Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

Л. А. Молотков

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ ЖИДКИХ СРЕДАХ

Работа посвящена П. В. Крауклису в связи с его семидесятилетием

В настоящее время наблюдается большой интерес к распространению волн в трещиноватых и пористых средах, насыщенных жидкостью, в твердых средах с жидкими включениями, в жидких средах с упругими включениями и в средах, состоящих из несмешивающихся жидкостей. Для изучения волновых процессов в указанных средах используются эффективные модели. Такими моделями, в частности, являются пористые среды Био [1], эффективные модели слоистых сред [2, 3] и модели блочных сред [4–6].

Предлагаемая работа является продолжением цикла статей, посвященных исследованию волн в двумерных блочных упруго-жидких средах. В настоящей работе рассматриваются жидкие блочные среды. В отличие от указанного цикла строятся и исследуются трехмерные и двумерные блочные модели. При выводе трехмерных блочных моделей рассматриваются периодические вдоль трех осей среды, состоящие из ячеек с 8 жидкими блоками, и осреднение проводится в трех направлениях.

Эффективная модель блочной трехмерной или двухмерной жидкой среды является анизотропной жидкостью, в которой распространяется единственная объемная волна. Скорости этой волны выражаются формулами, которые исследуются в ряде частных случаев. В частности, рассматриваются случаи, когда в направлениях координатных осей чередуются два различных жидких блока или когда в жидкой среде существуют жидкие периодические включения, а все окружающие их блоки заполнены одинаковыми жидкостями. В обоих случаях среда состоит из

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), гранты No. 02-01-00260, 02-05-65081.

двух разных жидкостей и исследуется зависимость скорости распространения во всей среде от разности плотностей и разности скоростей распространения в двух различных блоках.

В связи с большим интересом к изучению распространения волн в различных смесях сред в последние годы появилось множество различных статей на эту тему. Обзор таких работ содержится в статье [7]. В большинстве этих статей [8, 9] скорости волн в смеси выражается правильно с точностью до коэффициентов через скорости распространения в смешиваемых средах. В то же время в указанных работах не учитывается возможная анизотропия и плотности осредняются по самому простому закону. В предлагаемой же работе обоснованно проводится более сложное осреднение плотностей, при этом осредняются как сами плотности, так и их обратные величины. О необходимости осреднения плотностей и их обратных величин указывалось еще в работе [2] при выводе эффективной модели периодической слоистой жидкой среды.

§1. Эффективная модель трехмерной блочной среды

Пусть задана трехмерная периодическая вдоль координатных осей жидкая система $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant y \leqslant \overline{H}$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, в которой в направлениях осей x, y и z расположены соответственно n, $\overline{n}$ и $\widetilde{n}$ периодов с длинами h, $\overline{h}$ и $\widetilde{h}$. Эта система разделяется на $n\overline{n}\widetilde{n}$ одинаковых ячеек в виде прямоугольных параллелепипедов. Размеры этих ячеек совпадают с длинами периодов h, $\overline{h}$ и $\widetilde{h}$. Каждая ячейка состоит из восьми однородных жидких блоков $1, 2, \ldots, 8$ (рис. 1). Размеры первого, второго, третьего, четвертого, пятого, шестого, седьмого и восьмого блоков выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h\varepsilon_1, \quad \overline{h}_1 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1,\\
&h_2 = h\varepsilon_2, \quad \overline{h}_1 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1,\\
&h_1 = h\varepsilon_1, \quad \overline{h}_2 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1,\\
&h_2 = h\varepsilon_2, \quad \overline{h}_2 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1,\\
&h_1 = h\varepsilon_1, \quad \overline{h}_1 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&h_2 = h\varepsilon_2, \quad \overline{h}_1 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h\varepsilon_1, \quad \overline{h}_2 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&h_2 = h\varepsilon_2, \quad \overline{h}_2 = \overline{h}\overline{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \quad \overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 = 1, \quad \widetilde{\varepsilon}_1 + \widetilde{\varepsilon}_2 = 1.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

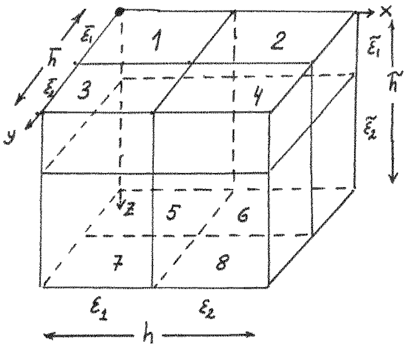

Рис. 1. Ячейка.

