Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ УПРУГО–ЖИДКИХ СРЕДАХ. III

**Работа посвящается П. В. Крауклису
в связи с его семидесятилетием**

Предлагаемая работа исследует распространение волн в блочной упруго-жидкой среде и является продолжением статей [1, 2]. В отличие от указанных статей настоящая работа, как и статья [3], рассматривает не только двумерные, но и трехмерные блочные структуры. В обеих работах в двумерном и в трехмерном случаях среда состоит из ячеек, в которых расположено соответственно 4 или 8 блоков. В отличие от [3] в ячейках рассматриваемой среды один блок является упругим, а остальные блоки жидкие. Применяемая методика мало отличается от методики статьи [3]. Вследствие этого многие выводы излагаются довольно кратко и со ссылками на формулы из статьи [3]. В обеих статьях строятся эффективные модели, которые являются анизотропными жидкостями. В каждой из этих моделей распространяется одна объемная волна.

Для скоростей указанных волн вдоль координатных осей выводятся и исследуются формулы. В эти формулы равноправно входят параметры всех блоков одной ячейки, при этом для скоростей внутри упругих блоков устанавливаются разные выражения в случае двумерных и трехмерных сред. Особое внимание уделяется случаю, когда все жидкие блоки в одной ячейке содержат одинаковые жидкости, а упругие блоки могут рассматриваться как включения в жидкую среду. В случае, когда эти упругие включения занимают сравнительно малый объем, определяются малые поправки к скорости в жидкости. Также исследуются случаи, когда упругий блок занимает всю или почти всю ячейку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант No. 03-05-65015.

Если в заданной среде объем жидких блоков устремить к нулю и оставить только упругие блоки, то эффективная модель отличается от упругой среды, так как в ней тангенциальные напряжения обращаются в нуль, а нормальные напряжения оказываются одинаковыми. Такая эффективная модель подобна жидкой среде, и это утверждение находится в полном соответствии с предположением Био [4]. Вследствие этого все формулы для скоростей распространения в эффективных моделях рассматриваемой блочной среды и жидкой блочной среды [3] оказываются аналогичными.

§1. Построение эффективной модели двумерной блочной упруго-жидкой среды

Пусть задана периодическая вдоль осей x и z среда $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \tilde{H}$, в которой расположены соответственно n и $\tilde{n}$ периодов с длинами h и $\tilde{h}$. Среда разделяется на $n\tilde{n}$ одинаковых прямоугольных ячеек с размерами h и $\tilde{h}$. Каждая ячейка состоит из четырех однородных и изотропных блоков 1, 2, 3, 4 (рис. 1). Размеры их выражаются равенствами (4.1) [3]. Блок 1 является упругим, а остальные блоки заполнены в общем случае разными жидкостями. Упругая среда 1 описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
t_{xx1} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_{z1}}{\partial z},\\
t_{zz1} &= \lambda\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{z1}}{\partial z},\\
t_{xz1} &= \mu\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xz1}}{\partial z} &= \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2},\\
\frac{\partial t_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} &= \rho_1\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Смещения u_{xi}, u_{zi} и давление p_1 в жидких средах удовлетворяют уравнениям

$$
-p_1 = \lambda_i\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z}\right), -\frac{\partial p_i}{\partial x} = \rho_i\frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2}, -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2}, \tag{1.2}
$$

где $i = 2, 3, 4$, ρ_i — плотность,

$$
\lambda_i = \rho_i v_i^2 \tag{1.3}
$$

и v_i — скорость распространения в жидкой среде i. На внутренних границах между жидкостями непрерывны нормальные смещения и давления. В случае границы упругой и жидкой сред напряжение t_{xz} обращается в нуль, также непрерывны нормальные смещения, а равенство давлений заменяется равенством нормальной составляющей напряжений и давления, взятого с обратным знаком. Конкретно эти граничные условия представлены соотношениями (1.5)–(1.7) [1]. Вид линейных условий, заданных на внешних границах, а также характер и расположение линейного источника, возбуждающего среду, оказываются в нашей задаче несущественными.

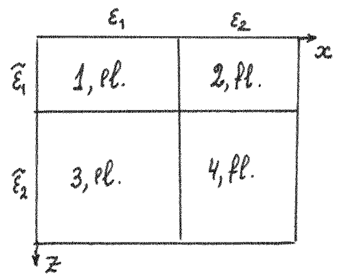

Рис. 1.

