Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

Ю. А. Сурков, В. В. Решетников

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КВАЗИЛОКАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН МОДАЛЬНОГО ТИПА В СЛУЧАЕ ТОНКОГО НИЗКОСКОРОСТНОГО УПРУГОГО СЛОЯ, КОНТАКТИРУЮЩЕГО С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

**Работа посвящается П. В. Крауклису
в связи с его семидесятилетием**

Общие подходы и постановка задач, связанных с изучением низкоскоростных интерференционных волновых полей в тонкослоистых средах, были предложены в работе [1]. Полученные в этой работе результаты послужили основой к разработке методов количественного изучения и количественной оценки волновых полей в таких средах [2]. Для простых моделей были опробованы эффективные численные алгоритмы и составлены программы для персональных компьютеров, позволяющие вычислять как волновое поле в целом, так и отдельные его компоненты.

На основе расчетов удалось обнаружить новые типы волн, которые получили название квазилокально плоских слабозатухающих волн модального типа (КЛПСМ-волны) [2, 3]. Генезис этих волн тесно связан с особыми комплексными корнями дисперсионного уравнения задачи. Поскольку эти волны несут определенную полезную информацию о среде, то они представляют не только научный интерес, но, очевидно, могут иметь также большое прикладное значение.

Природа волн нового типа уже рассматривалась в работах [2, 3], но пока еще на небольшом числе примеров. В настоящей работе для наиболее полного изучения волн такого типа путем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Грант No. 01-01-00255.

численных расчетов выясняются их основные свойства в зависимости от возможных (физически оправданных) относительных параметров среды. Исследования также направлены на установление области распространения модальных волн от источника.

1. Чтобы исключить частые обращения к работе [3] (находящейся в печати), представляется уместным привести здесь необходимые выражения из решений поставленной задачи и положить их в основу дальнейших обсуждений. В работе [3] формулируется постановка задачи для простейшей плоской модели тонкого упругого слоя $0 < z < h$ $(\nu = 1)$ мощностью h, находящегося в жестком контакте с нижележащим упругим полупространством $z > h$ $(\nu = 2)$. В момент времени $t = 0$ к свободной границе $z = 0$ слоя прикладывается нормальное сосредоточенное воздействие

$$\vec{t}_z|_{z=0} = -\delta(x)f(t)\vec{k},$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака, а $f(t)$ – низкочастотная функция, определяемая соотношениями

$$f(t) \equiv 0, \quad (t < 0); \qquad f(t) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\omega_0} \widetilde{F}(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad (t > 0). \tag{1}$$

Здесь $\widetilde{F}(i\omega)$ – спектральная функция источника, а

$$0 < \omega < \omega_0 \tag{2}$$

достаточно низкочастотная спектральная полоса прикладываемого воздействия.

Потенциалы поля смещений в полупространстве $z > h$ $(\nu = 2)$ допускают представление в виде повторных интегралов

$$\left.\begin{matrix} \varphi_2(x,z,t) \\ \psi_2(x,z,t) \end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\omega_0} \widetilde{F}(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} Y_1(\zeta,\omega)\cdot e^{-\frac{\omega}{v_{s1}}f_1(\zeta)} \\ Y_2(\zeta,\omega)\cdot e^{-\frac{\omega}{v_{s1}}f_2(\zeta)} \end{matrix}\right\} d\zeta, \tag{3}$$

где $\widetilde{F}(i\omega)$ имеет значение из (1), а путь интегрирования λ совпадает (пока) с прямой на комплексной плоскости (ζ)

$$\zeta = k\exp(i\chi), \quad (-\infty < k < \infty),$$

идущей из бесконечности 3-его квадранта на бесконечность 1-ого квадранта (через точку $\zeta = 0$) под весьма малым углом $\chi > 0$.