Жидкая среда i ($i = 1, 2, \ldots, 8$), заполняющая блок i, описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&-p_i = \lambda_i\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z}\right), \quad -\frac{\partial p_i}{\partial x} = \rho_i\frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p_i}{\partial y} = \rho_i\frac{\partial^2 u_{yi}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_i\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

в которых u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} – смещения, p_i – давление, ρ_i – плотность,

$$\lambda_i = \rho_i v_i^2 \tag{1.3}$$

и v_i – скорость распространения. На внутренних границах выполняются условия:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p_5, \quad p_2 = p_6, \quad p_3 = p_7, \quad p_4 = p_8,\\
&u_{z1} = u_{z5}, \quad u_{z2} = u_{z6}, \quad u_{z3} = u_{z7}, \quad u_{z4} = u_{z8}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

на плоскости $z = \text{const}$,

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p_2, \quad p_3 = p_4, \quad p_5 = p_6, \quad p_7 = p_8,\\
&u_{x1} = u_{x2}, \quad u_{x3} = u_{x4}, \quad u_{x5} = u_{x6}, \quad u_{x7} = u_{x8}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

при $x = \text{const}$ и

$$\begin{aligned} &p_1 = p_3, \quad p_2 = p_4, \quad p_5 = p_7, \quad p_6 = p_8, \\ &u_{y1} = u_{y3}, \quad u_{y2} = u_{y4}, \quad u_{y5} = u_{y7}, \quad u_{y6} = u_{y8} \end{aligned} \tag{1.6}$$

при $y = \text{const}$.

На внешних границах системы выполняются некоторые линейные краевые условия, но конкретный вид этих условий оказывается несущественным для нашей задачи. Также несущественными являются характер и расположение линейных источников, возбуждающих систему.

Для заданной системы ячеек и блоков построим эффективную модель. С этой целью в волновом поле этой системы совершим предельный переход при условиях

$$\begin{aligned} &n \to \infty,\ \overline{n} \to \infty,\ \ \widetilde{n} \to \infty,\ h_1 \to 0,\ h_2 \to 0,\ \overline{h}_1 \to 0,\ \overline{h}_2 \to 0, \\ &\widetilde{h}_1 \to 0,\ \widetilde{h}_2 \to 0,\ H = \text{const},\ \overline{H} = \text{const},\ \widetilde{H} = \text{const}, \\ &\varepsilon_1 = \text{const},\ \varepsilon_2 = \text{const},\ \overline{\varepsilon}_1 = \text{const},\ \overline{\varepsilon}_2 = \text{const},\ \widetilde{\varepsilon}_1 = \text{const},\ \widetilde{\varepsilon}_2 = \text{const} \end{aligned} \tag{1.7}$$

и построим уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле. Эти уравнения описывают эффективную модель заданной блочной структуры. При осуществлении предельного перехода каждая ячейка сжимается в точку, а волновое поле в ячейке средняется. Это осреднение проводится методом матричного осреднения [2, 3]. Согласно этому методу, после осреднения граничные условия (1.4)–(1.6) выполняются во всей области и давление во всех блоках одной ячейки оказывается одинаковым и равны p. Также одинаковыми окажутся смещения в некоторых соседних блоках

$$\begin{aligned} &u_{x1} = u_{x2} = u_x^{(1.2)}, \qquad u_{x3} = u_{x4} = u_x^{(3.4)}, \\ &u_{x5} = u_{x6} = u_x^{(5.6)}, \qquad u_{x7} = u_{x8} = u_x^{(7.8)}, \\ &u_{y1} = u_{y3} = u_y^{(1.3)}, \qquad u_{y2} = u_{y4} = u_y^{(2.4)}, \\ &u_{y5} = u_{y7} = u_y^{(5.7)}, \qquad u_{y6} = u_{y8} = u_y^{(6.8)}, \\ &u_{z1} = u_{z5} = u_z^{(1.5)}, \qquad u_{z2} = u_{z6} = u_z^{(2.6)}, \\ &u_{z3} = u_{z7} = u_z^{(3.7)}, \qquad u_{z4} = u_{z8} = u_z^{(4.8)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Производные давления p и смещений (1.8) по координатам осредняются по формулам

