Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, Н. Г. Власюк

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ. (ПЛОСКО–СЛОИСТАЯ СРЕДА)

**Работа посвящается П. В. Крауклису
в связи с его семидесятилетием**

Настоящая статья посвящена применению асимптотических методов к исследованию задач распространения звука в волноводах. Такие задачи могут возникать, например, в морской акустике, в сейсмических средах, в теории распространения волн в ионосфере.

При введении основных параметров задачи, по которым строится асимптотика, учитывается, прежде всего, *малое изменение скорости звука в среде* (например, в океане) *на длине волны* (начиная с частот порядка десятков, а иногда и единиц герц) и *малость отношения горизонтальных градиентов скорости звука* в среде к *вертикальным*. На высоких частотах (сотни герц) асимптотическим методам вообще не существует удовлетворительной альтернативы.

Основное внимание будет уделено получению относительно простых выражений для "осевой" волны.

Если источник помещен вблизи оси волновода, то лучи (экстремали интеграла Ферма $\int \frac{ds}{c(x,y,z)}$), выходящие из источника под достаточно малыми углами к оси, бесчисленно много раз пересекают линию минимума скорости. В окрестности линии минимума будет расположено большое число каустик (огибающих семейства лучей), каждая из которых имеет точку возврата на оси волновода и состоит из двух ветвей. *Интерференция* волновых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 02-01-00260).

полей, соответствующих лучам, которые расположены в окрестности каустик вблизи линии минимума, приводит к образованию *особой волны*, распространяющейся вдоль этой линии. В дальнейшем эту волну назовем *“осевой волной”*. Осевая волна представляет большой интерес в различных задачах [1]–[5].

Именно исследованию поведения волн, сосредотачивающихся вблизи оси глубинного волновода на достаточно большом расстоянии по горизонтальным координатам от источника, посвящена настоящая статья.

Для получения поля точечного источника в исследуемой области необходимы существенные усложнения лучевого метода (см. [6]–[7]). Применение метода нормальных волн также наталкивается на трудности, поскольку при высоких частотах возникает необходимость суммирования большого числа мод.

В связи с этими трудностями здесь волновое поле найдено асимптотическим комбинированным методом, впервые разработанным и примененным В. Б. Филипповым [8] для задач рассеяния электромагнитных волн от неплоских экранов.

Поле в волноводе найдено в виде суммы нормальных, геометрооптических волн и остатка. Получены достаточные условия на количество отщепленных нормальных и геометрооптических волн. Остаток выражается простой формулой. Близкие результаты (с некоторыми отличиями) имеются в работах [9]–[12].

1. Общая постановка задачи

Математическая постановка задачи о распространении звука зависит от выбора физической модели. Следуя работам [13]–[19], будем рассматривать простейшую модель, например, в океане: водный слой $0 \leqslant z \leqslant \mathcal{H}$ переменной глубины $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x,y)$ лежит над жидким дном $z > \mathcal{H}$. Будем считать скорость распространения звуковых волн в водном слое непрерывно дифференцируемой функцией глубины z и горизонтальных координат x, y: $c = c(x,y,z)$. Функция $c = c(x,y,z) = c(\mathcal{M})$ как функция глубины z при фиксированных x, y имеет по крайней мере один *минимум* c_*. Скорость звуковых волн в дне $c_{\mathcal{H}} = c_M(x,y)$ непрерывно дифференцируемая функция лишь горизонтальных координат x, y, причем для всех x и y выполняется неравенство $c(x,y,\mathcal{H}) < c_M(x,y)$. Плотность воды и жидкого дна будем считать постоянными величинами. Отношение плотности дна к плотности воды на границе жидкость-дно обозначим буквой $\varkappa$, $\varkappa > 1$.

Точечный источник звуковых колебаний частоты ω поместим в точку $\mathcal{M}_0(x = 0, y = 0, z = z_0)$. Зависимость звукового поля от времени, задаваемая множителем $\exp(-i\omega t)$, в последующем не выписывается.

Искомая функция $u = u(x, y, z)$ представляет собой давление звукового поля, создаваемое источником в водном слое и дне, и удовлетворяет уравнениям

$$\Delta u + k^2 n^2(\mathcal{M}) u = -\delta(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0), \quad 0 \leqslant z \leqslant \mathcal{H}; \tag{1.1}$$

$$\Delta u + k^2 n_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{M}) u = 0, \quad z > \mathcal{H}; \quad k = \frac{\omega}{c_*}, \quad n^2(\mathcal{M}) = \frac{c_*}{c^2(\mathcal{M})}. \tag{1.2}$$

На свободной поверхности океана будем считать выполненым равенство

$$u\,|_{z=0} = 0. \tag{1.3}$$

На границе раздела жидкости и дна поставим условия

$$u\,|_{z=\mathcal{H}-0} = u\,|_{z=\mathcal{H}+0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{z=\mathcal{H}-0} = \frac{1}{\varkappa}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{z=\mathcal{H}+0}, \quad \varkappa > 1, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности дна, ($n > 0$ для точек дна). Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, \mathbf{n}) = \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right).$$

Условия (1.4) выражают равенство давлений и непрерывность вертикальных составляющих скорости частиц жидкости в звуковой волне на поверхности дна.

При постоянной плотности жидкости ρ скорость частиц жидкости в звуковой волне $\mathbf{v}(\mathcal{M}; t)$ связана с давлением $u(\mathcal{M}; t)$ соотношением

$$\mathbf{v}_t(\mathcal{M}; t) = -\rho^{-1} \operatorname{grad} u(\mathcal{M}; t),$$

в случае гармонической зависимости от времени скорость частиц жидкости удовлетворяет соотношению $\mathbf{v}(\mathcal{M}) = [i\omega\rho]^{-1} \operatorname{grad} u(\mathcal{M})$.

Кроме того, функция $u(\mathcal{M})$ должна удовлетворять принципу предельного поглощения:

$$u(\mathcal{M}) \to 0, \quad |\mathcal{M}, \mathcal{M}_0| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k > 0. \tag{1.5}$$

При построении и исследовании поведения решения задачи (1.1)–(1.5) должны быть учтены типичные особенности поведения скорости звука $c(x,y,z)$, как функции координат, ([13–16, 18, 19]).

Как правило для мелкого моря функция $c(x,y,z)$ при фиксированных x,y является монотонной функцией глубины z. В зимнее и осеннее время монотонно возрастающей, в летнее – монотонно убывающей. Для глубоких морей функция $c(x,y,z)$ обычно имеет минимум $c_*(x,y) = \min\limits_{0\leqslant z<\mathcal{H}} c(x,y,z)$, а в более редких случаях – два минимума: приповерхностный и глубинный.

Характерной особенностью задач о распространении звука в океане является малая величина градиента скорости, причем горизонтальный градиент скорости $\nabla_{x,y}c$ в свою очередь может считаться много меньше (приблизительно в $10^2 \div 10^3$ раз) вертикального $\nabla_z c$. Кроме того будем считать, что отношение $\frac{\nabla\mathcal{H}}{\mathcal{H}}$, характеризующее уклон дна, по порядку величины совпадает с $\dfrac{\nabla_{x,y}c}{c} \sim \dfrac{\nabla_{x,y}c_{\mathcal{H}}}{c_{\mathcal{H}}}$. Малость горизонтальных и вертикальных градиентов должна быть учтена при переходе к безразмерных переменным.

Безразмерные переменные $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ выберем так, чтобы в этих переменных выполнялись соотношения:

$$|\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{x}}| \sim |\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{y}}| \sim |\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{z}}| \leqslant c,\ |\frac{\partial c_{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{x}}| \sim |\frac{\partial c_{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{y}}| \leqslant c_{\mathcal{H}},\ |\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{x}}| \sim |\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{y}}| \leqslant \mathcal{H}.$$

Введем вертикальный m_v и горизонтальный m_h масштабы по формулам

$$m_v = \frac{c_*}{\max|\dfrac{\partial c}{\partial z}|}, \quad m_h = \frac{c_*}{\max\sqrt{(\dfrac{\partial c}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial c}{\partial y})^2}},$$

где c_* является фиксированным значением минимума скорости, а максимумы вычисляются по всем $0 \leqslant z \leqslant \mathcal{H}$ и $-\infty < x,y < +\infty$.

Тогда безразмерные переменные равны

$$\boldsymbol{x} = \frac{x}{m_h}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{y}{m_h}, \quad \boldsymbol{z} = \frac{z}{m_v}. \tag{1.6}$$

Обозначим отношение масштабов $\frac{m_v}{m_h}$ буквой ε. Так как

$$\max\left|\frac{\partial c}{\partial z}\right| \sim \max\sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2}\,(10^2 \div 10^3),$$

то $\varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ является малым параметром задачи.

