a_{31}}{a_{33}a_{21}},$$

то неравенство (3.49) равносильно неравенству

$$a_{33} > \frac{a_{23}a_{31}}{a_{21}},$$

которое с учетом равенства (3.36) может быть записано в виде

$$a_{11} > \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{23}a_{13}}{a_{12}} = a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{23}}. \tag{3.50}$$

Аналогично доказывается, что и второе неравенство из (3.43) равносильно неравенству (3.50). Теперь для доказательства обоих неравенств из (3.43) остается лишь заметить, что, ввиду леммы 3.7,

$$a_{11} - a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{13}} = \lambda_2(A) > 0. \tag{3.51}$$

Для доказательства неравенства (3.44) мы воспользуемся инвариантностью $\gamma_1(C)$ и $\zeta_1(C)$ относительно диагональных преобразований подобия (см. лемму 2.1), которая дает нам равенство

$$\gamma_1(C)\zeta_1^2(C) = \gamma_1(A)\zeta_1^2(A). \tag{3.52}$$

Для матрицы A мы имеем соотношения

$$a_{11}a_{11}' = \frac{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}{\det A}$$

и

$$a_{22}a_{33} = \left(a_{11} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\right)\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right) = a_{11}^2 - a_{11}a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{13}} + a_{23}^2,$$

из которых с учетом (3.51) следует, что

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = a_{11}^2\left(a_{11} - a_{23}\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}a_{13}}\right) = a_{11}^2\lambda_2(A).$$

Используя полученное равенство и формулы (3.38) для собственных значений A, мы выводим

$$\begin{aligned}\gamma_1(A) &= 1 - \frac{1}{a_{11}a'_{11}} = 1 - \frac{\det A}{a_{11}^2\lambda_2(A)} = 1 - \frac{\lambda_1(A)\lambda_3(A)}{a_{11}^2} \\ &= 1 - \frac{a_{11}^2 - (a_{12}^2 + a_{13}^2)}{a_{11}^2} = \frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{11}^2},\end{aligned} \tag{3.53}$$

откуда, ввиду (3.37), следует, что

$$\gamma_1(A)\zeta_1^2(A) = \frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{11}^2}\,\frac{a_{11}^2\,a_{23}^2}{a_{12}^2a_{13}^2} = a_{23}^2\frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}^2a_{13}^2} \leqslant 1, \tag{3.54}$$

причем это неравенство является строгим тогда и только тогда, когда неравенство (3.37) строгое. Неравенство (3.54) и равенство (3.52) устанавливают неравенство (3.44), что и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть матрица C удовлетворяет условиям (i)–(iv). С учетом этих условий и леммы 2.3 мы имеем

$$\frac{c_{33}c_{12} - c_{13}c_{32}}{c_{12}} = \frac{c_{33}|c_{12}|^2 - c_{13}c_{32}c_{21}}{|c_{12}|^2} = \frac{c_{33}|c_{12}|^2 - \alpha(C)}{|c_{12}|^2} > 0$$

и, аналогично,

$$\frac{c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23}}{c_{13}} = \frac{c_{22}|c_{12}|^2 - \alpha(C)}{|c_{13}|^2} > 0.$$

Установленные неравенства показывают, что матрица D, определенная в (3.45), имеет ненулевые диагональные элементы и, следовательно, невырождена. Положим

$$A = D^*CD. \tag{3.55}$$

Ясно, что матрица A эрмитова и положительно определена. Далее, поскольку

$$a_{12} = d_1|d_2|\,|c_{12}| > 0 \quad \text{и} \quad a_{13} = d_1|d_3|\,|c_{13}| > 0, \tag{3.56}$$

а по лемме 2.1 и теореме 2.1 $\alpha(A) \in \mathbb{R}$, поскольку матрица C квазивещественна, то и $a_{23} \in \mathbb{R}$, а значит матрица A в действительности является вещественной и симметричной. Неравенства