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p_1}{\partial x}\varepsilon_1+\frac{\partial p_2}{\partial x}\varepsilon_2=\frac{\partial p_3}{\partial x}\varepsilon_1+\frac{\partial p_4}{\partial x}\varepsilon_2=\\
&=\frac{\partial p_5}{\partial x}\varepsilon_1+\frac{\partial p_6}{\partial x}\varepsilon_2=\frac{\partial p_7}{\partial x}\varepsilon_1+\frac{\partial p_8}{\partial x}\varepsilon_2,\\
&\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p_1}{\partial y}\overline{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_3}{\partial y}\overline{\varepsilon}_2=\frac{\partial p_2}{\partial y}\overline{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_4}{\partial y}\overline{\varepsilon}_2=\\
&=\frac{\partial p_5}{\partial y}\overline{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_7}{\partial y}\overline{\varepsilon}_2=\frac{\partial p_6}{\partial y}\overline{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_8}{\partial y}\overline{\varepsilon}_2,\\
&\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial p_1}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_5}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_2=\frac{\partial p_2}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_6}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_2=\\
&=\frac{\partial p_3}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_7}{\partial x}\widetilde{\varepsilon}_2=\frac{\partial p_4}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_1+\frac{\partial p_8}{\partial z}\widetilde{\varepsilon}_2;
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}=\varepsilon_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}=\varepsilon_1\frac{\partial u_{x3}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial u_{x4}}{\partial x},\\
&\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x}=\varepsilon_1\frac{\partial u_{x5}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial u_{x6}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x}=\varepsilon_1\frac{\partial u_{x7}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial u_{x8}}{\partial x};
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y}=\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{y1}}{\partial y}+\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{y3}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y}=\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{y2}}{\partial y}+\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{y4}}{\partial y},\\
&\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y}=\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{y5}}{\partial y}+\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{y7}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y}=\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{y6}}{\partial y}+\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{y8}}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z1}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z5}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z2}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z6}}{\partial z},\\
&\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z3}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z7}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z4}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z8}}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Осреднение по формулам (1.9) проводится независимо по всем трем координатам с использованием второго, третьего и четвертого уравнений (1.2). В результате приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{34}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{56}\frac{\partial^2 u_x^{(5.6)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{78}\frac{\partial^2 u_x^{(7.8)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{13}\frac{\partial^2 u_y^{(1.3)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{24}\frac{\partial^2 u_y^{(2.4)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{57}\frac{\partial^2 u_y^{(5.7)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_{68}\frac{\partial^2 u_y^{(6.8)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{15}\frac{\partial^2 u_z^{(1.5)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{26}\frac{\partial^2 u_z^{(2.6)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{37}\frac{\partial^2 u_z^{(3.7)}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{48}\frac{\partial^2 u_z^{(4.8)}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

в которых использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
&\rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2,\\
&\rho_{56} = \rho_5\varepsilon_1 + \rho_6\varepsilon_2, \quad \rho_{78} = \rho_7\varepsilon_1 + \rho_8\varepsilon_2,\\
&\rho_{13} = \rho_1\overline{\varepsilon}_1 + \rho_3\overline{\varepsilon}_2, \quad \rho_{24} = \rho_2\overline{\varepsilon}_1 + \rho_4\overline{\varepsilon}_2,\\
&\rho_{57} = \rho_5\overline{\varepsilon}_1 + \rho_7\overline{\varepsilon}_2, \quad \rho_{68} = \rho_6\overline{\varepsilon}_1 + \rho_8\overline{\varepsilon}_2,\\
&\rho_{15} = \rho_1\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_5\widetilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{26} = \rho_2\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_6\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&\rho_{37} = \rho_3\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_7\widetilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{48} = \rho_4\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_8\widetilde{\varepsilon}_2.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Соотношения (1.13) являются уравнениями сплошной среды для эффективной модели. Чтобы вывести соответствующее уравнение закона Гука, необходимо произвести осреднение по трем координатам с использованием первого равенства (1.2) и формул (10.10)–(10.12). Это осреднение выполняется сперва вдоль оси x, затем по оси y и в конце вдоль оси z. После осреднения по оси