Перейдем в уравнениях (1.1)–(1.2) и условиях (1.3)–(1.5) к безразмерным переменным (1.6). В результате получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{z}^2}+\varepsilon^2\Delta_\perp u+k^2 n^2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u=-\frac{\varepsilon^2}{m_v}\delta(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0),\, 0<\boldsymbol{z}<H, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{z}^2}+\varepsilon^2\Delta_\perp u+k^2 n_H^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u=0, \quad \boldsymbol{z}>H, \quad H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\mathcal{H}}{m_v}, \quad (1.8)$$

$$u(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0, \quad \lim_{\boldsymbol{z}\to\infty} u(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0, \quad (1.9)$$

$$u|_{\boldsymbol{z}=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-0}=u|_{\boldsymbol{z}=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+0}, \quad (1.10)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{z}}-\varepsilon^2(\nabla_\perp u,\nabla_\perp H)\right]\Big|_{\boldsymbol{z}=H-0}=\varkappa^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{z}}-\varepsilon^2(\nabla_\perp u,\nabla_\perp H)\right]\Big|_{\boldsymbol{z}=H+0}, \quad (1.11)$$

где $\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{y}^2}$ есть оператор Лапласа; $\nabla_\perp=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\mathbf{j}$ является градиентом медленных переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$; k будет параметром, пропорциональным частоте:

$$k=\omega\frac{m_v}{c_*}=\frac{\omega}{\max\left|\dfrac{\partial c}{\partial z}\right|};$$

а величины

$$n(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{c_*}{c(x,y,z)} \quad \text{и} \quad n_H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{c_*}{c_{\mathcal{H}}(x,y)}$$

являются показателями преломления водного слоя и дна соответственно; H есть безразмерная глубина водного слоя. Величину $\varkappa$ в общем случае также можно считать функцией медленных переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Для основного объема водных масс океана вертикальный градиент скорости принимается равным $1.7\cdot 10^{-2}$сек$^{-1}$. Однако, в поверхностном слое он может превосходить указанное значение в несколько раз. Принимая $\max\left|\dfrac{\partial c}{\partial z}\right|$ равным $6\cdot 10^{-2}$сек$^{-1}$, получаем для величины параметра k ориентировочную формулу $k\sim 100\nu$, где ν есть частота колебаний в герцах. Отсюда следует, что уже для частоты в 10 гц параметр k является большим числом, приблизительно равным 10^3. Таким образом, в задачах распространения звука в океане могут быть выделены два больших параметра k и ε^{-1}.

Малая величина параметра ε позволяет обобщить методы получения поля точечного источника в волноводе на случай скорости, зависящей от горизонтальных координат.

Поскольку горизонтальные градиенты скорости много меньше вертикальных и уклоны дна малы, часто исследование распространения звука в океане выполняется в предположении, что скорость звука является лишь функцией глубины: $c = c(z)$ и глубина водного слоя постоянна $\mathcal{H} = \mathrm{const}$ (плоско-слоистая модель океана).

Если скорость зависит лишь от глубины, введение горизонтального масштаба не имеет смысла. В этом случае целесообразно перейти к безразмерным цилиндрическим координатам

$$\boldsymbol{z} = \frac{z}{m_v}, \rho = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{m_v}, \varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0,\ y\geqslant 0, \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0, \\ \arctan\frac{y}{x}+2\pi, & x>0, y<0. \end{cases} \tag{1.12}$$

В координатах $\boldsymbol{z}, \rho, \varphi$ уравнения (1.7), (1.8) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{z}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+k^2 n^2(\boldsymbol{z})u=-m_v^{-1}\delta(\rho)\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0), 0<\boldsymbol{z}<H, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{z}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+k^2 n_H^2 u=0, \quad \boldsymbol{z}>H. \tag{1.14}$$

Добавляя к уравнениям (1.13), (1.14) граничные условия (1.9)–(1.11), (1.5), получим задачу, которая методом разделения переменных может быть представлена в виде разложения по собственным функциям “глубинной” части уравнения (1.13).

2. Собственные функции и собственные числа задачи Штурма–Лиувилля

Модель плоско-слоистой среды позволяет построить решение задачи методом разделения переменных в виде разложения по собственным функциям, удовлетворяющим обыкновенному дифференциальному уравнению по переменной $\boldsymbol{z}$ с разрывным показателем преломления и затем сконструировать из них решение задачи о поле точечного источника, [13–16, 17].

Рассмотрим “глубинную” часть однородных уравнений (1.13), (1.14) в частном случае, когда показатель преломления зависит только от глубины $\boldsymbol{z}$, т.е. $n = n(\boldsymbol{z})$, и $H = \mathrm{const}$.

Соответствующая задача может быть описана уравнением:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial \boldsymbol{z}^2} + k^2(n^2(\boldsymbol{z}) - \zeta^2)\psi = 0,\ n(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} n(\boldsymbol{z}), & 0 < \boldsymbol{z} < H, \\ n_H, & H < \boldsymbol{z} < \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\boldsymbol{z}=H-0} = \varkappa^{-1} \left.\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{z}}\right|_{\boldsymbol{z}=H+0}, \tag{2.2}$$

и условием излучения (1.5). Здесь ζ^2 есть спектральный параметр задачи (постоянная разделения).

Показатель преломления $n(\boldsymbol{z}) = \frac{c_*}{c(\boldsymbol{z})}$ имеет один максимум на промежутке $0 \leqslant \boldsymbol{z} < H$, (см. рис. 1), причем

$$n_H = \frac{c_*}{c_H}, \quad n_* = \frac{c_*}{\min\limits_{0 \leqslant \boldsymbol{z} < H} c(\boldsymbol{z})} = \max_{0 \leqslant \boldsymbol{z} < H} n(\boldsymbol{z}) = 1,$$

$$n_{\mathrm{bot}} = n(H-0), \quad n_s = n(\boldsymbol{z})|_{\boldsymbol{z}=0} = n(0), \quad n_s > n_{\mathrm{bot}}. \tag{2.3}$$

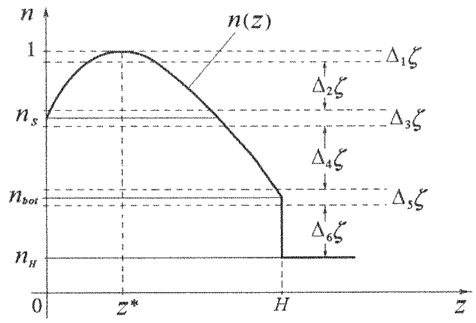

Рис. 1.

Вещественный спектр задачи Штурма–Лиувилля (2.1)–(2.2) содержит конечное число собственных значений ζ_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, лежащих внутри интервала $[n_H, n_* = 1]$. Непрерывный спектр заполняет интервал $0 \leqslant \zeta \leqslant n_H$ и мнимую полуось $\mathrm{Im}\ \zeta \geqslant 0$.

Рассмотрим два линейно независимых решения $f_1(\boldsymbol{z},\zeta)$, $f_2(\boldsymbol{z},\zeta)$ уравнения (2.1) на интервале $0 \leqslant \boldsymbol{z} < H$. Функция $f(\boldsymbol{z},\zeta)$, удовлетворяющая уравнению (2.1), условиям излучения при $\boldsymbol{z} \to \infty$ и условиям согласования (2.2) на границе $\boldsymbol{z} = H$, запишется в виде

$$f(\boldsymbol{z},\zeta) = \begin{cases} f_1(\boldsymbol{z},\zeta)[f_2'(H,\zeta) + \varkappa^{-1}k\sqrt{\zeta^2 - n_H^2}\, f_2(H,\zeta)] - \\ \quad -f_2(\boldsymbol{z},\zeta)[f_1'(H,\zeta) + \varkappa^{-1}k\sqrt{\zeta^2 - n_H^2}\, f_1(H,\zeta)];\ 0 \leqslant \boldsymbol{z} < H, \\ W[f_1,f_2]\exp\{-k\sqrt{\zeta^2 - n_H^2}(\boldsymbol{z} - H)\},\ H < \boldsymbol{z} < \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ветвь корня фиксирована условием $\mathrm{Re}\,\sqrt{\zeta^2 - n_H^2} > 0$ при $\zeta^2 > n_H^2$, $W[f_1,f_2] = f_1 f_2' - f_2 f_1'$ определяет вронскиан линейно независимых решений $f_1(\boldsymbol{z},\zeta)$ и $f_2(\boldsymbol{z},\zeta)$.