Фазовые функции в (3) имеют значения

$$
\begin{aligned}
f_1(\zeta) &= ix\zeta - (z-h)\alpha_2(\zeta),\\
f_2(\zeta) &= ix\zeta - (z-h)\beta_2(\zeta),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где обозначено

$$
\begin{gathered}
\alpha_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-\gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-\delta_\nu^2},\\
\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{s\nu}} \quad (\nu = 1,2)
\end{gathered}
\tag{5}
$$

“Медленно” же изменяющиеся функции Y_1 и Y_2 определяются отношением детерминантов

$$
Y_1 = \frac{\widetilde{\Delta}_1(\zeta,\omega)}{\Delta_0(\zeta,\omega)}, \quad Y_2 = \frac{\widetilde{\Delta}_2(\zeta,\omega)}{\Delta_0(\zeta,\omega)},
\tag{6}
$$

в которых детерминант знаменателя является левой частью дисперсионного уравнения задачи

$$
\Delta_0(\zeta,\omega) = 0
\tag{7}
$$

Выражения детерминантов из числителей (6), имеющих структуру, качественно аналогичную структуре детерминанта $\Delta_0(\zeta,\omega)$ из знаменателя, далее не понадобятся. Детерминант же из знаменателя, входящий в дисперсионное уравнение (7), полезно выписать полностью:

$$
\begin{aligned}
\Delta_0(\zeta,\omega) = e^{-\frac{\omega h}{v_{s1}}(\alpha_1+\beta_1)}P_1q_1 + e^{\frac{\omega h}{v_{s1}}(\alpha_1+\beta_1)}P_2q_2 + e^{\frac{-\omega h}{v_{s1}}}(\alpha_1-\beta_1)P_3q_3+\\
+e^{\frac{\omega h}{v_{s1}}(\alpha_1-\beta_1)}P_4q_4 + P_5q_5 - P_6q_6,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

при выражениях P_ν, q_ν, представляющихся определителями

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \left|\vec{T}_{11}^{(-1)}\vec{T}_{11}^{(-2)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_1 &= \left|\vec{t}_1^{(+1)}\vec{t}_1^{(+2)}\right|,\\
P_2 &= \left|\vec{T}_{11}^{(+1)}\vec{T}_{11}^{(+2)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_2 &= \left|\vec{t}_1^{(-1)}\vec{t}_1^{(-2)}\right|,\\
P_3 &= \left|\vec{T}_{11}^{(-1)}\vec{T}_{11}^{(+2)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_3 &= \left|\vec{t}_1^{(-2)}\vec{t}_1^{(+1)}\right|,\\
P_4 &= \left|\vec{T}_{11}^{(-2)}\vec{T}_{11}^{(+1)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_4 &= \left|\vec{t}_1^{(-1)}\vec{t}_1^{(+2)}\right|,\\
P_5 &= \left|\vec{T}_{11}^{(-1)}\vec{T}_{11}^{(+1)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_5 &= \left|\vec{t}_1^{(-2)}\vec{t}_1^{(+2)}\right|,\\
P_6 &= \left|\vec{T}_{11}^{(-2)}\vec{T}_{11}^{(+2)}\vec{T}_{21}^{(-1)}\vec{T}_{21}^{(-2)}\right|, \quad & q_6 &= \left|\vec{t}_1^{(-1)}\vec{t}_1^{(+1)}\right|,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

составленными из следующих векторов столбцов

$$
\begin{gathered}
\vec{T}_2^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\zeta \\ \alpha_2 \\ 2\zeta\alpha_2\mu_2 \\ -g_2\mu_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_2^{(-2)} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\zeta \\ -g_2\mu_2 \\ -2\zeta\alpha_2\mu_2 \end{pmatrix}, \\
\vec{t}_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} 2\zeta\alpha_1\mu_1 \\ -g_1\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_1^{(-2)} = \begin{pmatrix} -g_1\mu_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \end{pmatrix}, \\
\vec{t}_1^{(+1)} = \begin{pmatrix} 2\zeta\alpha_1\mu_1 \\ g_1\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_1^{(+2)} = \begin{pmatrix} g_1\mu_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \end{pmatrix}, \\
\vec{T}_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\zeta \\ \alpha_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \\ -g_1\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_1^{(-2)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\zeta \\ -g_1\mu_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \end{pmatrix}, \\
\vec{T}_1^{(+1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \alpha_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \\ g_1\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_1^{(+2)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \zeta \\ g_1\mu_1 \\ 2\zeta\alpha_1\mu_1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Здесь использованы обозначения из (5) и положено $g_\nu = 2\zeta - \delta_\nu^2$.