x приходим к четырем уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} &= -\varepsilon_1\frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \varepsilon_1\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{y2}}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} - \Big(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}+\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}\Big)p,\\
\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} &= -\varepsilon_1\frac{\partial u_{y3}}{\partial y} - \varepsilon_1\frac{\partial u_{z3}}{\partial z} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{y4}}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{z4}}{\partial z} - \Big(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_3}+\frac{\varepsilon_2}{\lambda_4}\Big)p,\\
\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x} &= -\varepsilon_1\frac{\partial u_{y5}}{\partial y} - \varepsilon_1\frac{\partial u_{z5}}{\partial z} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{y6}}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{z6}}{\partial z} - \Big(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_5}+\frac{\varepsilon_2}{\lambda_6}\Big)p,\\
\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} &= -\varepsilon_1\frac{\partial u_{y7}}{\partial y} - \varepsilon_1\frac{\partial u_{z7}}{\partial z} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{y8}}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial u_{z8}}{\partial z} - \Big(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_7}+\frac{\varepsilon_2}{\lambda_8}\Big)p.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

После осреднения вдоль оси y получим два уравнения

$$\begin{aligned}
&\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + \overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y} + \varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y} =\\
&= -\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} - \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} - \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z3}}{\partial z} - \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z4}}{\partial z} -\\
&-\Big(\frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1}{\lambda_1}+\frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1}{\lambda_2}+\frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2}{\lambda_3}+\frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2}{\lambda_4}\Big)p,\\
&\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x} + \overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y} + \varepsilon_2\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y} =\\
&= -\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z5}}{\partial z} - \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1\frac{\partial u_{z6}}{\partial z} - \varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z7}}{\partial z} - \varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2\frac{\partial u_{z8}}{\partial z} -\\
&-\Big(\frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1}{\lambda_5}+\frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_1}{\lambda_6}+\frac{\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_2}{\lambda_7}+\frac{\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2}{\lambda_8}\Big)p.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

В результате осреднения по оси z приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} +\\
&(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y} =\\
&= (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial z} =\\
&= -\Big(\frac{\widetilde{v}_1}{\lambda_1}+\frac{\widetilde{v}_2}{\lambda_2}+\frac{\widetilde{v}_3}{\lambda_3}+\frac{\widetilde{v}_4}{\lambda_4}+\frac{\widetilde{v}_5}{\lambda_5}+\frac{\widetilde{v}_6}{\lambda_6}+\frac{\widetilde{v}_7}{\lambda_7}+\frac{\widetilde{v}_8}{\lambda_8}\Big)p,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где $v_i\,(i = 1, 2, \ldots, 8)$ – относительный объем блока с номером i

внутри ячейки и

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{v}_1 = \varepsilon_1 \overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{v}_2 = \varepsilon_2 \overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{v}_3 = \varepsilon_1 \overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_1, \quad \widetilde{v}_4 = \varepsilon_2 \overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_1, \\
&\widetilde{v}_5 = \varepsilon_1 \overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{v}_6 = \varepsilon_2 \overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{v}_7 = \varepsilon_1 \overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_2, \quad \widetilde{v}_8 = \varepsilon_2 \overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_2, \\
&\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2 + \widetilde{v}_3 + \widetilde{v}_4 + \widetilde{v}_5 + \widetilde{v}_6 + \widetilde{v}_7 + \widetilde{v}_8 = 1.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Из уравнения (1.17) и формулы (1.18) следует, что результат трехкратного осреднения не зависит от порядка осреднений. Соотношение (1.17) полезно представить равенством

$$
\begin{aligned}
-p = \lambda\Big[&(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x} + \\
&+ (\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y} + \\
&+ (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z} + \\
&+ (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial z}\Big],
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

где

$$
\lambda = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{8} \frac{\widetilde{v}_i}{\lambda_i}. \tag{1.20}
$$

Уравнение (1.19) является уравнением закона Гука для эффективной модели и совместно с уравнениями (1.13) описывает эффективную модель. Волновое поле в эффективной модели характеризуется 12 смещениями $u_x^{(1.2)}$, $u_x^{(3.4)}$, $u_x^{(5.6)}$, $u_x^{(7.8)}$, $u_y^{(1.3)}$, $u_y^{(2.4)}$, $u_y^{(5.6)}$, $u_y^{(6.8)}$, $u_z^{(1.5)}$, $u_z^{(2.6)}$, $u_z^{(3.7)}$, $u_z^{(3.8)}$ и давлением p, и для определения их величин выведено 13 уравнений (1.13) и (1.19).