Условие на поверхности $f(0,\zeta)|_{\boldsymbol{z}=0} = 0$ дает дисперсионное уравнение для нахождения собственных значений $\zeta_n, n = 0,1,...,N-1$:

$$f_1(0,\zeta_n)[f_2'(H,\zeta_n) + \varkappa^{-1}k\sqrt{\zeta_n^2 - n_H^2}\, f_2(H,\zeta_n)] -$$

$$-f_2(0,\zeta_n)[f_1'(H,\zeta_n) + \varkappa^{-1}k\sqrt{\zeta_n^2 - n_H^2}\, f_1(H,\zeta_n)] = 0. \tag{2.5}$$

Собственные функции $\psi_n(\boldsymbol{z})$ задачи (2.1), (2.2), имеющие n нулей на промежутке $[0,H]$, получим, подставляя в формулы (2.4) ζ_n вместо ζ и домножая $f(\boldsymbol{z},\zeta_n)$ на нормировочную постоянную $\mathcal{A}_n$. Функции $\psi_n(\boldsymbol{z})$ ортогональны в следующем смысле

$$\Big(\int\limits_0^H + \varkappa^{-1}\int\limits_H^\infty\Big)\psi_n(\boldsymbol{z})\,\psi_{n'}(\boldsymbol{z}) = 0, \quad n \neq n'. \tag{2.6}$$

Будем нормировать собственные функции ψ_n условием

$$\Big(\int\limits_0^H + \varkappa^{-1}\int\limits_H^\infty\Big)\psi_n^2(\boldsymbol{z}) = 1, \tag{2.7}$$

выбирая соответствующим образом постоянные $\mathcal{A}_n$.

Решение радиально-угловой части уравнения (1.13), не зависящее от φ и удовлетворяющее принципу предельного поглощения, имеет вид

$$\frac{i}{4\,m_v}\,H_0^{(1)}(k\,\zeta_n\,\rho),$$

где $H_0^{(1)}(k\,\zeta_n\,\rho)$ это есть функция Ханкеля первого рода.

Функция

$$u_n(\boldsymbol{z},\rho) \;=\; \frac{i}{4\,m_v}\,H_0^{(1)}(k\,\zeta_n\,\rho)\,\psi_n(\boldsymbol{z}) \tag{2.7}$$

называется нормальной волной номера n.

Волновое поле точечного источника в плоско-слоистой среде, т.е. решение задачи (1.13), (1.14) с граничными условиями (1.9)–(1.11), (1.5) при $H = \mathrm{const}$ и $\varepsilon = 0$, может быть записана в виде конечной суммы нормальных волн, каждая из которых берется со своим коэффициентом возбуждения (равным $\psi_n(\boldsymbol{z}_0)$), и вклада непрерывного спектра u_ζ:

$$u \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(\boldsymbol{z}_0)u_n(\boldsymbol{z},\rho) \;+\; u_\zeta. \tag{2.8}$$

Вклад непрерывного спектра может быть представлен интегралом u_L, отвечающим за головную (боковую) волну, и суммой того же вида, что и (2.8). Слагаемые этой суммы соответствуют "резонансам" задачи Штурма–Лиувилля (2.1), (2.2). "Резонансы" являются комплексными корнями дисперсионного уравнения с положительной мнимой частью. Обозначим резонансы через $\zeta_n, n = N, N+1, \ldots$. Тогда решение имеет вид

$$u \;=\; \sum_{n\geqslant 0} \psi_n(\boldsymbol{z}_0)u_n(\boldsymbol{z},\rho) \;+\; u_L. \tag{2.9}$$

Для глубинного волновода, когда $\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0 \ll H$ и $k \gg 1$, вкладом головной волны можно пренебречь. При достаточно больших значениях $k\rho$ функцию Ханкеля можно заменить асимптотикой. Окончательно получим приближенное значение для решения $u(\boldsymbol{z},\rho)$ в виде нормальных волн $N_n(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z})$ номера n

$$\begin{gathered} u \sim \frac{1}{\sqrt{m_v\,\rho}} \sum_{n\geqslant 0} e^{ik\zeta_n\rho} N_n(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}); \\ N_n(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{z}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi m_v k}}\,\frac{\psi_n(\boldsymbol{z}_0)\psi_n(\boldsymbol{z})}{\sqrt{\zeta_n}}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

которое используется обычно в теоретических и численных исследованиях звукового поля в плоско-слоистой среде.

При большом параметре задачи $k \gg 1$ можно использовать асимптотическое представление для линейно независимых решений $f_i(\boldsymbol{z}, \zeta), i = 1, 2$. Это упростит дисперсионное уравнение, а в зависимости от номера n и интервала изменения $\boldsymbol{z}$, позволит получить представление собственных функций $\psi_n(\boldsymbol{z})$ через экспоненты, функции Эйри и функции параболического цилиндра.

Для наших целей (получение осевой волны) и профиля скорости с одним минимумом по глубине z можно ограничиться только функциями параболического цилиндра, которые асимптотически переходят в соответствующих областях в экспоненты или функции Эйри.

Приведем ([13, 16]) асимптотические формулы при $k \gg 1$ решения задачи (2.1), (2.2) для профиля показателя преломления на промежутке $0 \leqslant \boldsymbol{z} < H$ с одним максимумом в точке z^*, равным единице $n_* = 1$, (см. рис. 1).

Простыми точками поворота дифференциального уравнения (2.1) называются корни $\boldsymbol{z}_n, n = 1, 2, ...$, уравнения $n^2(\boldsymbol{z}) - \zeta^2 = 0$ первой кратности.

Рассмотрим уравнение эталонное к уравнению (2.1)

$$\Phi''(Z) + k^2[\Pi - R(Z)]\Phi(Z) = 0. \tag{2.11}$$

Если уравнение (2.1) не имеет точек поворота, то функция $R(Z)$ в эталонном уравнении (2.11) полагается равной нулю, а если уравнение (2.1) имеет одну простую точку поворота, то функция $R(Z)$ полагается равной Z. В случае двух точек поворота $R(Z) = \frac{Z^2}{4}$.

В соответствии с этими тремя случаями функция $\Phi(Z)$ может быть представлена как линейная комбинация

1) экспонент (нет точек поворота):

$$\Phi(Z) = A\cos(k\sqrt{(\Pi)}Z) \;+\; B\sin(k\sqrt{(\Pi)}Z), \tag{2.12}$$

2) функций Эйри (одна точка поворота):

$$\Phi(Z) = A\,v(k^{2/3}(Z - \Pi)) \;+\; B\,u(k^{2/3}(Z - \Pi)), \tag{2.13}$$

3) функций параболического цилиндра (две точки поворота):

$$\Phi(Z) = A\,D_{k\Pi - 1/2}(\sqrt{k}Z) \;+\; B\,D_{k\Pi - 1/2}(-\sqrt{k}Z). \tag{2.14}$$

В формулах (2.12)-(2.14) A и B являются произвольными постоянными. Функции Эйри $u(t)$, $v(t)$ являются вещественными решениями уравнения $w''(t) - tw(t) = 0$, с асимптотикой

$$v(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}, \quad u(t) \underset{t\to\infty}{\sim} t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}.$$

Функции параболического цилиндра $D_t(\pm Z)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 D_t(Z)}{dZ^2} + (t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}Z^2) D_t(Z) = 0, \tag{2.15}$$

а при $Z \to \infty$ имеют асимптотику

$$D_t(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} e^{-1/4\,Z^2} Z^t, \quad D_t(-Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-t)} e^{+1/4\,Z^2} Z^{-t-1}. \tag{2.16}$$

Связь между уравнением (2.1) и эталонным к нему уравнением (2.11) легко проверяется, если представить решение $\Psi(\boldsymbol{z})$ через $\Phi(Z)$ в следующем виде

$$\Psi(\boldsymbol{z}) = [Z'(\boldsymbol{z})]^{-\frac{1}{2}} \Phi(Z(\boldsymbol{z})).$$

Функция $Z(\boldsymbol{z})$ является решением в неявной форме

$$\int\limits_{Z_0}^{Z(\boldsymbol{z})} \sqrt{\Pi - R(s)}\, ds = \int\limits_{\boldsymbol{z}_0}^{\boldsymbol{z}} \sqrt{n^2(s) - \zeta^2}\, ds.$$

В соответствии с тремя случаями точек поворота функция $Z(\boldsymbol{z})$ может быть представлена одной из следующих формул.