Для построения эффективной модели заданной среды совершим в волновом поле в этой среде предельный переход при условиях

$$\begin{gathered} n \to \infty, \quad \tilde{n} \to \infty, \quad h_{\to}0, \quad \tilde{h} \to 0, \quad H = \mathrm{const}, \quad \widetilde{H} = \mathrm{const}, \\ \varepsilon_1 = \mathrm{const}, \quad \varepsilon_2 = \mathrm{const}, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \mathrm{const}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \mathrm{const} \end{gathered} \tag{1.4}$$

и построим уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле. При этом предельном переходе каждая ячейка и все ее блоки сжимаются в одну точку. Указанный предельный переход осуществляется методом матричного осреднения [5, 6]. Согласно этому методу, при осуществлении предельного перехода граничные условия на внутренних границах выполняются во всей области. Это утверждение приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} u_{x1} = u_{x2} = u_x^{(1.2)}, \quad u_{x3} = u_{x4} = u_x^{(3.4)}, \\ u_{z1} = u_{z3} = u_z^{(1.3)}, \quad u_{z2} = u_{z4} = u_z^{(2.4)}; \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$-p = t_{xx1} = t_{zz1}, \quad t_{xz1} = 0, \tag{1.6}$$

выполняющимся в каждой точке среды. Производные напряжений, давления и смещений по координатам определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial p_3}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_4}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_3}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_4}{\partial z}; \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} &= \varepsilon_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_{x4}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} &= \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z3}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_{z4}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Осреднение по формулам (1.7) проводятся независимо по обеим координатам с использованием второго и третьего уравнений (1.2). В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{13} \frac{\partial^2 u_x^{(1.3)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3 \varepsilon_1 + \rho_4 \varepsilon_2, \\ \rho_{13} &= \rho_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_3 \tilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{24} = \rho_2 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_4 \tilde{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Соотношения (1.9) являются уравнениями сплошной среды для эффективной модели. Чтобы вывести соответствующее уравнение закона Гука, необходимо в уравнение (1.8) подставить выражения для производных смещений по координатам. В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} &= \varepsilon_1(At_{xx1} - Bt_{zz1}) - \varepsilon_2\left(\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \frac{p}{\lambda_2}\right),\\
\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} &= \tilde{\varepsilon}_1(-Bt_{xx1} + At_{zz1}) - \tilde{\varepsilon}_2\left(\frac{\partial u_{x3}}{\partial x} + \frac{p}{\lambda_3}\right),\\
\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} &= -\varepsilon_1\left(\frac{\partial u_{z3}}{\partial z} + \frac{p}{\lambda_3}\right) - \varepsilon_2\left(\frac{\partial u_{z4}}{\partial z} + \frac{p}{\lambda_4}\right),\\
\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z} &= -\tilde{\varepsilon}_1\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{p}{\lambda_2}\right) - \tilde{\varepsilon}_2\left(\frac{\partial u_{x4}}{\partial x} + \frac{p}{\lambda_4}\right),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$A = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}, \quad B = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \tag{1.12}$$

После ряда преобразований соотношений (1.11) и учета условий (1.6) получаем уравнение закона Гука

$$-p = \tilde{\lambda}\left[\tilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_2\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}\right], \tag{1.13}$$

в котором

$$\tilde{\lambda} = \left[2s_1(A-B) + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4}\right]^{-1}, \tag{1.14}$$

а s_i – относительные площади блоков. Формулу (1.14) полезно записать в виде

$$\tilde{\lambda} = \left[\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{s_4}{\lambda_4}\right]^{-1}, \tag{1.15}$$

где $\lambda_1 = \lambda + \mu$. Из соотношения (1.13) следует, что упругое включение, окруженное со всех сторон жидкостями, описывается как жидкое включение с эффективным параметром λ_1. Таким образом, эффективная модель рассматриваемой среды описывается 5 уравнениями (1.9) и (1.13) относительно 5 неизвестных p, $u_x^{(1.2)}$, $u_x^{(3.4)}$, $u_z^{(1.3)}$ и $u_z^{(2.4)}$.