Преобразуем теперь полученные уравнения (1.13) и (1.19) и сократим количество уравнений с 13 до 4. С этой целью введем средние смещения вдоль осей x, y, z по формулам

$$\begin{aligned}
u_x &= (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)u_x^{(1.2)}+(\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)u_x^{(3.4)}+\\
&+(\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)u_x^{(5.6)}+(\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)u_x^{(7.8)},\\
u_y &= (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)u_y^{(1.3)}+(\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)u_y^{(2.4)}+\\
&+(\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)u_y^{(5.7)}+(\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)u_y^{(6.8)},\\
u_z &= (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)u_z^{(1.5)}+(\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)u_z^{(2.6)}+\\
&+(\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)u_z^{(3.7)}+(\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)u_z^{(4.8)}
\end{aligned}\tag{1.21}$$

и, предполагая выполнение нулевых начальных условий волновым полем, запишем на основании уравнений (1.13) соотношения

$$\begin{aligned}
&\rho_{12}u_x^{(1.2)}=\rho_{34}u_x^{(3.4)}=\rho_{56}u_x^{(5.6)}=\rho_{78}u_x^{(7.8)},\\
&\rho_{13}u_y^{(1.3)}=\rho_{24}u_y^{(2.4)}=\rho_{57}u_y^{(5.7)}=\rho_{68}u_y^{(6.8)},\\
&\rho_{15}u_z^{(1.5)}=\rho_{26}u_z^{(2.6)}=\rho_{37}u_z^{(3.7)}=\rho_{48}u_z^{(4.8)}.
\end{aligned}\tag{1.22}$$

Из равенств (1.21) и (1.22) следуют формулы

$$\begin{aligned}
&u_x^{(1.2)}=\frac{\rho_x u_x}{\rho_{12}},\quad u_x^{(3.4)}=\frac{\rho_x u_x}{\rho_{34}},\\
&u_x^{(5.6)}=\frac{\rho_x u_x}{\rho_{56}},\quad u_x^{(7.8)}=\frac{\rho_x u_x}{\rho_{78}},\\
&u_y^{(1.3)}=\frac{\rho_x u_y}{\rho_{13}},\quad u_y^{(2.4)}=\frac{\rho_y u_y}{\rho_{24}},\\
&u_y^{(5.7)}=\frac{\rho_y u_y}{\rho_{57}},\quad u_y^{(6.8)}=\frac{\rho_y u_y}{\rho_{68}},\\
&u_z^{(1.5)}=\frac{\rho_z u_z}{\rho_{15}},\quad u_z^{(2.6)}=\frac{\rho_z u_z}{\rho_{26}},\\
&u_z^{(3.7)}=\frac{\rho_z u_z}{\rho_{37}},\quad u_z^{(4.8)}=\frac{\rho_z u_z}{\rho_{48}},
\end{aligned}\tag{1.23}$$

в которых

$$\begin{aligned}
\rho_x &= \left(\frac{\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2}{\rho_{12}}+\frac{\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4}{\rho_{34}}+\frac{\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6}{\rho_{56}}+\frac{\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8}{\rho_{78}}\right)^{-1},\\
\rho_y &= \left(\frac{\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3}{\rho_{13}}+\frac{\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4}{\rho_{24}}+\frac{\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7}{\rho_{57}}+\frac{\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8}{\rho_{68}}\right)^{-1},\\
\rho_z &= \left(\frac{\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5}{\rho_{15}}+\frac{\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6}{\rho_{26}}+\frac{\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7}{\rho_{37}}+\frac{\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8}{\rho_{48}}\right)^{-1}.
\end{aligned}\tag{1.24}$$

Используя средние вдоль осей смещения (1.21), представим закон Гука (1.19) уравнением

$$-p = \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \qquad (1.25)$$

Двенадцать уравнений сплошной среды (1.13) могут быть заменены тремя уравнениями

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho_y \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \qquad (1.26)$$

Таким образом, эффективная модель описывается четырьмя уравнениями (1.25) и (1.26) относительно давления p и трех средних смещений u_x, u_y и u_z. Смещение в блоках выражаются формулами (1.23) через средние смещения вдоль координатных осей. Эффективная модель является ортотропной жидкостью с тремя различными эффективными плотностями вдоль координатных осей (1.24).