Далее обсуждаются методы изучения волновых полей, представленных повторными интегралами на примере полей потенциалов из (3). Основная идея заключается в деформации исходного контура λ в стационарный контур фазовой функции, определяемой соотношениями

$$
\operatorname{Im} \tilde{f}_2(\zeta) = \operatorname{Im} \tilde{f}_2(\zeta_0), \quad \operatorname{Re}[\tilde{f}_2(\zeta) - \tilde{f}_2(\zeta_0)] > 0
$$

с целью преодоления вычислительных трудностей, связанных с осцилляцией фазового множителя в интеграле (3). При этом, однако, приходится дополнительно вычислять вычеты $\alpha_{-1}(\zeta_k)$ в корнях $\zeta_k(\omega)$ дисперсионного уравнения (7) в случае пересечения контуром λ линий корней, а также обходить разрезы, проведенные из точек $\zeta = \pm\gamma_2$ и $\zeta = \pm\delta_2$ ветвления радикалов $\alpha_2(\zeta)$ и $\beta_2(\zeta)$ из (5) на бесконечность. Расчеты проводились для одной модели среды при следующих упругих параметрах:

$$
\begin{gathered}
V_{p1} = 3.0; \quad V_{s1} = 1.5; \quad \rho_1 = 2.0; \quad v_{p2} = 5.5; \\
V_{s2} = 2.5; \quad \rho_2 = 2.2; \quad (\rho[\text{г/см}^3], \quad v[\text{км/с}]),
\end{gathered} \tag{11}
$$

которым в соответствии с (5) отвечают относительные параметры

$$\gamma_1 = 0.5; \quad \gamma_2 = 0.27; \quad \delta_1 = 1; \quad \delta_2 = 0.6; \quad \sigma = \rho_1/\rho_2 = 0.91 \quad (12)$$

при мощности тонкого слоя $h = 0.01$ км.

Вычисление горизонтальной и вертикальной компонент смещения проводилось на семи профилях различной ориентации (горизонтальные, вертикальные, наклонные). В результате расчетов низкочастотных волновых полей на основе созданного интерактивного комплекса программ обнаружены новые волны типа КЛПСМ. Эти волны связаны с особыми комплексными корнями дисперсионного уравнения. Они порождают интенсивные моды, которые при определенных соотношениях параметров упругих сред, толщины слоя и видимой частоты зондирующего сигнала, могут распространяться в глубь среды с малым затуханием на большие расстояния в некотором угловом секторе.

2. Для более полного изучения явлений, возникающих в тонкослоистых упругих средах, в настоящей работе на примере двухслойной среды проводится численное исследование свойств квазилокальных плоских волн модального типа при различных упругих параметрах среды. Численные значения относительных параметров γ_ν, δ_ν и σ (имеющих физический смысл) [4] в пересчете на принятые нами обозначения для низкоскоростного слоя, находятся в следующих пределах

$$0.3 \leqslant \gamma_1 \leqslant 0.6, \quad 0.2 \leqslant \gamma_2 \leqslant 0.6, \quad 0.3 \leqslant \delta_2 \leqslant 0.9, \quad 0.7 \leqslant \sigma \leqslant 1 \quad (13)$$

Как известно, изменение плотности ρ среды оказывает значительно меньшее влияние на распространение волн по сравнению с изменениями скоростей продольных v_p и поперечных v_s волн. Поэтому при расчетах параметр σ был принят постоянным и равным 0.91. Предварительные расчеты также показали, что изменение параметра γ_1 в указанных в (13) пределах не оказывает особого влияния на возникновение и распространение модальных волн. В связи с этим обстоятельством задача перебора относительных параметров значительно упростилась и свелась к перебору лишь двух параметров γ_2 и δ_2 в соответствующих диапазонах их возможных численных значений (13).

Таким образом, было рассмотрено 18 вариантов моделей, отличающихся относительными параметрами γ_2 и δ_2 (см. табл. 1).