Число уравнений и неизвестных может быть сокращено. С этой целью введем средние смещения

$$\begin{aligned}
u_x &= \tilde{\varepsilon}_1 u_x^{(1.2)} + \tilde{\varepsilon}_2 u_x^{(3.4)},\\
u_z &= \varepsilon_1 u_z^{(1.3)} + \varepsilon_2 u_z^{(2.4)},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

и используем равенства

$$\rho_{12}u_x^{(1.2)} = \rho_{34}u_x^{(3.4)}, \quad \rho_{13}u_z^{(1.3)} = \rho_{24}u_z^{(2.4)}, \tag{1.17}$$

следующие из уравнений (1.9). На основании соотношений (1.16) и (1.17) получаем формулы

$$\begin{aligned} u_x^{(1.2)} &= \frac{u_x\rho_{34}}{\tilde\varepsilon_1\rho_{34}+\tilde\varepsilon_2\rho_{12}}, \quad u_x^{(3.4)} = \frac{u_x\rho_{12}}{\tilde\varepsilon_1\rho_{34}+\tilde\varepsilon_2\rho_{12}}, \\ u_z^{(1.3)} &= \frac{u_z\rho_{24}}{\tilde\varepsilon_1\rho_{24}+\varepsilon_2\rho_{13}}, \quad u_z^{(2.4)} = \frac{u_z\rho_{13}}{\varepsilon_1\rho_{24}+\varepsilon_2\rho_{13}} \end{aligned} \tag{1.18}$$

и заменим пять уравнений (1.9) и (1.13) тремя уравнениями

$$-p = \tilde\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial_x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_x\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{1.19}$$

в которых

$$\rho_x = \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\tilde\varepsilon_1\rho_{34}+\tilde\varepsilon_2\rho_{12}}, \quad \rho_z = \frac{\rho_{13}\rho_{24}}{\varepsilon_1\rho_{24}+\varepsilon_2\rho_{13}}. \tag{1.20}$$

Таким образом, эффективная модель, описываемая уравнениями (1.19), является трансверсально-изотропной жидкостью. Из уравнений (1.19) следует волновое уравнение

$$\frac{1}{\rho_x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_z}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\tilde\lambda}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.21}$$

для давления в эффективной модели.

§2. Построение эффективной модели трехмерной блочной упруго-жидкой среды

Пусть задана трехмерная периодическая вдоль координатных осей упруго-жидкая система $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant y \leqslant \overline{H}$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, в которой в направлениях осей x, y, z расположены соответственно $n, \bar n$ и $\tilde n$ периодов с длинами $h, \bar h$ и $\tilde h$. Эта система геометрически подобна системе, заданной в §1 работы [3], и состоит из ячеек, изображенных на рис. 1 [3]. Каждая ячейка в обеих системах содержит 8 блоков в виде прямоугольных параллелепипедов, размеры которых задаются формулами (1.1) [3]. В отличие от работы [3] каждая ячейка рассматриваемой системы состоит из упругого блока 1 и семи жидких блоков $2, 3, \ldots, 8$. Упругие блоки являются однородными, изотропными, характеризуются постоянными Ламе λ, μ, плотностью ρ_1 и описываются обычными уравнениями теории упругости. Для дальнейших преобразований полезно уравнения закона Гука, содержащие нормальные напряжения, представить в виде равенств

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} t_{xx1} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{yy1} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{zz1}, \\
\frac{\partial u_{y1}}{\partial y} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{xx1} + \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} t_{yy1} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{zz1}, \\
\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{xx1} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} t_{yy1} + \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} t_{zz1}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Жидкие среды в блоке i ($i = 2, 3, \ldots, 8$) характеризуются плотностью ρ_i, скоростью распространения v_i, коэффициентом $\lambda_i = \rho_i v_i^2$ и описываются уравнениями (1.2) [3]. Граничные условия между блоками определены в §1. Конкретный вид линейных условий, заданных на внешних границах, а также характер и расположение линейного источника, возбуждающего среду, оказываются в нашей задаче несущественными.

Для построения эффективной модели заданной среды совершим в волновом поле предельный переход при условиях (1.7) [3] и построим уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле. Этот предельный переход осуществляется, как и в случае других блочных структур, методом матричного осреднения. Согласно этому методу, граничные условия выполняются после предельного перехода во всей области. Из этого утверждения следуют равенства для смещений (1.8) [3] и соотношения

$$-p = t_{xx1} = t_{yy1} = t_{zz1}, \quad t_{xy1} = t_{xz1} = t_{yz1} = 0. \tag{2.2}$$

Производные смещений, давления и напряжений определяются по формулам (1.10)–(1.12) [3] и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= -\varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx1}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial p_3}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_4}{\partial x} \\
&= \varepsilon_1 \frac{\partial p_5}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_6}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial p_7}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_8}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{yy1}}{\partial y} + \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_3}{\partial y} = \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_2}{\partial y} + \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_4}{\partial y} \\ &= \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_5}{\partial y} + \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_7}{\partial y} = \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_6}{\partial y} + \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_8}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz1}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_5}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_6}{\partial z} \\ &= \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_3}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_7}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_4}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_8}{\partial z}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

На основании формул осреднения (2.3) и уравнений сплошной среды для жидких и упругих сред, приходим к 12 уравнениям сплошной среды (1.13) [3] для эффективной модели. В этих 12 уравнениях используются обозначения (1.14) [3].