§2. Энергетические исследования

Построим выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий в волновом поле рассматриваемой эффективной модели. В этой целью помножим первое, второе и третье уравнения (1.26) соответственно на $\partial u_x/\partial t$, $\partial u_y/\partial t$, $\partial u_z/\partial t$ и сложим почленно полученные уравнения. После элементарных преобразований придем к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}, \qquad (2.1)$$

где

$$p_x = -p\frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad p_y = -p\frac{\partial u_y}{\partial t}, \quad p_z = -p\frac{\partial u_z}{\partial t} \qquad (2.2)$$

– потоки энергий вдоль осей x, y и z,

$$W_k = \frac{1}{2}\left[\rho_x\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2 + \rho_y\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2 + \rho_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] \qquad (2.3)$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = -p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \qquad (2.4)$$

– скорость изменения плотности потенциальной энергии. После подстановки в соотношение (2.4) уравнения (1.25) получим формулу

$$W_p = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 \tag{2.5}$$

для плотности потенциальной энергии.

Соотношения (2.3) и (2.5), определяющие плотности кинетической и потенциальной энергий, могут быть выведены без использования уравнений (1.25) и (1.26). Плотность кинетической энергии волнового поля в блоке i представляется очевидной формулой

$$W_{ki} = \frac{\rho_i}{2}\left[\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{yi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{2.6}$$

Плотность кинетической энергии в одной ячейке выражается соотношением

$$W_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i\widetilde{v}_i\left[\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{yi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{2.7}$$

Если предположить равенство смещений в некоторых соседних блоках и ввести средние плотности массы в смежных блоках, то соотношение (2.7) заменится формулой

$$\begin{aligned}
W_k = \frac{1}{2}\Bigg[&(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)\rho_{12}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)\rho_{34}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\
&+ (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)\rho_{56}\left(\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)\rho_{78}\left(\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial t}\right)^2 + \\
&+ (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)\rho_{13}\left(\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)\rho_{24}\left(\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\
&+ (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)\rho_{57}\left(\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)\rho_{68}\left(\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial t}\right)^2 + \\
&+ (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)\rho_{15}\left(\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)\rho_{26}\left(\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial t}\right)^2 + \\
&+ (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)\rho_{37}\left(\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial t}\right)^2 + (\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)\rho_{48}\left(\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial t}\right)^2\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

На основании равенства давлений во всех блоках одной ячейки предположим, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\rho_{12}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}=\rho_{34}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}=\rho_{56}\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial t}=\rho_{78}\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial t},\\
&\rho_{13}\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial t}=\rho_{24}\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial t}=\rho_{57}\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial t}=\rho_{68}\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial t},\\
&\rho_{15}\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial t}=\rho_{26}\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial t}=\rho_{37}\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial t}=\rho_{48}\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial t}.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Кроме того, для средних скоростей смещений запишем формулы

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}=(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}+\\
&+(\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial t},\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t}=(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial t}+\\
&+(\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial t},\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}=(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial t}+\\
&+(\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial t}+(\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial t}.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Равенства (2.9) и (2.10) отличаются от соотношений (1.22) и (1.21) только операцией дифференцирования. С учетом соотношений (2.9) и (2.10) формула (2.8) заменяется равенством

$$W_k=\frac{1}{2}\left[\rho_{12}\frac{\partial u_x}{\partial t}\,\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}+\rho_{13}\frac{\partial u_y}{\partial t}\,\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial t}+\rho_{15}\frac{\partial u_z}{\partial t}\,\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial t}\right].\tag{2.11}$$

Из формул (2.9) и (2.10), а также из определения величин ρ_x, ρ_y и ρ_z (1.24) следуют соотношения

$$\rho_{12}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}=\rho_x\frac{\partial u_x}{\partial t},\quad \rho_{13}\frac{\partial u_y}{\partial t}=\rho_y\frac{\partial u_y}{\partial t},\quad \rho_{15}\frac{\partial u_z}{\partial t}=\rho_z\frac{\partial u_z}{\partial t}.\tag{2.12}$$

С учетом равенств (2.12) формула (2.11) переходит в (2.3).