1) В отсутствии точек поворота $R(s) = 0$, $Z_0 = 0$ и функция $Z(\boldsymbol{z})$ имеет вид

$$Z(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \int\limits_{\boldsymbol{z}_0}^{\boldsymbol{z}} \sqrt{n^2(s) - \zeta^2}\, ds. \tag{2.17}$$

2) Если уравнение (2.1) имеет одну точку поворота, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_2(\zeta)$, то эталонное уравнение (2.11) имеет тоже одну точку поворота $Z = \Pi$, причем $R(s) = s$. Выбирая $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_2$ и $Z_0 = \Pi$, получим

$$Z(\boldsymbol{z}) = \Pi - \left[-\frac{3}{2} \int\limits_{\boldsymbol{z}_2}^{\boldsymbol{z}} \sqrt{n^2(s) - \zeta^2}\, ds \right]^{2/3}. \tag{2.18}$$

3) Если уравнение (2.1) имеет две точки поворота $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$, то у уравнения (2.11) есть две точки поворота $Z = \pm 2\sqrt{\Pi}$, а $R(s) = s^2/4$. При $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_1$ и $Z_0 = -2\sqrt{\Pi}$ функция $Z(\boldsymbol{z})$ равна

$$\int\limits_{-2\sqrt{\Pi}}^{Z(\boldsymbol{z})} \sqrt{\Pi - \frac{s^2}{4}} ds = \int\limits_{\boldsymbol{z}_1}^{\boldsymbol{z}} \sqrt{n^2(s) - \zeta^2} ds. \tag{2.19}$$

Для того чтобы выполнялись неравенства $Z'(\boldsymbol{z}_1) \neq 0$ и $Z'(\boldsymbol{z}_2) \neq 0$, параметр Π должен быть выбран следующим

$$\Pi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\boldsymbol{z}_1}^{\boldsymbol{z}_2} \sqrt{n^2(s) - \zeta^2} ds.$$

Перейдем теперь к вопросу о переходе одного асимптотического представления решения уравнения (2.1) в другое в зависимости от местонахождения собственных значений ζ_i на интервале $(n_H, 1)$. Разобьем интервал $(n_H, 1)$, на котором расположен дискретный спектр $\zeta_n, n = 0, 1, ..., N-1$, на 6 зон: $\Delta_j\zeta, j = 1, 2, ..., 6$, (см. рис. 1).

Определим эти зоны интервалами

$$\begin{aligned} &\Delta_1\zeta = (1-\varepsilon_1, 1); && \Delta_2\zeta = [1-\varepsilon_1, n_s - \varepsilon_3); \\ &\Delta_3\zeta = [n_s - \varepsilon_3, n_s + \varepsilon_3); && \Delta_4\zeta = [n_s + \varepsilon_3, n_{\text{bot}} - \varepsilon_5); \\ &\Delta_5\zeta = [n_{\text{bot}} - \varepsilon_5, n_{\text{bot}} + \varepsilon_5); && \Delta_6\zeta = [n_{\text{bot}} + \varepsilon_5, n_H). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Величины $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ могут быть уточнены (см. [13, 16]).

Для $\zeta \in \Delta_6\zeta$ (см. рис. 1) дифференциальное уравнение (2.1) не имеет точек поворота и асимптотика его решения представляется через тригонометрические функции по формулам (2.12), (2.17).

При $\zeta \in \Delta_4\zeta$ для одной точки поворота решение определяется через функции Эйри формулами (2.13), (2.18).

Если $\zeta \in (\Delta_1\zeta \cup \Delta_2\zeta)$, уравнение (2.1) имеет две точки поворота и его решение выражается через функции параболического цилиндра по формулам (2.14),(2.19).

В переходных зонах $\zeta \in \Delta_5\zeta$ и $\zeta \in \Delta_3\zeta$, поступим следующим образом.

В зоне $\Delta_5\zeta$ продолжим функцию $n(\boldsymbol{z})$ гладко на значения $z > H$ так, чтобы уравнение (2.1) имело одну точку поворота, а его решение выражалось бы фунциями Эйри. Заменяя при $\zeta = n_{\text{bot}} - \varepsilon_5$

функции Эйри их асимптотикой, получим непрерывный переход асимптотических формул из зоны $\Delta_5\zeta$ в зону $\Delta_6\zeta$.

Аналогично, продолжим функцию $n(\boldsymbol{z})$ гладко на значения $\boldsymbol{z} < 0$ так, чтобы уравнение (2.1) имело две точки поворота в зоне $\Delta_3\zeta$. Тогда решение состоит из функций параболического цилиндра. При $\zeta = n_s - \varepsilon_3$, используя асимптотику функций параболического цилиндра для большого аргумента, получим непрерывный переход из зоны $\Delta_3\zeta$ в зону $\Delta_4\zeta$.

3. Представление решения модельной задачи

Мы пойдем еще дальше в упрощении задачи. Рассмотрим плоскую модель волновода. Давление звукового поля в волноводе будет зависеть только от двух координат $u(x, z)$, глубина водного слоя постоянна $H = \mathrm{const}$ (плоско-слоистая модель океана). Предположим, что для исследуемой среды скорость имеет один минимум c_*. Будем изучать две модели поведения скорости звука. В первом случае скорость звука является функцией только глубины $c = c(z)$, (настоящая статья). Во втором случае скорость слабо зависит от горизонтальной составляющей $c = c(\varepsilon x, z)$, (см. статью тех же авторов в данном сборнике).

Для скорости, зависящей произвольным образом от глубины $c = c(z)$ либо слабо зависисящей от x, $c = c(\varepsilon x, z)$, комбинированным методом найдем поле “осевой волны” от точечного источника в волноводе. Далее сравним его с полем эталонной задачи распространения волн в волноводе при специально подобранном показателе преломления [8]

$$n = n(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l_\perp}\right)^2},\ |z| < l_\perp,\ n(z) = c(z)^{-1}.$$

Пусть звуковое давление $u(x, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(z))u = -\delta(x)\delta(z - z_0),\ 0 < z < H; \tag{3.1}$$

$$(\Delta + k^2 n_H^2)u = 0,\ z > H; \quad k = \frac{\omega}{c_*},\ n(z) = \frac{c_*}{c(z)},\ c(z^*) = c_*, \tag{3.2}$$

На свободной поверхности будет выполнено условие Дирихле

$$u\,|_{z=0} = 0. \tag{3.3}$$

На границе раздела $z = H$ жидкости и дна поставим условия сопряжения

$$u\,|_{z=H-0} = u\,|_{z=H+0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H-0} = \left.\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H+0}, \quad \varkappa > 1. \quad (3.4)$$

Условия (3.4) определяют равенство давлений и непрерывность вертикальных составляющих скорости частиц жидкости в звуковой волне на поверхности дна.

Кроме того, функция $u(x, z)$ должна удовлетворять принципу предельного поглощения:

$$u(r) \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty, \quad \mathrm{Im}\ k > 0. \quad (3.5)$$

График зависимости показателя преломления $n(z)$ от глубины волновода представлен на рис.1. Рассмотрения проведем для точек источника и наблюдателя $z_0, z \ll H$, принадлежащих окрестности (ее радиус будет приведен) точки максимума z^* показателя преломления.

В реальных условиях для глубинного волновода в рассматриваемых средах показатель преломления при $z < H$ слабо отклоняется от $n(z^*) = n_* = 1$, (см. рис. 1). Это обстоятельство можно записать условием

$$\epsilon = H \max_{z<H} |n'(z)| \ll 1,$$

которое отличает глубинный волновод от поверхностного ($n'(z) > 0$).

В окрестности максимума z^*, где будут проведены исследования осевой волны для $z, z_0 \ll H$, квадрат показателя преломления $n^2(z)n^{-2}(z^*)$ может быть представлен в виде (см. рис.1)

$$n^2(z)n^{-2}(z^*) = 1 + 2\frac{n'(z^*)}{n(z^*)}(z - z^*) + \frac{[n'^2(z^*) + n(z^*)n''(z^*)]}{n^2(z^*)}(z - z^*)^2 +$$

$$+ \frac{[3n'(z^*)n''(z^*) + n(z^*)n'''(z^*)]}{3n^2(z^*)}(z - z^*)^3 + ... =$$

$$= 1 - (z - z^*)^2\frac{[-n''(z^*)]}{n(z^*)} + \frac{n'''(z^*)}{3n(z^*)}(z - z^*)^3 + ..., \quad [-n''(z^*)] > 0. \quad (3.6)$$

Следовательно, в окрестности максимума показателя преломления мы находимся в условиях эталонной задачи с показателем близким к такому

$$n = n(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l_\perp}\right)^2}, \quad |z| < l_\perp, \tag{3.7}$$

для которого возможно точное решение задачи. Причем в разложении (3.6) слагаемые, начиная со степени $(z - z^*)^3$ и выше, много меньше чем $(z - z^*)^2 \frac{[-n''(z^*)]}{n(z^*)}$, $\left|\frac{(z-z^*)n'''(z^*)}{3[-n''(z^*)]}\right| \ll 1$.