Чтобы вывести уравнение закона Гука, необходимо в равенства (1.10)–(1.12) [3] подставить выражения для производных смещений по координатам в каждом из блоков. С этой целью на основании соотношений (2.1) и первых формул (2.2) запишем равенства

$$\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} = \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} = \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \tag{2.4}$$

для первого блока. В результате осреднений и исключения из равенств производных смещений по координатам в отдельных блоках приходим к равенству

$$\begin{aligned}&(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+(\tilde{v}_3+\tilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+(\tilde{v}_5+\tilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x}+(\tilde{v}_7+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} \\ &+(\tilde{v}_1+\tilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y}+(\tilde{v}_2+\tilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y}+(\tilde{v}_5+\tilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y}+(\tilde{v}_6+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y} \\ &+(\tilde{v}_1+\tilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z}+(\tilde{v}_2+\tilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z}+(\tilde{v}_3+\tilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z}+(\tilde{v}_4+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(6.8)}}{\partial z} \\ &\quad= -\left(\frac{3\tilde{v}_1}{3\lambda+2\mu}+\frac{\tilde{v}_2}{\lambda_2}+\frac{\tilde{v}_3}{\lambda_3}+\frac{\tilde{v}_4}{\lambda_4}+\frac{\tilde{v}_5}{\lambda_5}+\frac{\tilde{v}_6}{\lambda_6}+\frac{\tilde{v}_7}{\lambda_7}+\frac{\tilde{v}_8}{\lambda_8}\right)p,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\tilde{v}_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$ – относительный объем блока i внутри ячейки. Выражения относительных объемов даются формулами (1.18) [3]. Равенство (2.5) совпадает с уравнением (1.17), если λ_1 заменить по формуле

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \tag{2.6}$$

Таким образом, упругий блок, окруженный со всех сторон жидкими блоками, может быть описан как жидкий блок при условии (2.6). Из равенства (2.5) следует уравнение закона Гука

$$
\begin{aligned}
-p = \tilde{\lambda}\Bigg[&(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+(\tilde{v}_3+\tilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}\\
&+(\tilde{v}_5+\tilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x}+(\tilde{v}_7+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x}\\
&+(\tilde{v}_1+\tilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y}+(\tilde{v}_2+\tilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y}\\
&+(\tilde{v}_5+\tilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y}+(\tilde{v}_6+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y}\\
&+(\tilde{v}_1+\tilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z}+(\tilde{v}_2+\tilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z}\\
&+(\tilde{v}_3+\tilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z}+(\tilde{v}_4+\tilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial z}\Bigg],
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где

$$\tilde{\lambda} = \left[\frac{3\tilde{v}_1}{3\lambda+2\mu}+\frac{\tilde{v}_2}{\lambda_2}+\frac{\tilde{v}_3}{\lambda_3}+\cdots+\frac{\tilde{v}_8}{\lambda_8}\right]^{-1}. \tag{2.8}$$

Количество уравнений, описывающих эффективную модель, полезно сократить с 13 до 4. С этой целью введем средние вдоль осей x, y, z смещения по формулам (1.21) [3]. Предполагая выполнение нулевых начальных условий волновым полем, запишем на основании уравнений (1.13) [3] соотношения (1.22) [3]. Из равенств (1.21) и (1.22) [3] следуют формулы (1.23) [3], позволяющие выразить смещения в блоках через средние смещения вдоль осей. Входящие в соотношения (1.23) эффективные плотности ρ_x, ρ_y, ρ_z выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
\rho_x &= \left(\frac{\tilde{v}_1+\tilde{v}_2}{\rho_{12}}+\frac{\tilde{v}_3+\tilde{v}_4}{\rho_{34}}+\frac{\tilde{v}_5+\tilde{v}_6}{\rho_{56}}+\frac{\tilde{v}_7+\tilde{v}_8}{\rho_{78}}\right)^{-1},\\
\rho_y &= \left(\frac{\tilde{v}_1+\tilde{v}_3}{\rho_{13}}+\frac{\tilde{v}_2+\tilde{v}_4}{\rho_{24}}+\frac{\tilde{v}_5+\tilde{v}_7}{\rho_{57}}+\frac{\tilde{v}_6+\tilde{v}_8}{\rho_{68}}\right)^{-1},\\
\rho_z &= \left(\frac{\tilde{v}_1+\tilde{v}_5}{\rho_{15}}+\frac{\tilde{v}_2+\tilde{v}_6}{\rho_{26}}+\frac{\tilde{v}_3+\tilde{v}_7}{\rho_{37}}+\frac{\tilde{v}_4+\tilde{v}_8}{\rho_{48}}\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