Плотность потенциальной энергии волнового воля в блоке i представляется соотношением

$$W_{pi} = -\frac{p_i}{2}\Big(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z}\Big). \tag{2.13}$$

Средняя плотность потенциальной энергии в одной ячейке с учетом одинакового давления во всех ее блоках выражается формулой

$$W_p = -\frac{p}{2}\sum_{i=1}^{8}\widetilde{v}_i\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z}\right). \tag{2.14}$$

При использовании первого уравнения жидкой среды (1.2) соотношение (2.14) заменяется на равенство

$$W_p = \frac{p^2}{2}\sum_{i=1}^{8}\frac{\widetilde{v}_i}{\lambda_i} = \frac{p^2}{2\lambda}. \tag{2.15}$$

С другой стороны, после осреднения производных смещений по формулам (1.10)–(1.12) в равенстве (2.14) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} W_p = -\frac{p}{2}\bigg[&(\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_2)\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x} + \\ &+ (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_x^{(5.6)}}{\partial x} + (\widetilde{v}_7+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_x^{(7.8)}}{\partial x} + \\ &+ (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_3)\frac{\partial u_y^{(1.3)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_4)\frac{\partial u_y^{(2.4)}}{\partial y} + \\ &+ (\widetilde{v}_5+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_y^{(5.7)}}{\partial y} + (\widetilde{v}_6+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_y^{(6.8)}}{\partial y} + \\ &+ (\widetilde{v}_1+\widetilde{v}_5)\frac{\partial u_z^{(1.5)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_2+\widetilde{v}_6)\frac{\partial u_z^{(2.6)}}{\partial z} + \\ &+ (\widetilde{v}_3+\widetilde{v}_7)\frac{\partial u_z^{(3.7)}}{\partial z} + (\widetilde{v}_4+\widetilde{v}_8)\frac{\partial u_z^{(4.8)}}{\partial z}\bigg]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Используя определение средних смещений (1.21), заменим формулу (2.16) равенством

$$W_p = -\frac{p}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \tag{2.17}$$

Сравнение соотношений (2.15) и (2.17) приводит к уравнению закона Гука (1.25).

§3. Исследование скоростей волн в трехмерной эффективной модели

Преобразуем полученные уравнения эффективной модели (1.25) и (1.26). С этой целью продифференцируем уравнение (1.25) дважды по времени и подставим в него равенства (1.26). В результате для давления получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda\left(\frac{1}{\rho_x}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_y}\,\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_z}\,\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \tag{3.1}$$

описывающее ортотропную жидкость. В такой среде от точечного источника распространяется волна с эллипсоидным фронтом, скорости которого вдоль осей определяются равенствами

$$v_x = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_x}}, \quad v_y = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_y}}, \quad v_z = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_z}}. \tag{3.2}$$

Входящие в соотношения (3.2) величины λ, ρ_x, ρ_y и ρ_z выражаются формулами (1.20) и (1.24). Будем исследовать скорости распространения (3.2) в ряде частных случаев.

1. Пусть во всех блоках плотности оказываются одинаковыми и

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_8. \tag{3.3}$$

После ряда преобразований с использованием соотношений (1.20), (1.24), (3.2) и (3.3) приходим к выводу, что эффективная модель является изотропной жидкостью со скоростью

$$v_x = v_y = v_z = \left(\frac{\widetilde{v}_1}{v_1^2} + \frac{\widetilde{v}_2}{v_2^2} + \frac{\widetilde{v}_3}{v_3^2} + \cdots + \frac{\widetilde{v}_8}{v_8^2}\right)^{-0.5}. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) при условии (3.3) определяет закон осреднения скоростей.

2. Пусть во всех блоках скорости распространения оказываются одинаковыми и

$$v_1 = v_2 = v_3 = \cdots = v_8. \tag{3.5}$$

В этом случае эффективная модель является ортотропной жидкостью и для краткости проведем преобразования только для скорости v_x, которая представится равенством

$$v_x = v_1 \sqrt{\frac{\dfrac{\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2}{\rho_{12}} + \dfrac{\widetilde{v}_3 + \widetilde{v}_4}{\rho_{34}} + \dfrac{\widetilde{v}_5 + \widetilde{v}_6}{\rho_{56}} + \dfrac{\widetilde{v}_7 + \widetilde{v}_8}{\rho_{78}}}{\dfrac{\widetilde{v}_1}{\rho_1} + \dfrac{\widetilde{v}_2}{\rho_2} + \cdots + \dfrac{\widetilde{v}_8}{\rho_8}}}. \tag{3.6}$$

Используя формулы типа

$$\frac{\widetilde{v}_1}{\rho_1} + \frac{\widetilde{v}_2}{\rho_2} - \frac{\widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2}{\rho_{12}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_1}{\rho_1 \rho_2 \rho_{12}} (\rho_1 - \rho_2)^2, \tag{3.7}$$