Обозначим отношение $\frac{n(z^*)}{[-n''(z^*)]}$ через $l_\perp^2$ в соответствии с эталонной задачей.

Для плоско-слоистой среды лучи являются экстремалью функционала $\int \frac{n(z)}{n(z^*)} ds$ и лежат в плоскостях параллельных оси z, например, в плоскости (x, z). Заметим, что луч, упавший на дно $z = H$ под углом, большим угла полного внутреннего отражения, отражается от дна. Луч, упавший на дно под углом, меньшим угла полного внутреннего отражения, не только отражается от дна, но и преломляется в него. Поскольку подстилающее дно предполагается однородным, луч, преломившийся в дно, не возвращается более в водный слой. Это обстоятельство дает возможность ограничиться рассмотрением лучей только в слое $0 \leqslant z < H$.

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (3.1) и условиям (3.3)–(3.5)

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta} \Psi(z, \zeta)\, dk\zeta, \quad k = \omega n_*. \tag{3.8}$$

Для функции Ψ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \left[n^2(z) n_*^{-2} - \zeta^2\right] \Psi = -\delta(z - z_0), \quad 0 < z < H, \tag{3.9}$$

с граничными условиями на поверхности $z = 0$, условиями сопряжения на дне $z = H$

$$\Psi(0, \zeta) = 0; \quad \Psi(z, \zeta)|_{z=H-0} = \mathcal{C} e^{-k\sqrt{n_H^2 - \zeta^2}(z-H)}|_{z=H+0},$$

$$\left.\frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial z}\right|_{z=H-0} = -\varkappa^{-1} k \sqrt{n_H^2 - \zeta^2}\, \mathcal{C} e^{-k\sqrt{n_H^2 - \zeta^2}(z-H)}|_{z=H+0} \tag{3.10}$$

и с условием типа предельного поглощения (3.5).

Введем вместо z и ζ новые переменные Z и t, а также большой параметр задачи $\mathcal{K}$ следующим образом

$$Z = 2\sqrt{\mathcal{K}\frac{[-n''(z^*)]}{n_*}}(z-z^*) = 2\frac{\sqrt{\mathcal{K}}(z-z^*)}{l_\perp}, \quad t+\frac{1}{2} = (1-\zeta^2)\mathcal{K},$$

$$\mathcal{K} = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{n_*}{[-n''(z^*)]}} = \frac{k\,l_\perp}{2} \gg 1. \tag{3.11}$$

Тогда уравнение (3.9) перейдет в уравнение Вебера для функций параболического цилиндра $D_t(Z)$, $D_t(-Z)$ с дельта функцией в правой части. Построим из двух линейно-независимых решений уравнения Вебера функцию Грина $\Psi(Z, Z_0, \zeta)$ задачи Штурма-Лиувилля (3.9)–(3.10) с заменой уравнения (3.9) таким

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} + \big(t+\frac{1}{2}-\frac{Z^2}{4}\big)\Psi = -\frac{l_\perp}{2\sqrt{\mathcal{K}}}\delta(Z-Z_0), \tag{3.12}$$

Функция Грина $\Psi(Z, Z_0, \zeta)$ задачи (3.12),(3.10) имеет вид

$$\Psi(Z, Z_0, \zeta) = \begin{cases} \frac{\Psi_1(Z_0)\Psi_2(Z)}{W(\Psi_1\Psi_2)}, & Z_1 < Z < Z_0, \\ \frac{\Psi_1(Z)\Psi_2(Z_0)}{W(\Psi_1\Psi_2)}, & Z_2 > Z > Z_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

где параметры Z_0, Z_1, Z_2 определены формулами

$$Z_0 = 2\sqrt{\mathcal{K}}\frac{(z_0-z^*)}{l_\perp}, \quad Z_1 = 2\sqrt{\mathcal{K}}\frac{(-z^*)}{l_\perp},$$

$$Z_2 = 2\sqrt{\mathcal{K}}\frac{(H-z^*)}{l_\perp}.$$

Функцию Грина (3.13) можно записать в более компактной форме

$$\Psi(Z_>, Z_<, \zeta) = \frac{\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{W(\Psi_1\Psi_2)}. \tag{3.14}$$

Здесь через $Z_>, (Z_<)$ обозначены наибольшее, соответственно, (наименьшее) значение аргументов (Z, Z_0), $W(\Psi_1\Psi_2)$ – определитель Вронского двух линейно независимых решений Ψ_1, Ψ_2.

Линейно независимые решения Ψ_1, Ψ_2 определены формулами

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(Z) &= D_t(Z)D_t(-Z_1) - D_t(-Z)D_t(Z_1), \\ \Psi_2(Z) &= \mathcal{A}\,D_t(Z) + \mathcal{B}\,D_t(-Z), \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ найдены из условий согласования (3.10) и совпадают с соответствующими коэффициентами в (2.4)

$$\mathcal{A} = [D_t'(-Z_2) - \frac{k\sqrt{\zeta^2 - n_H^2}}{\varkappa} D_t(-Z_2)];$$

$$\mathcal{B} = [D_t'(Z_2) + \frac{k\sqrt{\zeta^2 - n_H^2}}{\varkappa} D_t(Z_2)].$$

Тогда определитель Вронского $W(\Psi_1\Psi_2)$ двух линейно независимых решений Ψ_1, Ψ_2 имеет вид

$$W(\Psi_1\Psi_2) \;=\; \Psi_1\frac{\partial\Psi_2}{\partial Z} \;-\; \Psi_2\frac{\partial\Psi_1}{\partial Z} \;=$$

$$= \;-W(D_t(Z)D_t(-Z))[\mathcal{A}\, D_t(Z_1) \;+\; \mathcal{B}\, D_t(-Z_1)]. \qquad (3.16)$$

$W(D_t(Z)D_t(-Z))$ – вронскиан функций параболического цилиндра $D_t(Z)$ и $D_t(-Z)$ равный

$$W(D_t(Z)D_t(-Z)) = 2D_t(0)\, D_t'(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(t+1)\,\sin\,\pi t. \qquad (3.17)$$

Решение задачи (3.1)–(3.5) о вычислении поля точечного источника в волноводе с показателем преломления близким к (3.6), (3.7) определяется следующим интегралом

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\mathcal{K}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx\zeta}\Psi_1(Z_>)\Psi_2(Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)[\mathcal{A}\, D_t(Z_1) \;+\; \mathcal{B}\, D_t(-Z_1)]}d\zeta. \qquad (3.18)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках знаменателя формулы (3.18), равно функции $\Psi_2(Z_1)$. Следовательно, корни знаменателя выражения (3.18) совпадают с корнями вронскиана $D_t(0)D_t'(0)$ и функции $\Psi_2(Z_1)$.

Однако, наши исследования касаются значений Z и Z_0, принадлежащих окрестности точки минимума скорости. Используя асимптотику функций параболического цилиндра при $Z_1 \gg 1$ и $Z_2 \gg 1$, формулы перехода (2.12)-(2.14) этих асимптотик в функции Эйри или тригонометрические функции и зоны нахождения собственных чисел (см. Рис. 1), получим искомую функцию $u(x,z)$ в виде

$$u(x,z) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\mathcal{K}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx\zeta}D_t(Z_<)[D_t(Z_>)\mathcal{D} - D_t(-Z_>)]}{D_t(0)D_t'(0)}d\zeta, \qquad (3.19)$$

где $\mathcal{D}$ есть некоторое отношение функций Эйри на поверхности волновода в точке Z_1. Это отношение будет мало и в решении (3.19) можно исключить из рассмотрений слагаемое в числителе при $D_t(Z_>)$, [20].

Окончательно будем исследовать интеграл

$$u(x,z) = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{\mathcal{K}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx\zeta}D_t(Z_<)D_t(-Z_>)}{D_t(0)D_t'(0)}d\zeta. \tag{3.20}$$

4. Выделение из точного решения "осевой" волны

Решение задачи (3.1)–(3.5) приведено к виду (3.20), полностью совпадающему с представлением поля точечного источника эталонной задачи для показателя преломления (3.7). Следуя работам [8], [21], [22], сделаем *первый шаг* в преобразовании решения (3.20).