Таблица 1

Nп/п	h, км	σ	γ_1	γ_2	δ_2	f, Гц	КЛПСМ-волны
1	0.02	0.91	0.45	0.2	0.3	10	0
2				0.2	0.4		1
3				0.3	0.4		0
4				0.2	0.5		2
5				0.3	0.5		1
6				0.4	0.5		0
7				0.2	0.6		2
8				0.3	0.6		2
9				0.4	0.6		1
10				0.2	0.7		2
11				0.3	0.7		2
12				0.4	0.7		1
13				0.2	0.8		1
14				0.3	0.8		1
15				0.4	0.8		1
16				0.2	0.9		1
17				0.3	0.9		1
18				0.4	0.9		1

Условные обозначения:

0 – КЛПСМ – волны отсутствуют,

1 – КЛПСМ – волны находятся в тесной интерференции с SV волнами,

2 – интенсивность волн КЛПСМ не менее, чем в 2 раза превышает амплитуду SV волн.

Для каждой реализации модели среды сначала рассчитывались корни дисперсионного уравнения задачи. Затем вычислялись вычеты в этих корнях и дополнительно проводилось вычисление волнового поля без учета вклада вычетов в волновую картину. Из сопоставления полученных сейсмограмм уже можно было судить о вкладе модальной волны в полное волновое поле для рассматриваемого варианта модели. Все расчеты низкочастотных волновых полей, распространяющихся в глубь среды, проводились для случаев жесткого контакта низкоскоростного тонкого слоя с нижележащим полупространством. Такова общая схема расчета, цель которого как раз и состояла в определении области существования и распространения модальной волны, создаваемой комплексными корнями дисперсионного уравнения.

При проведении численного эксперимента уделялось особое внимание анализу поведения корней на комплексной плоскости ζ и их зависимости от частоты, а также от относительных параметров моделей. В качестве иллюстрации ограничимся результатами расчета корней дисперсионного уравнения (8) для моделей 7, 8, 9 (таблица 1), отличающихся лишь численными значениями параметра γ_2, а затем покажем, как изменяются моды в зависимости от частоты и от параметра δ_2 при постоянном значении γ_2 на примере моделей 4 и 16 из таблицы 1.

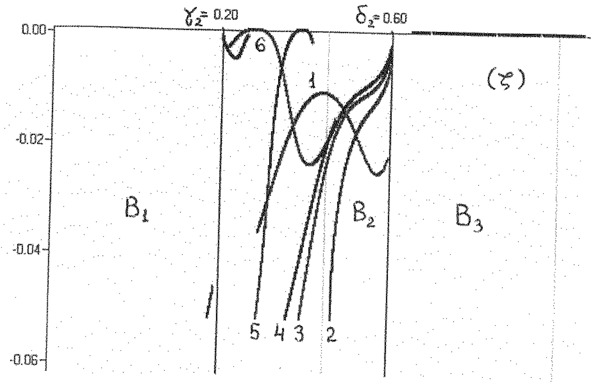

Рис. 1.

На рис. 1 для модели 7 изображены линии корней на комплексной плоскости ζ, на которой выделены три области B_1, B_2 и B_3, пересекаемые контуром λ при его деформации. Отсутствие корней в области B_1 объясняется тем, что рассматривается достаточно узкая полоса нижней полуплоскости. Для низкоскоростного слоя в случае жесткого контакта между слоем и полупростран-

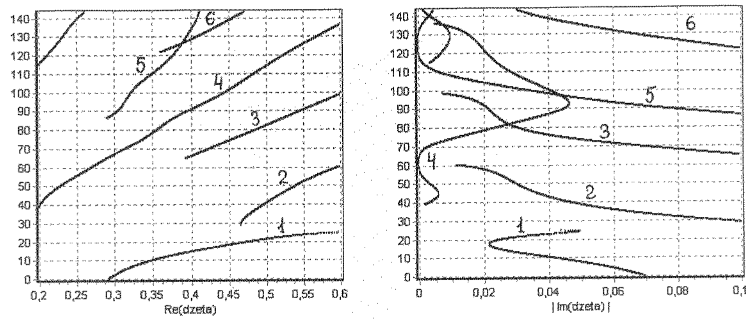

Рис. 2.