$a_{12} \neq 0$ и $a_{13} \neq 0$ уже очевидны. Надо удостовериться, что матрица A имеет вид (3.36) и что для нее выполнено условие (3.37). Действительно, в силу (3.55) и (3.45), мы имеем

$$a_{11} = d_1^2 c_{11} = c_{22}c_{33} - |c_{23}|^2, \tag{3.57}$$

так что

$$\begin{aligned} a_{11} - \frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}} &= c_{22}c_{33} - |c_{23}|^2 - |d_3|^2 \frac{c_{13}c_{32}}{c_{12}} \\ &= c_{22}c_{33} - |c_{23}|^2 - \left(c_{22} - \frac{c_{12}c_{23}}{c_{13}}\right)\frac{c_{13}c_{32}}{c_{12}} \\ &= c_{22}\left(c_{33} - \frac{c_{13}c_{32}}{c_{12}}\right) = c_{22}|d_2|^2 = a_{22}. \end{aligned}$$

Равенство

$$a_{33} = a_{11} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$$

доказывается аналогично.

Поскольку, как было показано при доказательстве необходимости, для матрицы A вида (3.36) справедливо равенство (см. (3.54))

$$\gamma_1(A)\zeta_1^2(A) = a_{23}^2 \frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{12}^2 a_{13}^2},$$

то неравенство (3.37) равносильно неравенству

$$\gamma_1(A)\zeta_1^2(A) \leqslant 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству (3.44) в силу леммы 2.1. При этом, по лемме 3.7, собственные значения матрицы A все различны тогда и только тогда, когда неравенство (3.44) является строгим.

Далее, с учетом инвариантности $\gamma_1(C)$ и цепочки равенств (3.53) мы имеем

$$\gamma_1(C) = \gamma_1(A) = \frac{a_{12}^2 + a_{13}^2}{a_{11}^2},$$

так что

$$a_{12}^2 + a_{13}^2 = a_{11}^2 \gamma_1(C)$$

и, следовательно, в силу леммы 3.7, равенства (3.57) и формулы (2.13) из леммы 2.4, мы имеем:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,3}(A) &= a_{11} \pm \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} = a_{11}\Big(1 \pm \sqrt{\gamma_1(C)}\Big)\\ &= \Big(c_{22}c_{33} - |c_{33}|^2\Big)\Big(1 \pm \sqrt{\gamma_1(C)}\Big)\\ &= c'_{11}\det C\Big(1 \pm \sqrt{\gamma_1(C)}\Big).\end{aligned} \tag{3.58}$$

Оставшееся равенство из (3.46) выводится с помощью (3.58), (3.55), (3.45) и леммы 2.4 следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_2(A) = \frac{\det A}{\lambda_1(A)\,\lambda_3(A)} &= \frac{d_1^2|d_2|^2|d_3|^2\det C}{(c'_{11})^2(\det C)^2\Big[1 - \Big(1 - \dfrac{1}{c_{11}c'_{11}}\Big)\Big]}\\ &= \frac{c_{11}}{c'_{11}\det C}d_1^2|d_2|^2|d_3|^2 = \frac{c_{11}}{c'_{11}\det C}\ \frac{c'_{11}c'_{12}c'_{13}}{c_{11}c_{12}c_{13}}(\det C)^3\\ &= \frac{c'_{12}c'_{13}}{c_{12}c_{13}}(\det C)^2.\end{aligned}$$

Наконец, равенство в (3.47) очевидно следует из формул (3.46), а неравенство вытекает из неравенств (3.40) леммы 3.7, равенств

$$a_{ii}a'_{ii} = c_{ii}c'_{ii}, \quad i = 1,2,3,$$

и того факта, что функция $f(x) = \Big(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\Big)\Big/\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\Big)$ является строго возрастающей при $x > 1$. Теорема 3.2 доказана полностью. $\square$

При определении канонического типа оптимально отмасштабированных матриц, соответствующих матрицам вида (3.36), мы потребуем, чтобы неравенство (3.37) выполнялось строго, что обеспечит нам простоту спектра, и, кроме того, наложим дополнительные ограничения, обеспечивающие однозначную определенность матрицы, осуществляющей диагональное подобие в условиях теоремы 3.2.