С использованием средних вдоль осей смещений и эффективных плотностей (2.9) уравнение эффективной модели представится четырьмя уравнениями

$$-p = \tilde{\lambda}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \tag{2.10}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_y \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

Эффективная модель является ортотропной жидкостью с тремя различными эффективными плотностями. Для давления в эффективной модели из уравнений (2.10) и (2.11) следует волновое уравнение

$$\frac{1}{\rho_x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_y}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_z}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{2.12}$$

§3. Скорости распространения волн в эффективных моделях

На основании полученных волновых уравнений (1.21) и (2.12), скорости распространения волн вдоль осей в плоской и трехмерной моделях выражаются соответственно соотношениями

$$v_x = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\rho_x}}, \quad v_z = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\rho_z}}; \tag{3.1}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\rho_x}}, \quad v_y = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\rho_y}}, \quad v_z = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\rho_z}}. \tag{3.2}$$

В трехмерном случае скорость волны вдоль оси x v_x может быть выражена равенством

$$\frac{1}{v_x^2} = \frac{\frac{3\tilde{v}_1}{3\lambda+2\mu} + \frac{\tilde{v}_2}{\rho_2 v_2^2} + \frac{\tilde{v}_3}{\rho_3 v_3^2} + \frac{\tilde{v}_4}{\rho_4 v_4^2}}{\frac{\tilde{v}_1+\tilde{v}_2}{\rho_{12}} + \frac{\tilde{v}_3+\tilde{v}_4}{\rho_{34}} + \frac{\tilde{v}_5+\tilde{v}_6}{\rho_{56}} + \frac{\tilde{v}_7+\tilde{v}_8}{\rho_{78}}}. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) аналогично соотношению

$$\frac{1}{\rho v^2} = \frac{\tilde{v}_1}{\rho_1 v_1^2} + \frac{\tilde{v}_2}{\rho_2 v_2^2} + \frac{\tilde{v}^3}{\rho_3 v_3^2} + \frac{\tilde{v}_4}{\rho_4 v_4^2}, \tag{3.4}$$

которое определяет скорость волны в смесях [7–9] и в котором использованы обозначения настоящей работы. Формула (3.4) не учитывает анизотропии, в то время как в настоящей работе и в статье [3] смеси могут быть анизотропными и подобные формулы для скоростей v_y и v_z записываются по аналогии. В статьях [8, 9] используется средняя плотность

$$\rho = \rho_1 \tilde{v}_1 + \rho_2 \tilde{v}_2 + \rho_3 \tilde{v}_3 + \rho_4 \tilde{v}_4. \tag{3.5}$$

Вместо этой величины следует использовать эффективную плотность, которая, согласно равенствам (2.9), получается при осреднении сперва плотностей, а затем при осреднении величин, обратных осредненным плотностям. Наконец, в случае твердых включений в жидкую среду формулы вида (3.3) сохраняются, но в этом случае скорости в твердых средах представятся соотношениями

$$v_1 = \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{3\rho_1}}, \tag{3.6}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho_1}}, \tag{3.7}$$

относящимися к трехмерному и плоскому случаям.