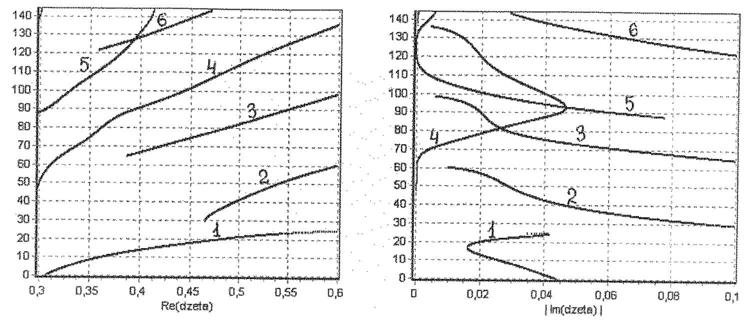

Рис. 3.

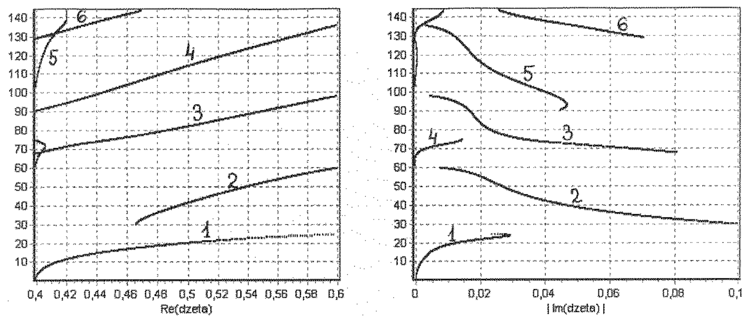

Рис. 4.

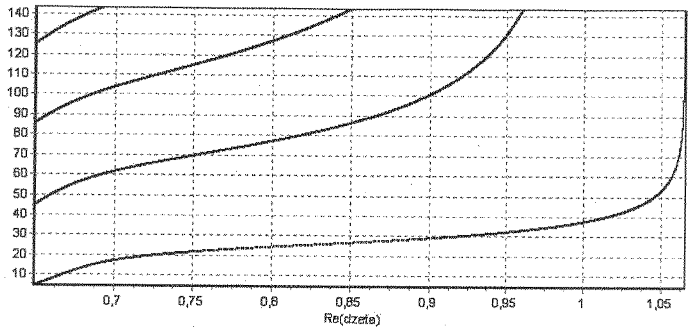

Рис. 5.

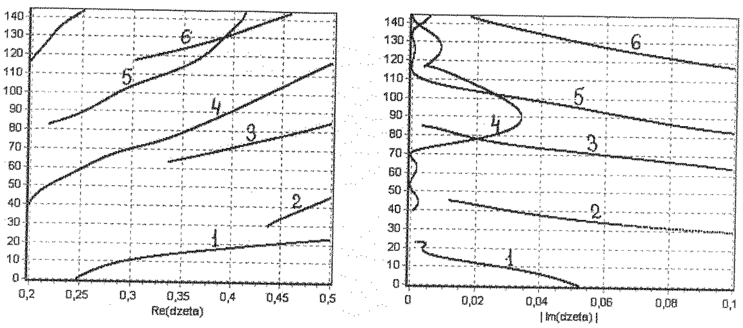

Рис. 6.

ством основной вклад в полное волновое поле вносят две группы корней, первая из которых расположена в области B_2, а вторая находится в области B_3. На этом рисунке линии корней в области B_2 пронумерованы в порядке их прихода в эту область при изменении частоты f. Как выяснилось при расчетах, основной вклад в полное волновое поле вносят линии корней, помеченные цифрами 1 и 2. Чтобы показать зависимость комплексных корней от частоты, на рис. 2, рис. 3 и рис. 4 приведены функции $\mathrm{Re}\,\zeta(f)$ и $|\mathrm{Im}\,\zeta(f)|$, соответствующие параметрам моделей 7, 8, 9. Первая самая низкочастотная мода (ее мнимая часть) с увеличением γ_2 от 0.2 до 0.4 при $\delta_2 = 0.6$ приближается к вещественной оси и при значении $\gamma_2 = 0.4$ выходит на вещественную ось. На рисунке