Будем говорить, что вещественная симметричная положительно определенная оптимально отмасштабированная матрица вида (3.36), удовлетворяющая строгому неравенству (3.37), *имеет канонический тип* II_1, если

$$a_{12} > 0, \quad a_{13} > 0 \ \text{ и } \ \lambda_2(A) = 1.$$

В силу леммы 3.7, условие на $\lambda_2(A)$ равносильно равенству

$$a_{23} = (a_{11} - 1)\frac{a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 + a_{13}^2}. \tag{3.59}$$

С учетом (3.59) мы можем переписать (3.36) в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} + \frac{(1-a_{11})a_{13}^2}{a_{12}^2+a_{13}^2} & \frac{(a_{11}-1)a_{12}a_{13}}{a_{12}^2+a_{13}^2} \\ a_{13} & \frac{(a_{11}-1)a_{12}a_{13}}{a_{12}^2+a_{13}^2} & a_{11} + \frac{(1-a_{11})a_{12}^2}{a_{12}^2+a_{13}^2} \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

$$a_{12} > 0, \quad a_{13} > 0,$$

а строгое неравенство (3.37) в виде

$$(a_{11} - 1)^2 < a_{12}^2 + a_{13}^2. \tag{3.61}$$

Заметим, что (3.61), очевидно, равносильно неравенствам

$$\lambda_3(A) = a_{11} - \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} < 1 < a_{11} - \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2} = \lambda_1(A).$$

Как следует из (3.60), матрица канонического типа II_1 вполне определяется своей первой строкой, элементы которой должны быть положительными и удовлетворять условию (3.61).

В силу лемм 3.5 и 3.7, если A имеет вид (3.36) и удовлетворяет строгому неравенству (3.37), а D – невырожденная диагональная матрица, то матрица D^*AD оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда $D = \beta S$, где $\beta \neq 0$, а S – унитарная диагональная матрица. При этом, если матрица A имеет канонический тип II_1, то при $|\beta| \neq 1$ $\lambda_2(D^*AD) \neq 1$, а при $\beta S \neq \varepsilon I_3$, где $|\varepsilon| = 1$, один из внедиагональных элементов первой строки D^*AD не является положительным. Поэтому в условиях теоремы 3.2 матрица C диагонально подобна *единственной* оптимально отмасштабированной матрице канонического типа II_1.

Теперь с учетом неравенств (3.56) и формулы (3.46) для $\lambda_2(D^*CD)$ мы можем переформулировать теорему 3.2 следующим образом.

Следствие 3.5. *Эрмитова положительно определенна 3×3 матрица C диагонально подобна оптимально отмасштабированной матрице $D_0^* C D_0$ канонического типа II_1 тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям* (i)–(iv) *теоремы* 3.2, *причем неравенство* (3.44) *выполнено строго. При этом матрица $D_0 = \operatorname{diag}(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$ с точностью до скалярного множителя ε, $|\varepsilon| = 1$, определяется соотношениями*

$$d_i^{(0)} = \frac{d_i}{\det C}\left(\frac{c_{12}c_{13}}{c'_{12}c'_{13}}\right)^{1/2} = \begin{cases} \left(\dfrac{c'_{11}c_{12}c_{13}}{c_{11}c'_{12}c'_{13}\det C}\right)^{1/2}, & i=1, \\ \operatorname{sign} c_{21}\left(-\dfrac{c_{13}}{c'_{13}\det C}\right)^{1/2}, & i=2, \\ \operatorname{sign} c_{31}\left(-\dfrac{c_{12}}{c'_{12}\det C}\right)^{1/2}, & i=3, \end{cases} \tag{3.62}$$

где d_i, $i = 1, 2, 3$, вычисляются по формулам (3.45); *собственные значения матрицы $D_0^* C D_0$ простые и определяются равенствами*

$$\lambda_{1,3}(D_0^* C D_0) = \frac{c'_{11}c_{12}c_{13}[1 \pm \sqrt{\gamma_1(C)}]}{c'_{12}c'_{13}\det C}, \quad \lambda_2(D_0^* C D_0) = 1; \tag{3.63}$$

$$k_{\mathrm{opt}}(C) = k(D_0^* C D_0) = \frac{1+\sqrt{\gamma_1(C)}}{1-\sqrt{\gamma_1(C)}}. \tag{3.64}$$

Замечание 3.2. Как следует из (3.46), число $\dfrac{c_{12}\,c_{13}}{c'_{12}c'_{13}}$, стоящее под знаком квадратного корня в формулах (3.62), положительно.

Нам потребуется еще одна элементарная лемма.