При исследованиях для простоты будем рассматривать случай, когда относительные размеры блоков удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_1 \tag{3.8}$$

и одинаковые жидкости заполняют все блоки, кроме первого,

$$\begin{gathered} v_2 = v_3 = v_4, \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4; \\ v_2 = v_3 = \cdots = v_8, \quad \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_8. \end{gathered} \tag{3.9}$$

При этих предположениях эффективные модели как в плоском, так и в трехмерном случаях оказываются изотропными жидкостями. Скорости распространения в плоском и трехмерном случаях выразятся соответственно равенствами

$$v = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\rho_{12}} + \frac{1-\varepsilon_1}{\rho_2}\right) \Big/ \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\lambda+\mu} + \frac{1-\varepsilon_1^2}{\rho_2 v_2^2}\right)}, \tag{3.10}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1^2}{\rho_{12}} + \frac{1-\varepsilon_1^2}{\rho_2}\right) \Big/ \left(\frac{3\varepsilon_1^3}{3\lambda+2\mu} + \frac{1-\varepsilon_1^3}{\rho_2 v_2^2}\right)}, \tag{3.11}$$

При $\varepsilon_1 = 0$ скорости распространения (3.10) и (3.11) переходят соответственно в равенства (3.7) и (3.6). При предположении $\varepsilon_1 = 1$ обе среды состоят из одних упругих блоков 1. В отличие от обычной упругой среды, в этих средах тангенциальные напряжения обращаются в нуль, а все нормальные напряжения равны между собой. Формулы (3.6) и (3.7) определяют скорости единственных объемных волн в таких средах.

При $\varepsilon_2 \ll 1$, когда упругие блоки занимают подавляющие части ячеек, скорости распространения выражаются соответственно равенствами

$$v = v_1\left[1 + \frac{\varepsilon_2\rho_1(v_2^2 - v_1^2)}{\rho_2 v_2^2} - \frac{\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}{2\rho_1\rho_2}\right], \tag{3.12}$$

$$v = v_1\left[1 + \frac{3\varepsilon_2\rho_1(v_2^2 - v_1^2)}{2\rho_2 v_2^2} - \frac{\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}{2\rho_1\rho_2}\right], \tag{3.13}$$

в которых учтены соотношения (3.6) и (3.7). Формулы (3.12) и (3.13) содержат две поправки, связанные с разностями скоростей и плотностей в жидкой и упругой средах. Первая поправка описывает увеличение или уменьшение скорости в зависимости от знака разности скоростей в жидкой и упругой средах. Вторая поправка определяет уменьшение скорости вследствие существования разности плотностей в упругой и жидкой средах.

При $\varepsilon_1 \ll 1$, когда упругий блок 1 занимает незначительную часть ячейки, скорости распространения выражаются соответственно равенствами

$$v = v_2\left[1 + \frac{\varepsilon_1^2\rho_2(v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\varepsilon_1^2(\rho_1 - \rho_2)^2}{2\rho_1\rho_2}\right], \tag{3.14}$$

$$v = v_2\left[1 + \frac{\varepsilon_1^3\rho_2(v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\varepsilon_1^3(\rho_1 - \rho_2)^2}{2\rho_1\rho_2}\right]. \tag{3.15}$$

Формулы (3.14) и (3.15) совпадают соответственно с соотношениями (4.17) и (3.24) [3]. На основании этого обстоятельства, а также сравнения формул (3.9) и (3.10) с (4.14) и (3.21) [3] приходим к выводу, что упругие и жидкие включения в жидкую среду могут описываться одинаковыми формулами с учетом равенств (3.6) и (3.7).

Литература

1. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003), с. 230–253.
2. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003), с. 254–271.
3. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных жидких средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), с. 124–146.
4. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency.* — J. Acoust. Soc. Am. **28**, No. 2 (1956), 168–178.
5. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
6. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* — Наука, СПб (2001).
7. M. W. Lee, O. R. Hutchinson, T. S. Collett, and W. P. Dillon, *Seismic velocities for hydrate-bearing sediments using weighted equation.* — J. Geoph. Res. **101**, No. B9 (1996), 20,347–20,358.
8. C. F. Pearson, J. Murphy, and R. Hermes, *Acoustic and resistivity measurments on rock samples containing tetrahydrofuran hydrates.* — J. Geoph. Res. **91** (1986), 14,132–14,138.
9. J. P. Castanga, M. L. Batle, and R. L. Eastwood, *Relationship between compressional-wave and shear-wave velocities in elastic silicate rocks.* — Geophysics, **50** (1985), 571–581.

Molotkov L. A. About propagation of seismic waves in block elastic-fluid media. III.

Propagation of seismic waves in block two- and three-dimensional media is investigated. These media consist of the same cells in which there are several fluid blocks and one elastic block. For these media the effective models are established. These effective models are anisotropic fluids. The formulas for the velocities of propagation in these fluids are derived and investigated. The particular investigation is fulfilled in the cases that the elastic block occupies almost the whole of the cell or that relative volume of the elastic block is very small.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 января 2004 г.