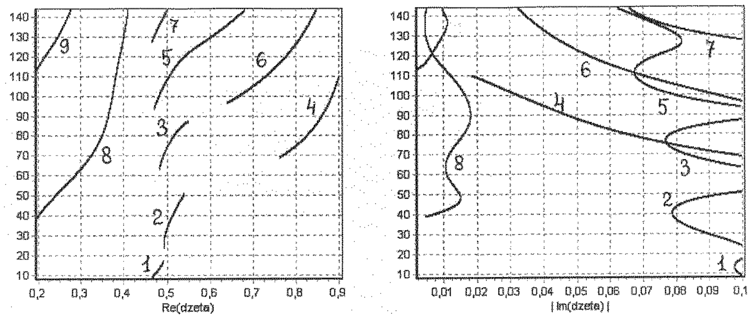

Рис. 7.

5 для модели 7 изображено положение вещественных корней в области B_3 как функций частоты, описывающих хорошо известные релеевские моды. Эти моды определяют основной вклад в полное поле вблизи подошвы низкоскоростного слоя. Увеличение относительного параметра δ_2 в пределах $0.5 \leqslant \delta_2 \leqslant 0.9$ при постоянном значении $\gamma_2 = 0.3$ приводят к возрастанию количества мод в зависимости от частоты. При этом низкочастотные моды $|\operatorname{Im}\zeta(f)|$ все дальше удаляются от вещественной оси (рис. 6, рис. 7, варианты 4, 16).

а) б)

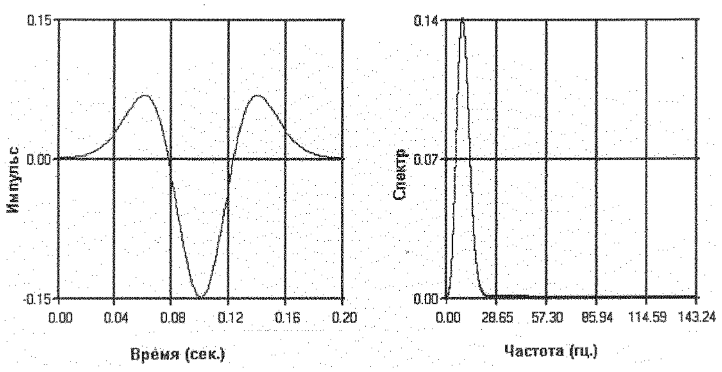

Рис. 8.

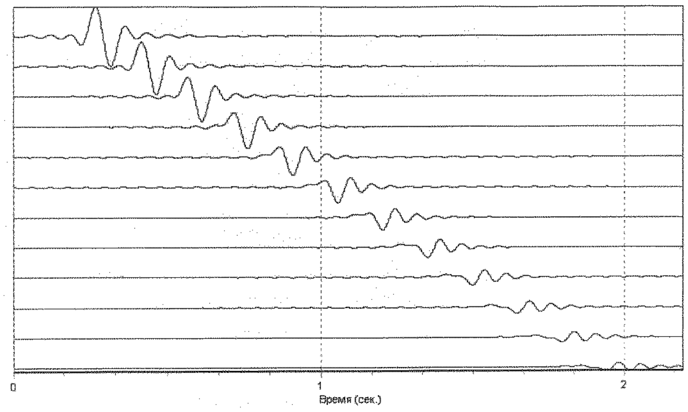

Рис. 9.

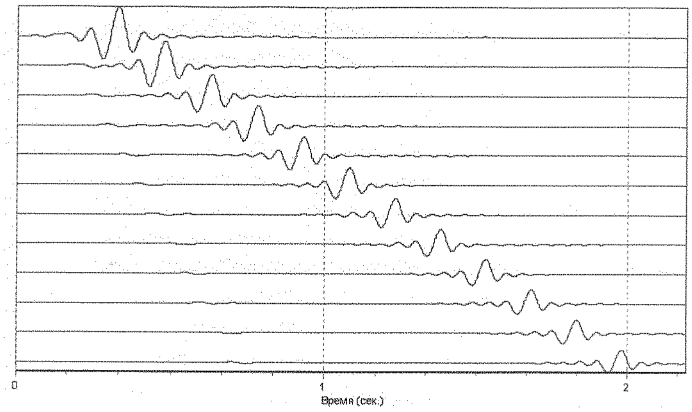

Рис. 10.