Лемма 3.8. *Эрмитова положительно определенная матрица A порядка $n \geqslant 2$ оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда оптимально отмасштабирована матрица $P^T A P$, где P – произвольная матрица-перестановка порядка n.*

Доказательство. Обозначим

$$B = P^T A P$$

и допустим, что матрица A оптимально отмасштабирована. Тогда для произвольной невырожденной диагональной матрицы D и диагональной же матрицы $\widetilde{D}$, определенной соотношением

$$\widetilde{D} = PDP^T,$$

мы имеем

$$\begin{aligned} k(D^*BD) &= k(D^*P^TAPD) = k(P^T\widetilde{D}^*A\widetilde{D}P) \\ &= k(\widetilde{D}^*A\widetilde{D}) \geqslant k(A) = k(B), \end{aligned}$$

так что матрица B оптимально отмасштабирована. Обратное утверждение, что из оптимальной отмасштабированности B следует оптимальная отмасштабированность A, вытекает из уже доказанного, поскольку $A = PBP^T$. $\square$

Определим теперь оптимально отмасштабированные 3×3 матрицы канонических типов II_i, $i = 2, 3$. Будем говорить, что вещественная симметричная положительно определенная 3×3 матрица A имеет канонический тип II_i, $i = 2, 3$, если матрица P^TAP, где P – матрица перестановки степени 3, меняющей местами i и 1, имеет канонический тип II_1. Таким образом, матрицы типов II_i, $i = 2, 3$, имеют вид: при $i = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{22} + \dfrac{(1-a_{22})a_{23}^2}{a_{12}^2 + a_{23}^2} & a_{12} & \dfrac{(a_{22}-1)a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 + a_{23}^2} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \dfrac{(a_{22}-1)a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 + a_{23}^2} & a_{23} & a_{22} + \dfrac{(1-a_{22})a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{23}^2} \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

$$a_{12} > 0, \quad a_{13} > 0,$$

а при $i = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{33} + \dfrac{(1-a_{33})a_{23}^2}{a_{13}^2 + a_{23}^2} & \dfrac{(a_{33}-1)a_{13}a_{23}}{a_{13}^2 + a_{23}^2} & a_{13} \\ \dfrac{(a_{33}-1)a_{13}a_{23}}{a_{13}^2 + a_{23}^2} & a_{33} + \dfrac{(1-a_{33})a_{13}^2}{a_{13}^2 + a_{23}^2} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

$$a_{13} > 0, \quad a_{23} > 0,$$

и удовлетворяют строгим неравенствам

$$\begin{aligned} &(a_{22}-1)^2 < a_{12}^2 + a_{23}^2 \quad \text{при} \quad i=2, \\ &(a_{33}-1)^2 < a_{13}^2 + a_{23}^2 \quad \text{при} \quad i=3. \end{aligned} \tag{3.67}$$

При этом, очевидно,

$$\lambda_{1,3}(A) = \begin{cases} a_{22} \pm \sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2}, & i=2, \\ a_{33} \pm \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}, & i=3, \end{cases}$$

и

$$\lambda_2(A) = 1, \quad i = 2, 3, \tag{3.68}$$

а по лемме 3.8 матрицы типов II_i, $i = 2, 3$, оптимально отмасштабированы, поскольку оптимально отмасштабированы матрицы типа II_1.

Теперь мы готовы представить полное решение проблемы оптимального диагонального масштабирования для неприводимых квазивещественных 3×3 матриц.

Теорема 3.3. *Пусть 3×3 матрица $C = (c_{ij})$ неприводима, квазивещественна, эрмитова и положительно определена. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *матрица C диагонально подобна оптимально отмасштабированной матрице одного из канонических типов;*

(ii) *C диагонально подобна матрице типа I тогда и только тогда, когда*

$$\gamma_i(C)\zeta_i^2(C) \geqslant 1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.69}$$

и матрице типа II_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i(C)\zeta_i^2(C) < 1, \tag{3.70}$$

причем значение i определено однозначно;

(iii) *диагональная матрица $D_0 = \operatorname{diag}(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$, такая что $D_0^* C D_0$ – оптимально отмасштабированная матрица одного из канонических типов, с точностью до скалярного множителя ε, $|\varepsilon| = 1$, определяется соотношениями*

$$\begin{aligned} d_1^{(0)} &= \left(- \frac{c_{23}}{c'_{23} \det C} \right)^{1/2}, \\ d_i^{(0)} &= \operatorname{sign}(c_{ij} c_{j1}) \left(- \frac{c_{1j}}{c'_{1j} \det C} \right)^{1/2}, \ j \neq 1, i, \ i = 2, 3, \end{aligned} \tag{3.71}$$