Запишем полное поле $u(x,z)$ в виде суммы нормальных волн, отвечающих N вычетам подинтегральной функции, и некоторого контурного интеграла. Контур γ_N охватывает положительную часть вещественной оси, где расположены полюса подинтегральной функции, начиная с $N+1, N+2, ...,$ и т.д., и положительную мнимую ось на плоскости комплексного переменного ζ:

$$u = \sum_{n=0}^{N} u_n^{\text{norm}} - \frac{1}{4\pi}\sqrt{\mathcal{K}}\int\limits_{\gamma_N} e^{ikx\zeta}\frac{D_t(Z_>)D_t(-Z_<)}{D_t(0)D_t'(0)}d\zeta, \tag{4.1}$$

где

$$u_n^{\text{norm}} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{e^{ikx\sqrt{1-\frac{2n+1}{2\mathcal{K}}}}}{\sqrt{2\mathcal{K}-(2n+1)}}D_n(Z_>)D_n(-Z_<). \tag{4.2}$$

Условия на выбор величины N будут указаны позже, (см. формулы (4.11), (5.12)).

Второй шаг преобразования интеграла (4.1) состоит в следующем. В формуле (3.17) для вронскиана $D_t(0)D_t'(0)$, стоящего в знаменателе подинтегрального выражения (4.1), разложим функцию $(\sin\pi t)^{-1}$ в геометрическую прогрессию с остаточным членом

$$\frac{1}{\sin\pi t} = -2i\left[\sum_{m=0}^{M-1} e^{i\pi t(2m+1)} + \frac{e^{i\pi t(2M+1)}}{1-e^{i2\pi t}}\right]. \tag{4.3}$$

Подставляя (3.17) и ряд (4.3) вместо $(\sin \pi t)^{-1}$ в интеграл (4.1), получим представление для поля u в виде суммы нормальных волн, суммы M интегралов и остаточного интеграла. Очевидно, что интегралы, стоящие в сумме по m от 0 до $M-1$, равны нулю, поскольку подынтегральное выражение не имеет особенностей, и контур интегрирования γ_N стягивается в точку. Тогда для решения задачи получаем формулу:

$$u=\sum_{n=1}^{N} u_n^{\mathrm{norm}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2\mathcal{K}}{\pi}} \int\limits_{\gamma_N} \frac{e^{i[kx\zeta+\pi t(2M+1)]}}{\Gamma(t+1)(1-e^{i2\pi t})} D_t(Z_>)D_t(-Z_<)d\zeta. \quad (4.4)$$

На третьем шаге преобразования в интеграле (4.4) заменим функции параболического цилиндра на новые по формуле

$$D_t(Z) = \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{i\pi t/2}D_{-t-1}(iZ) + e^{-i\pi t/2}D_{-t-1}(-iZ)\right]. \quad (4.5)$$

Предположим, что контур γ_N настолько удален от точки $\zeta = 1$, $(t = 0)$, что на нем выполняются условия:

$$\left|t+\frac{1}{2}\right| \gg 1, \quad \mathrm{Re}\ \sqrt{t+\frac{1}{2}} - \frac{Z}{2} \gg \left|t+\frac{1}{2}\right|^{-1/6}. \quad (4.6)$$

Условия (4.6) означают, что исследуется область вблизи точки поворота уравнения Вебера.

Тогда функции параболического цилиндра можно заменить на их асимптотические разложения:

$$D_{-t-1}(iZ) \sim \left[1-\frac{Z^2}{4(t+\frac{1}{2})}\right]^{-1/4} \exp\left\{-i\left(t+\frac{1}{2}\right) P\left(\frac{Z}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right)\right\} D_{-t-1}(0), \quad (4.7)$$

где $P(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$.

Используя асимптотические разложения (4.7), асимптотики для Гамма функций и $D_{-t-1}(0)$, запишем интеграл (4.4) в виде

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n^{\mathrm{norm}} + \frac{i}{4\pi}\sqrt{\mathcal{K}} \sum_{\alpha,\beta=\pm1} \int\limits_{\gamma_N} \frac{\varphi(t, Z_>, Z_<)e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}}}{1-e^{i2\pi t}}\, d\zeta, \quad (4.8)$$

$$\Phi_{m\alpha\beta} = x\zeta + \frac{t\pi}{k}\left[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] - \frac{t+\frac{1}{2}}{k}\left[\alpha P\left(\frac{Z_>}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right)-\right.$$

$$-\beta P\left(\frac{Z_<}{2\sqrt{t+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg], \tag{4.9}$$

$$\varphi=\left(t+\frac{1}{2}-\frac{Z_>^2}{4}\right)^{-1/4}\left(t+\frac{1}{2}-\frac{Z_<^2}{4}\right)^{-1/4}. \tag{4.10}$$

Осуществим четвертый шаг в преобразовании интеграла, представляющего решение.

Интеграл по контуру γ_N в формуле (4.8) разобьем на два: на интеграл по контурам γ^1 и γ_N^2. Контуры γ^1 и γ_N^2 при $\operatorname{Im}\zeta<0$ уходят на бесконечность в секторе $-\pi/2<\arg\zeta<-\pi/4$, а при $\operatorname{Im}\zeta>0$ контур γ^1 уходит на бесконечность в секторе $\pi/2<\arg$, $\zeta<3\pi/4$, а контур γ_N^2 – в секторе $\pi/4<\arg\zeta<\pi/2$. Схематически контуры γ^1 и γ_N^2 показаны на рис. 2.

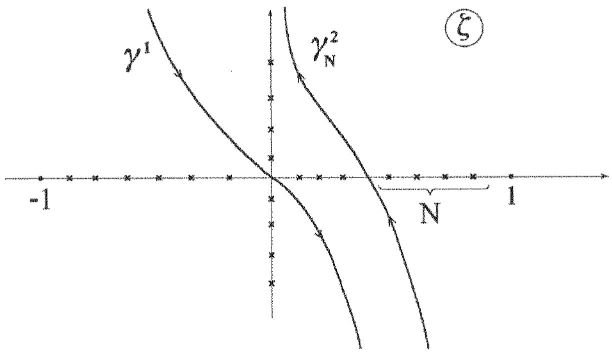

Рис. 2.

Контур γ_N^2 пересекает вещественную ось при $\zeta=a_N$, так что

$$\zeta_{N+1}<a_N<\zeta_N, \tag{4.11}$$

где $\zeta_n=\sqrt{1-\frac{2n+1}{kl_\perp}}$. Можно показать, что интегралы по контуру γ^1 и γ_N^2 существуют по отдельности.

На *пятом шаге преобразования решения* (4.1) в интеграле по γ^1 разложим знаменатель в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-e^{i2\pi t}}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{i2m\pi t},$$

тогда формула (4.8) примет вид

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n^{\text{norm}} + \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=\pm 1} I^{(1)}_{m\alpha\beta} + \sum_{\alpha,\beta=\pm 1} I^{(2)}_{M\alpha\beta}, \tag{4.12}$$

где

$$I^{(1)}_{m\alpha\beta} = \frac{i}{4\pi}\sqrt{K} \int\limits_{\gamma^1} \varphi(\zeta, Z_>, Z_<) e^{ik\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta,x,Z_>,Z_<)} d\zeta, \tag{4.13}$$

$$I^{(2)}_{M\alpha\beta} = \frac{i}{4\pi}\sqrt{K} \int\limits_{\gamma^2_N} \varphi(\zeta, Z_>, Z_<) \frac{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(\zeta,x,Z_>,Z_<)}}{1 - e^{i2\pi t}} d\zeta, \tag{4.14}$$

Слагаемое $\sum_{\alpha,\beta=\pm 1} I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ формул (4.12), (4.14) будет соответствовать осевой волне, которая вбирает в себя сложное интерференционное поле, сосредоточенное в окрестности линии минимума скорости по глубине волновода, (см. Рис. 3).

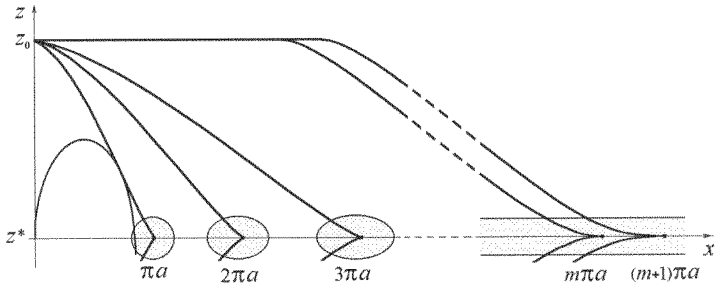

Рис. 3.

Переходим к основному (шестому) шагу в цепи преобразований интеграла (4.1).