3. Мы не будем останавливаться на методике расчета низкочастотных волновых полей, которая довольно подробно описана в работе [3], а сразу перейдем к иллюстрации волновых полей, возбуждаемых поверхностным нормальным источником, приложенным к верхней свободной границе тонкого слоя. В качестве воздействия использована функция формы $f(t)$ (рис. 8а) с видимой частотой 10 гц (рис. 8б). Выбор такой частоты в данном

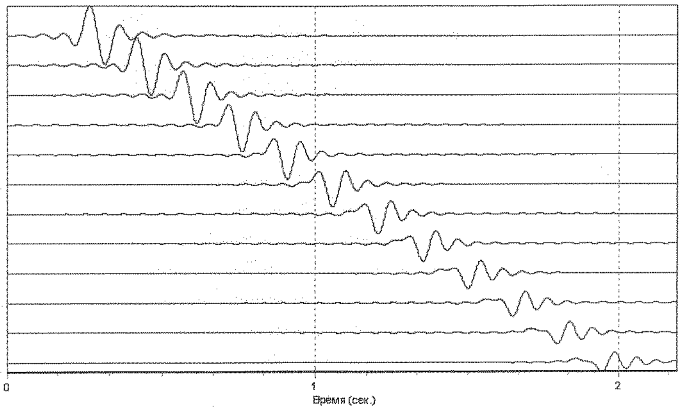

Рис. 11.

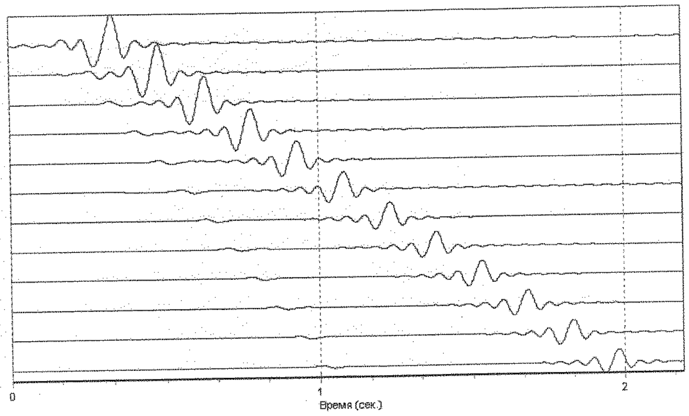

Рис. 12.

случае обусловлен тем, что соответствующая ей первая мода (рис. 2, рис. 3, рис. 4) вносит основной вклад в полное волновое поле. В работах [2, 3] было отмечено, что наиболее интенсивная модальная волна, распространяющаяся в глубь среды, наблюдается на профилях, составляющих углы больше 40° между направлением из источника и нормалью к подошве тонкого слоя. Поэтому расчеты проводились на наклонном профиле

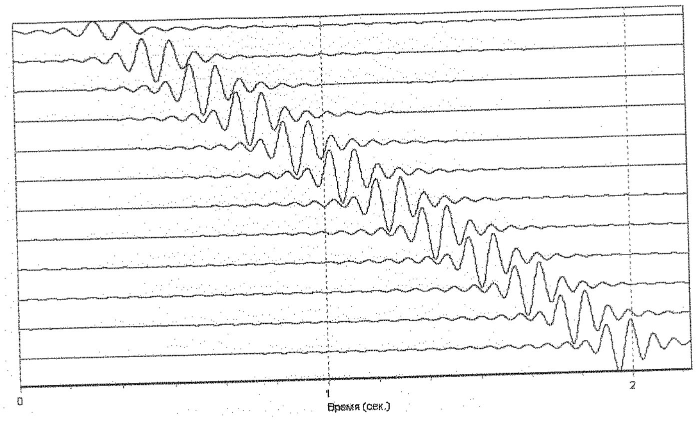

Рис. 13.