в случае (3.69) *и соотношениями*

$$d_i^{(0)} = \left(\frac{c'_{ii}c_{ij}c_{ik}}{c_{ii}c'_{ij}c'_{ik}\det C}\right)^{1/2},$$
$$j \neq i,\ k \neq i,\ k \neq j, \qquad (3.72)$$
$$d_j^{(0)} = \operatorname{sign} c_{ji}\left(-\frac{c_{ik}}{c'_{ik}\det C}\right)^{1/2},$$

в случае (3.70);

(iv) *если выполнены условия* (3.69), *то*

$$k_{\text{opt}}(C) = \left[-\frac{\alpha(C)/\det C}{\alpha(C^{-1})/\det C^{-1}}\right]^{\varepsilon(C)}, \qquad (3.73)$$

а если выполнено условие (3.70), *то*

$$k_{\text{opt}}(C) = \frac{1+\sqrt{\gamma_i(C)}}{1-\sqrt{\gamma_i(C)}} > \max_{j\neq i}\frac{1+\sqrt{\gamma_j(C)}}{1-\sqrt{\gamma_j(C)}}. \qquad (3.74)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что в соответствии с леммой 2.7 выполнено одно из следующих условий: либо

$$\alpha(C) < |c_{ij}|^2 c_{kk} \quad \text{для всех различных} \quad i,j,k, \qquad (3.75)$$

либо

$$\begin{gathered}|c_{jk}|^2 c_{ii} \leqslant \alpha(C) < \min\left\{|c_{ij}|^2 c_{kk}, |c_{ik}|^2 c_{jj}\right\}\\ \text{при некотором} \quad i \quad \text{и} \quad j\neq i,\ k\neq i,\ j\neq k.\end{gathered} \qquad (3.76)$$

Предположим сперва, что выполнено условие (3.75). В этом случае все внедиагональные элементы матрицы C отличны от нуля, так как иначе хотя бы одно из неравенств в (3.75) обращалось бы в равенство $0 = 0$. Следовательно, $\alpha(C) \neq 0$, и все величины $\zeta_i(C)$, $i = 1,2,3$, определены. При этом обязательно выполнено либо условие (3.69), либо условие (3.70) при некотором i.

Если матрица C удовлетворяет условиям (3.75) и (3.69), то для нее справедливы все предположения теоремы 3.1 и следствия 3.4, в силу которых матрица D_0 определяется (с точностью до ε, $|\varepsilon| = 1$) формулами (3.71), а оптимальное число обусловленности может быть вычислено по формуле (3.73).

Пусть теперь выполнены условия (3.75) и (3.70). Если $i = 1$, то мы находимся в условиях теоремы 3.2, причем неравенство (3.44) выполняется строго. В этом случае справедливость формул (3.72) и (3.74) обеспечивается следствием 3.5.

Если же $i \neq 1$, то определим P как матрицу перестановки, меняющей местами i и 1. Как легко видеть, в этом случае условия теоремы 3.2 со строгим неравенством (3.44) выполнены для матрицы PCP. Следовательно, матрица $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2, \widetilde{d}_3)$, полученная с помощью формул (3.62) в применении к $\widetilde{C} = PCP$ и определяемая равенствами

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_1 &= \left(\frac{c'_{ii} c_{i1} c_{ij}}{c_{ii} c'_{i1} c'_{ij} \det C}\right)^{1/2}, \\ \widetilde{d}_i &= \operatorname{sign} c_{1i} \left(-\frac{c_{ij}}{c'_{ij} \det C}\right)^{1/2}, \\ \widetilde{d}_j &= \operatorname{sign} c_{ji} \left(-\frac{c_{i1}}{c'_{i1} \det C}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.77}$$

где $j \neq 1, i$, невырождена, а матрица

$$A = \widetilde{D}^* \widetilde{C} \widetilde{D} = \widetilde{D}^* PCP \widetilde{D} \tag{3.78}$$

оптимально отмасштабирована, имеет канонический тип II_1, и

$$k_{\mathrm{opt}}(PCP) = k(A) = \frac{1 + \sqrt{\gamma_i(C)}}{1 - \sqrt{\gamma_i(C)}} > \max_{j \neq i} \frac{1 + \sqrt{\gamma_j(C)}}{1 - \sqrt{\gamma_j(C)}}. \tag{3.79}$$

Заметим, что значение i, для которого справедливо неравенство (3.70) и, следовательно, также и строгое неравенство в (3.79), может быть только одно, поскольку функция $f(x) = (1 + \sqrt{x})/(1 - \sqrt{x})$ строго монотонна при $0 < x < 1$.