5. Вычисление интегралов $I^{(1)}_{m\alpha\beta}, I^{(2)}_{M\alpha\beta}$

Интегралы $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ могут быть вычислены методом стационарной фазы. Уравнение для стационарной точки имеет вид (в переменных ζ, z – малое)

$$\Phi'_{m\alpha\beta} = x - \zeta\, l_\perp \left\{ \left[2m + 1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \right] \pi - \right.$$

$$-\alpha \arcsin\left(\frac{(z-z^*)_>}{l_\perp\sqrt{1-\zeta^2}}\right)+\beta \arcsin\left(\frac{(z-z^*)_<}{l_\perp\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\Bigg\}=0. \qquad (5.1)$$

Решение этого уравнения $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$ имеет наглядную лучевую интерпретацию. Выпустим луч из источника $x = 0,\ z = z_0$ (предположим, что $z_0 - z^* = (z - z^*)_>$) так, чтобы он попал в точку наблюдения $(x, z - z^*)$.

Для частного закона изменения показателя преломления (3.7) уравнение луча имеет вид (см. [22]):

$$z - z^* = A\sin(Bx + C),$$

где

$$A = l_\perp\sqrt{1-a^2}, \quad B = \frac{1}{a\, l_\perp},$$

$$C = \arcsin\left(\frac{z_0 - z^*}{l_\perp\sqrt{1-a^2}}\right), \quad l_\perp^2 = \frac{n_*}{[-n_*'']}.$$

Величина $a = n(z)n_*^{-1}\cos\Psi(z)$ постоянна на луче ($\Psi(z)$ есть угол между касательной к лучу и осью x).

Расстояние между соседними точками пересечения лучом оси x называют циклом, величина цикла равна

$$l = \pi\, a\, l_\perp.$$

Очевидно, имеет место равенство

$$x = pl \pm a\, l_\perp \arcsin\left(\frac{z_0 - z^*}{l_\perp\sqrt{1-a^2}}\right)\pm$$

$$\pm a\, l_\perp \arcsin\left(\frac{z - z^*}{l_\perp\sqrt{1-a^2}}\right).$$

В этом случае будем говорить, что луч имеет p циклов. Знаки "+" или "−" выбираются в зависимости от знаков $z_0 - z^*$, $z - z^*$ и четности величины p. Если $z_0 - z^*$ и $z - z^*$ одинаковых знаков и p – нечетное, то в формуле надо брать одинаковые знаки, если же p – четное, то – разные. Если величины $z_0 - z^*$ и $z - z^*$ разных знаков, то наоборот. С учетом этого правила можно записать

$$x = \left[2m + 1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right] l - \alpha\, l_\perp a \arcsin\left(\frac{(z-z^*)_>}{l_\perp\sqrt{1-a^2}}\right)+$$

$$+\beta\, l_\perp a \arcsin\left(\frac{(z-z^*)_<}{l_\perp\sqrt{1-a^2}}\right), \quad \alpha,\,\beta=\pm 1. \tag{5.2}$$

Мы видим, что формула (5.2) совпадает с (5.1), если взять $\zeta = a$, т.е. для стационарной точки получаем выражение

$$\zeta_{m\alpha\beta} = n(z)\, n_*^{-1}\cos\Psi, \tag{5.3}$$

где Ψ – угол выхода луча, попадающего в точку $(x, z-z^*)$ и имеющего $2m+1+(\alpha+\beta)/2$ циклов. Заметим, что имеет место монотонность по величине m:

$$\zeta_{m\alpha\beta} \leqslant \zeta_{m'\alpha'\beta'} \tag{5.4}$$

при $m > m'$ и любых α, β, α', β'. Нетрудно показать, что фаза $\Phi_{m\alpha\beta}$, вычисленная в стационарной точке $\zeta_{m\alpha\beta}$, равна эйконалу этого луча

$$\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta}, x, z_>, z_<) = \tau_{m\alpha\beta}(x, z_0, z).$$

Рассмотрим теперь вопрос о правомочности применения метода стационарной фазы. Легко видеть, что начальный контур интегрирования γ^1 может быть совмещен со стационарным контуром для фазы $\Phi_{m\alpha\beta}$, который проходит через точку $\zeta_{m\alpha\beta}$ и уходит на бесконечность, асимптотически приближаясь к лучам $\arg\zeta = -\pi/4$ и $\arg\zeta = 3\pi/4$. Существенной областью интегрирования будет область, где

$$\frac{k}{2}\Phi''_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\,(\zeta-\zeta_{m\alpha\beta})^2 = O(1). \tag{5.5}$$

Метод стационарной фазы применим, если в существенной области интегрирования при $n\geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\frac{k}{n!}\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta}(\zeta_{m\alpha\beta})\,(\zeta-\zeta_{m\alpha\beta})^n \ll 1, \tag{5.6}$$

где $\Phi^{(n)}_{m\alpha\beta}$ – производная фазы порядка n.

Условие (5.6) будет выполнено, если производные от фазы удовлетворяют неравенству

$$k\Phi^{(n)}_{m\alpha\zeta}(\zeta_{m\alpha\zeta})\big[k\Phi''_{m\alpha\zeta}(\zeta_{m\alpha\zeta})\big]^{-n/2} \ll 1.$$

Учитывая (5.1), имеем:

$$\Phi''_{m\alpha\zeta} = -l_\perp\,\pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2] + \theta'_{\alpha\beta}(\zeta, z_>, z_<),$$

$$\Phi^{(n)}_{m\alpha\zeta} = \theta^{(n-1)}_{\alpha\beta}(\zeta, z_>, z_<),$$

$$\theta_{\alpha\beta} = l_\perp\, \zeta \left[\alpha \arcsin \frac{(z-z^*)_>}{l_\perp \sqrt{1-\zeta^2}} - \beta \arcsin \frac{(z-z^*)_<}{l_\perp \sqrt{1-\zeta^2}}\right].$$

В реальных задачах распространения волн отношение $(z-z^*)/l_\perp$ является малой величиной. Поэтому естественно предположить, что выполняется условие

$$\left|\frac{z-z^*}{l_\perp \sqrt{1-\zeta^2}}\right| \ll 1. \tag{5.7}$$

Тогда выражения для фазы и ее производной заметно упростятся. Имеем при ζ близких к нулю:

$$\theta_{\alpha\beta} \sim \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,[\alpha(z-z^*)_> - \beta(z-z^*)_<],$$

$$\theta^{(n)}_{\alpha\beta} \sim (-2)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\zeta^{n+1}}{(1-\zeta^2)^{n+1/2}}\,[\alpha(z-z^*)_> - \beta(z-z^*)_<].$$

Если предположить, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{z-z^*}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll l_\perp \pi\,[2m+1+(\alpha+\beta)/2],$$

которое с учетом уравнения (5.1) эквивалентно условию

$$\left|\frac{z-z^*}{(1-\zeta^2)^{3/2}}\right| \ll x, \tag{5.8}$$

то мы получим, что вторая производная от фазы $\Phi''_{m\alpha\beta}$ не обращается в нуль и имеет оценку

$$\Phi''_{m\alpha\beta} \sim -l_\perp\,\pi\,[2m+1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)] \sim -\frac{x}{\zeta}. \tag{5.9}$$

Далее неравенство (5.6) будет справедливо, если стационарная точка $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$ отделена от нуля настолько, что выполняется условие

$$\frac{k(z-z^*)}{(1-\zeta^2)^{n-1/2}}\,(kx)^{-n/2} \ll 1.$$

Это неравенство можно переписать в другом виде

$$(1-\zeta^2) \gg \left(\frac{z-z^*}{x}\right)^{\frac{2}{2n-1}} (kx)^{-\frac{n-2}{2n-1}}, \quad n \geqslant 3. \tag{5.10}$$

Учитывая сделанные ранее предположения, из (4.6),(5.7),(5.8) получим, что при $\zeta = \zeta_{m\alpha\beta}$, удовлетворяющем условию

$$1-\zeta^2 \gg \max\left\{\frac{1}{kl_\perp}, \left(\frac{z-z^*}{l_\perp}\right)^2, \left(\frac{z-z^*}{x}\right)^{\frac{2}{2n-1}} (kx)^{-\frac{n-2}{2n-1}}\right\}, n \geqslant 2, \tag{5.11}$$

проведение метода стационарной фазы для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ не встретит препятствий.

Результат вычисления интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ по методу стационарной фазы дает геометрическую волну, проходящую через точки $(0, z_0 - z^*)$ и $(x, z - z^*)$ и имеющую $2m + 1 + (\alpha + \beta)/2$ циклов.