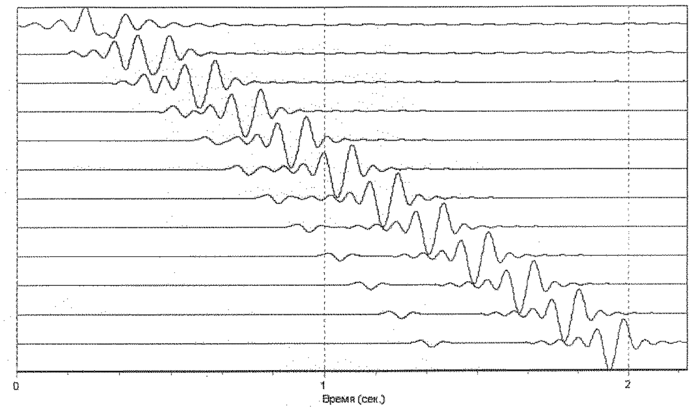

Рис. 14.

($\alpha = 50°$) в 12 точках с шагом $\Delta l = 0.2$ км, начиная от точки с координатами $x = z = 0.3$ км, для относительных параметров сред, соответствующих 18 моделям из таблицы 1 при мощности тонкого слоя $h = 0.02$ км. Для вариантов 7, 8, 9 приводятся теоретические сейсмограммы горизонтальной составляющей смещения волнового поля (рис. 9, рис. 11, рис. 13), сформированного вычетами в комплексных корнях дисперсионного уравнения (7) задачи и поля, вычисленного без учета вклада вычетов (рис. 10, рис. 12, рис. 14). Для сопоставления полученных сейсмограмм для каждой из них рассчитывались максимальные амплитуды $Amax$. В результате оказалось, что в вариантах 7 и 8 модальные волны значительно превосходят по интенсивности (в 3–4 раза) поле объемных волн. В варианте 9 максимальная амплитуда модальной волны и волны SV практически одинаковы. Результаты расчетов волновых полей для всех 18 моделей рассматриваемых сред также приведены в таблице 1. Можно видеть, что модальные волны наблюдаются при относительных параметрах, соответствующих моделям 4, 7, 8, 10, 11. В вариантах 1, 3, 6 волна КЛПСМ отсутствует. Во всех же остальных вариантах модальные волны находятся в тесной интерференции с SV волнами. Отметим также, что модальные волны распространяются в глубь полупространства со скоростью поперечной волны V_{s2}. Для определения области распространения волн КЛПСМ от источника численный эксперимент проводился на наклонных профилях в диапазоне углов $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 75^\circ$. При $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 75^\circ$ модальная волна регистрируется на сравнительно небольшом удалении от источника упругих колебаний (в 2–3 точках профиля). А на профилях $40^\circ < \alpha < 55^\circ$ волны КЛПСМ распространяются на большие расстояния (вплоть до 3 км) без заметного затухания. В заключение заметим, что о существовании волн КЛПСМ, предварительно можно судить по картине расположения линий корней дисперсионного уравнения (7) на комплексной плоскости. Критерием обнаружения этой волны является приближение первых мод к вещественной оси комплексной плоскости.

Литература

1. Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев.* I. *(Построение волновых полей типа SV и обсуждение рациональных методов их количественной оценки).* — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 253. В кн.: Интерференционные волны в слоистых средах. 3. Спб. (1999), с. 12–136.
2. В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев.* II. *(Численные методы оценки полей. Краткий обзор получаемых результатов).* — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 253. В кн.: Интерференционные волны в слоистых средах. 3. Спб. (1999), с. 162–244.
3. В. В. Решетников, Ю. А. Сурков, *О новых явлениях в упругих средах,*

состоящих из тонкого слоя, контактирующего с полупространством. — Вопросы геофизики, вып. 36. (в печати)

4. *Материалы количественного изучения динамики сейсмических волн.* I. — Изд-во ЛГУ (1957), 420 с.

Surkov Yu. A., Reshetnikov V. V. The numerical study of the properties of quasilocal plane waves of the modal type in the case of a thin low-velocity layer that is in contact with an elastic half-space.

The numerical study of the properties of quasilocal plane waves of the modal type propagating deep into a medium is carried out by the example of the model of a low-velocity elastic layer in the case of the rigid contact with an underlying half-space. It is established that the genesis of these waves is closely connected with the singular complex roots of the dispersion equation of the problem. Eighteen variants of the model differing by the relative parameters of the problem that have a physical sence are considered. For every variant the seismograms of the modal and body waves are computed and the comparison of them by intensity is carried out.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 26 января 2004 г.