Определим теперь матрицу $D_0 = \operatorname{diag}(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$ с помощью равенства

$$D_0 = P\widetilde{D}P. \tag{3.80}$$

Ясно, что матрица D_0 невырождена, а ее диагональные элементы, получаемые перестановкой диагональных элементов $\widetilde{D}$, удовлетворяют равенствам (3.72). В силу (3.80) и (3.78), мы также имеем равенство

$$D_0^* C D_0 = P\widetilde{D}^* PCP \widetilde{D} P = PAP. \tag{3.81}$$

Тем самым показано, что матрица C диагонально подобна матрице PAP, которая имеет канонический тип II_i, и при этом, в силу (3.79),

$$k_{\mathrm{opt}}(C) = k(D_0^* C D_0) = k(PAP) = k(A) = \frac{1+\sqrt{\gamma_i(C)}}{1-\sqrt{\gamma_i(C)}}.$$

Соотношения (3.74) доказаны.

Наконец, пусть справедливы неравенства (3.76). В этом случае, очевидно,

$$\alpha(C) \geqslant 0, \quad c_{ij}, c_{ki} \neq 0, \tag{3.82}$$

и, в силу леммы 2.3 и (3.76), мы имеем

$$\begin{aligned}\gamma_i(C)\zeta_i^2(C) < \zeta_i^2(C) &= \frac{c_{ii}^2|c_{kj}|^2}{|c_{ij}|^2|c_{ki}|^2} \\ &= \frac{c_{ii}^2|c_{kj}|^2|c_{jk}|^2}{\alpha^2(C)} = \left[\frac{c_{ii}|c_{jk}|^2}{\alpha(C)}\right]^2 \leqslant 1.\end{aligned}$$

Таким образом, если матрица C удовлетворяет условиям (3.76), то она удовлетворяет и неравенству (3.70). Но тогда матрица PCP, где $P = I_3$ при $i = 1$ и P есть матрица перестановки, меняющей местами i и 1, при $i \neq 1$, удовлетворяет условиям теоремы 3.2 со строгим неравенством (3.44). Как уже было показано, в этом случае соответствующие утверждения из (iii) и (iv) справедливы. Теорема доказана полностью. □

Замечание 3.3. Поскольку величины $\gamma_i(C)$ и $\zeta_i(C)$ инвариантны относительно диагональных преобразований подобия матрицы C, а в силу теоремы 3.3 тип оптимально отмасштабированной матрицы, к которой приводится C, однозначно определяется одним из условий (3.69), (3.70), то оптимально отмасштабированные матрицы различных канонических типов не могут быть диагонально подобны друг другу.

Замечание 3.4. В силу определения канонических типов II_i, $i = 1, 2, 3$, и замечания 3.1, оптимально отмасштабированные матрицы этих типов оптимально обусловлены не только относительно диагональных преобразований подобия, но и относительно преобразований подобия с невырожденными матрицами Δ таками, что $P\Delta P$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Здесь. как и выше, $P = I_3$ при $i = 1$ и P есть матрица перестановки, меняющей местами 1 и i, при $i \neq 1$.

Теорема 3.3 позволяет нам описать все неприводимые квазивещественные эрмитовы положительно определенные 3×3, имеющие оптимальное число обусловленности.