Итак, необходимо подобрать минимальное число N и максимальное число M таким образом, чтобы метод стационарной фазы был оправдан при вычислении интегров $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$, а остаток $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ был мал при удалении от вещественной оси переменной ζ.

Перейдем к завершающему (седьмому) шагу в комбинированном методе В. Б. Филиппова.

Обратимся к интегралу $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$. Предположим, что точка пересечения a_N контура γ^2_N с вещественной осью удовлетворяет неравенству

$$\zeta_{M\alpha\beta} \leqslant a_N \leqslant \zeta_{M-1\,\alpha'\beta'}, \qquad \forall\, \alpha, \beta, \alpha', \beta', \tag{5.12}$$

где

$$\zeta_{m\alpha\beta} \sim \frac{x}{l_\perp \pi[2m+1+(\alpha+\beta)/2]}$$

является стационарной точкой для интеграла $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$.

Заметим, что, ввиду соотношения (5.4), всегда можно добиться, чтобы условие (5.12) выполнялось. В верхней полуплоскости ζ при $\mathrm{Im}\ \zeta > 0$ величина $\exp\{i2\pi t\}$ в знаменателе интеграла $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ экспоненциально растет, а в нижней полуплоскости при $\mathrm{Im}\ \zeta < 0$ экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси. Следовательно, в верхней полуплоскости ζ (при $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$) подынтегральное выражение в интеграле $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ (см. (4.14)) будет вести себя как $\exp\left\{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta}\right\}$, а в нижней — как $\exp\left\{ik\Phi_{M\,\alpha\beta}\right\}$. Отметим, что

$$\exp\left\{ik\Phi_{M\,\alpha\beta}\right\} = \exp\left\{ik\Phi_{M-1\alpha\beta}\right\}\exp\left\{2\,i\,t\,\pi\right\}.$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия (5.12) подынтегральное выражение экспоненциально убывает при удалении от вещественной оси.

Имеем при $\zeta = a_N + i\xi$, учитывая (4.10),

$$\Phi_{m\alpha\beta}(\zeta) = \Phi_{m\alpha\beta}(a_N) + i\Phi'_{m\alpha\beta}(a_N)\xi + O(\Phi''_{m\alpha\beta}\xi^2),$$

$$t(\zeta) = t(a_N) - i\,k\,l_\perp\,a_N\,\xi + O(k\,l_\perp\xi^2),$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-a_N^2}} + O\left(\frac{\xi}{(1-a_N^2)^{3/2}}\right)\right].$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.14), получим:

$$I^{(2)}_{M\,\alpha\beta} \sim -\frac{1}{4\pi\sqrt{1-a_N^2}}e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(a_N)}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-k\Phi'_{M\alpha\beta}(a_N)\xi}}{1-e^{i2\pi t(a_N)}e^{2\pi k l_\perp a_N\xi}}\,d\xi. \tag{5.13}$$

Эту формулу можно записать в другом виде

$$I^{(2)}_{M\,\alpha\beta}\sim-\frac{1}{8\pi^2 k l_\perp a_N\sqrt{1-a_N^2}}\Big\{e^{ik\Phi_{M\alpha\beta}(a_N)}\big[F(\alpha_N,\beta_N)+F(2-\alpha_N,\beta_N)\big]-$$
$$-e^{ik\Phi_{M-1\,\alpha\beta}(a_N)}\big[F(1-\alpha_N,\beta_N)+F(1+\alpha_N,\beta_N)\big]\Big\}, \tag{5.14}$$

где

$$F(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1-2x\cos\beta+x^2}\,dx, \tag{5.15}$$

$$\alpha_N = -\frac{\Phi'_{M\,\alpha\beta}(a_N)}{2\pi l_\perp a_N}, \qquad \beta_N = kl_\perp\pi(1-a_N^2)-\pi.$$

Заметим, что формула (5.14) имеет смысл при $1 > \alpha_N > 0$. Это выполняется, если справедливо неравенство (5.12) для величины

a_N. Погрешность формулы (5.14) имеет порядок максимума из величин

$$xk^{-1}l_\perp^{-2}, \quad (kl_\perp)^{-1}(1-a_N^2)^{-3/2},$$

в соответствии с формулой (5.12) и с разложением вблизи $\zeta = a_N + i\xi$ подинтегральной функции в (4.14).

6. Формулировка основных результатов

Итак, показано, что при достаточно больших значениях волнового числа $k = \omega\, n_*$ имеет место комбинированное представление (4.12) для вычисления звукового поля u, в котором функции $I^{(1)}_{m\alpha\beta}$ представляют собой значения геометрооптических волн, а для остатка $I^{(2)}_{M\alpha\beta}$ справедлива простая формула (5.14). Величины M и N (соответственно количество отщепленных геометрооптических и нормальных волн) находятся из условия, чтобы выполнялись неравенства (4.11), (5.11), (5.12).

Литература

1. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, З. А. Янсон, *Вычисление поля на оси симметричного волновода.* — В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. **14**, (1974), 84–93.
2. V. E. Grikurov, M. M. Popov, *Summation of Gaussian beams in a surfase Waveguide.* — Wave Motion, **5**, (1983), 225–233.
3. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей.* — Докл. АН СССР **258**, No. 5 (1981), 1097–1100.
4. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение гауссовых пучков в изотропной теории упругости.* — Препринт ЛОМИ Р-9-82. Л.,(1982), 14 с.
5. А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Е. А. Палкин, *Численное сравнение двух асимптотических методов решение задач дифракции волн в плавно неоднородных средах.* — Изв. вузов. Радиофизика. **29**, No. 1 (1986), 79–88.
6. В. Э. Грикуров, *Явление перекрытия прикаустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода.* — Известия ВУЗов. Радиофизика, **23**, No. 9 (1980), 1038.
7. В. М. Кудряшов, *Геометроволновой способ вычисления акустических полей в волноводе.* — Акустический журнал. **22**, вып. 5 (1976), 724–728.
8. В. Б. Филиппов, *Об одном методе расчета поля точечного источника в волноводе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **99** (1980), 146–156.
9. A. Erdelyi, M. Wyman, *The asymptotic evaluation of certain integrals.* — ARMA. **14**, No. 3 (1963), 217–260.
10. L. B. Felsen, *Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones.* — J. Appl.Phys. **26**, No. 2 (1955), 138–151.

11. L. B. Felsen, *Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts.* — J. Acoust. Soc. Amer. **69**, (1981), 352–361.
12. D. Ludwig, *Diffraction by a circular cavity.* — J. Math. Phys., **11**, No. 5 (1970), 1617–1630.
13. В. С. Булдырев, В. С. Буслаев, *Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117**, (1981), 39–77.
14. В. С. Буслаев, *Структура акустического поля вблизи поверхности глубокого моря.* I — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 98–111.
15. В. С. Булдырев, В. С. Буслаев, *Качественная структура акустического поля в океане.* — Препринт института радиотехники и электроники АН СССР No. 44 (416), М. (1984).
16. В. С. Булдырев, В. С. Буслаев, *Распространение звука в океане.* — Препринт института радиотехники и электроники АН СССР, No. 45(417), М. (1984).
17. A. G. Alenitsyn, V. S. Buldyrev, V. E. Grikurov, and A. A. Fedotov, *Sound pulse simulation in deep ocean.* — J. Comp. Acoust. **3**, No. 1 (1995), 57–68.
18. Л. М. Бреховских, *Акустика океана.* — Наука, М. (1974).
19. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах.* — Наука, М. (1973).
20. А. В. Лазута, С. Ю. Славянов, И. Б. Тампель, *О распространении волн в двух связных волноводах с излучением.* — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. Наука, Л.,(1971), 125–133.
21. Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Н. Г. Власюк, *Комбинированный метод расчета поля точечного источника в водноводе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ РАН, **257**,(1999), 56–74.
22. В. С. Булдырев, *Поле точечного источника в волноводе.* — Труды МИАН СССР **CXV**, No. 1, Наука, Л., (1971), 78–102.

Philippov V.B., Kirpichnikova N. Ya., Vlasjuk N.G. Combined method of calculation of the field of the point source in a waveguide. (Layer media.)

The two-dimensional problem of propagation of waves, raised by a point source, in an interior layer wave guide is investigated. The Dirichlet condition is given on the bound of the wave guide and also two junction condition are defined on the interface between fluid and bottom. With help of cumbersome transformation the solution is represented as a sum of the geometro-optical waves, the normal waves and the residual is shown. The sufficient conditions on the general amount of the detached normal and geometro-optical waves are obtained. The residual is expressed by the simple formula.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 марта 2004 г.