Следствие 3.6. *Множество неприводимых квазивещественных эрмитовых положительно определенных оптимально отмасштабированных 3×3 матриц совпадает с множеством матриц вида $\beta S^* AS$, где $\beta > 0$, S – унитарная диагональная матрица, а A – матрица одного из канонических типов I, II$_i$, $i = 1, 2, 3$. При этом спектр $\beta S^* AS$ простой тогда и только тогда, когда A имеет канонический тип II$_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.3, любая матрица C, удовлетворяющая условиям следствия, диагонально подобна некоторой оптимально отмасштабированной матрице A одного из канонических типов. Поскольку матрицы всех канонических типов имеют такие собственные векторы, отвечающие крайним собственным значениям, что их компоненты равны по абсолютной величине, то лемма 3.5 гарантирует нам, что $C = \beta S^* AS$, где $\beta > 0$. $\square$

Из следствия 3.6 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 3.7. *Пусть C – неприводимая квазивещественная эрмитова положительно определенная 3×3 матрица, имеющая оптимальное число обусловленности. Тогда C имеет собственные векторы $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, отвечающие ее старшему и младшему собственным значениям соответственно, такие, что*

$$|x_i| = |y_i|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следствие 3.6 позволяет нам также дать описание тех случаев, в которых масштабирование по Якоби оптимально для неприводимых квазивещественных 3×3 матриц.

Следствие 3.8. *Неприводимая квазивещественная эрмитова положительно определенная* 3×3 *матрица* $C=(c_{ij})$*, удовлетворяющая условию*

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=c, \tag{3.83}$$

оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда либо C *перестановочно подобна 2-циклической матрице, либо имеет вид*

$$C=\beta(I_3+\tau xx^*),$$

где $\beta>0$, $\tau>-1/3$, $x=(x_i)$ *и* $|x_i|=1$, $i=1,2,3$.

Доказательство. По следствию 3.6 матрица C оптимально отмасштабирована тогда и только тогда, когда

$$C=\beta S^*AS, \tag{3.84}$$

где $\beta>0$, S – унитарная диагональная матрица, а $A=(a_{ij})$ – матрица одного из канонических типов. Из (3.83) и (3.84) следует, что $a_{ii}=c/\beta$, $i=1,2,3$. Если A имеет тип II_i, то необходимо $a_{jk}=0$ при $j\neq i$, $k\neq i$, $j\neq k$, так что A перестановочно подобна 2-циклической матрице. Если же A – матрица типа I, то

$$A=I_3+\xi yy^T,$$

где $y=(y_i)$ – положительный вектор, и необходимо $y_1=y_2=y_3$, так что $y=\delta e$, где $e=[1,1,1]^T$. В этом случае матрица C имеет вид

$$C=\beta(I_3+\xi\delta xx^*),$$

где $|x_i|=1$, $i=1,2,3$. Неравенство $\tau=\xi\delta>-1/3$ следует из положительности простого собственного значения C, равного $\beta(1+\tau\|x\|^2)=\beta(1+3\tau)$. $\square$

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оптимально обусловленные блочные* 2×2 *матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 72–85.
2. Л. Ю. Колотилина, *О крайних собственных значениях блочных* 2×2 *эрмитовых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 27–38.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки для крайних собственных значений блочных* 2×2 *эрмитовых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **301** (2003), 172–194.
4. F. L. Bauer, *Optimally scaled matrices.* — Numer. Math., **5** (1963), 73–87.

5. G. E. Forsythe, E. G. Straus, *On best contioned matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 340–345.
6. R. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press (1991).
7. C. McCarthy, G. Strang, *Optimal conditioning of matrices.* — SIAM J. Numer. Anal., **10** (1973), 370–388.
8. A. Shapiro, *Optimally scaled natrices, necessary and sufficient conditions.* — Numer. Math., **39** (1982), 239–245.
9. A. Shapiro, *Optimal block diagonal l_2-scaling of matrices.* — SIAM J. Numer. Math., **22** (1985), 81–94.
10. A. Van Der Sluis, *Condition numbers and equilibration of matrices.* — Numer. Math., **14** (1969), 14–23.

Kolotilina L. Yu. Solution of the problem of optimal diagonal scaling for quasireal Hermitian positive-definite 3×3 matrices.

The paper completely solves the problem of optimal diagonal scaling for quasireal Hermitian positive-definite matrices of order 3. In particular, in the most interesting irreducible case, it is demonstrated that for any matrix C from the class considered there is a uniquely determined optimally scaled matrix $D_0^* C D_0$ of one of the four canonical types, and formulas for the entries of the diagonal matrix D_0 are presented as well as formulas for the eigenvalues and eigenvectors of $D_0^* C D_0$ and for the optimal condition number of C, which is equal to $k(D_0^* C D_0)$. The optimality of the Jacobi scaling is analyzed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 мая 2004 г.