заменим равенство (3.6) соотношением

$$v_x = \tag{3.8}$$

$$v_1 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\frac{\overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_1 (\rho_1 - \rho_2)^2)}{\rho_1 \rho_2 \rho_{12}} + \frac{\overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_1 (\rho_3 - \rho_4)^2)}{\rho_3 \rho_4 \rho_{34}} + \frac{\overline{\varepsilon}_1 \widetilde{\varepsilon}_2 (\rho_5 - \rho_6)^2)}{\rho_5 \rho_6 \rho_{56}} + \frac{\overline{\varepsilon}_2 \widetilde{\varepsilon}_2 (\rho_7 - \rho_8)^2)}{\rho_7 \rho_8 \rho_{78}} \right]}{\dfrac{\widetilde{v}_1}{\rho_1} + \dfrac{\widetilde{v}_2}{\rho_2} + \cdots + \dfrac{\widetilde{v}_8}{\rho_8}}}.$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны также и для скоростей v_y и v_z. Формула (3.8) и ей подобные равенства показывают, что в смеси жидкостей с одинаковыми скоростями, но с разными плотностями скорость распространения всегда меньше чем скорость в смешиваемых жидкостях.

3. Рассмотрим среду (с чередующимися блоками), в которой блоки 1, 4, 6 и 7 заполнены жидкостью 1, а блоки 2, 3, 5 и 8 – жидкостью 2. Также предположим, что относитетельные размеры блоков вдоль трех осей одинаковые. Эти предположения выразятся соотношениями

$$\begin{aligned} &v_1 = v_4 = v_6 = v_7, \qquad \rho_1 = \rho_4 = \rho_6 = \rho_7, \\ &v_2 = v_3 = v_5 = v_8, \qquad \rho_2 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_8; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1 = \widetilde{\varepsilon}_1. \tag{3.10}$$

Эффективная модель этой среды является изотропной жидкостью, в которой скорость распространения представляется формулой

$$v = \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\rho_{12}} + \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\rho_{34}} \right] \Big/ \left[\frac{\varepsilon_1^3 + 3\varepsilon_1 \varepsilon_2^2}{\rho_1 v_1^2} + \frac{3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^3}{\rho_2 v_2^2} \right]}. \tag{3.11}$$

После ряда тождественных преобразований с учетом формул (1.14) равенство (3.11) заменится соотношением

$$v = v_1 v_2 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_{12}\rho_{34}} \cdot \frac{\rho_1 \overline{v}_2 + \rho_2 \overline{v}_1}{\rho_1 v_1^2 \overline{v}_2 + \rho_2 v_2^2 \overline{v}_1}}, \tag{3.12}$$

в котором относительные объемы $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ первой и второй жидкости в ячейке представляются формулами

$$\overline{v}_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2), \quad \overline{v}_2 = \varepsilon_2(3\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \tag{3.13}$$

Из соотношения (3.12) следует, что скорость в модели зависит от относительных размеров блоков и от отношений между скоростями и плотностями в жидкостях 1 и 2.

Рассмотрим частные случаи формулы (3.12). Если скорости в обеих жидкостях одинаковые, то согласно равенствам (3.8) и (3.12), скорость в эффективной модели представляется соотношениями

$$v = v_1 \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_{12}\rho_{34}}} = v_1 \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2)}} =$$

$$= v_1 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1\rho_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2}}. \tag{3.14}$$

Формулы (3.14) показывают, что в смеси жидкостей с одинаковыми скоростями, но с разными плотностями скорость всегда меньше чем скорость в смешиваемых жидкостях. Если плотности в обеих жидкостях одинаковые ($\rho_1 = \rho_2$), а скорости разные ($v_1 \neq v_2$), то

$$v = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 \overline{v}_2 + v_2^2 \overline{v}_1}}. \tag{3.15}$$

Равенство (3.15) определяет закон осреднения скоростей в блочной среде в случае одинаковых плотностей жидкостей. Осредненная скорость лежит между скоростями v_1 и v_2. При условии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, когда относительные объемы жидкостей 1 и 2 одинаковые, скорость в эффективной модели выражается формулой

$$v = 2 v_1 v_2 \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2)}}. \tag{3.16}$$

Если в этом случае плотности жидких сред одинаковые ($\rho_1 = \rho_2$), то равенство (3.16) переходит в соотношение

$$v = v_1 v_2 \sqrt{\frac{2}{v_1^2 + v_2^2}}. \tag{3.17}$$

Из формулы (3.11) следует, что в общем случае при $\varepsilon_1 = 1$ ($\varepsilon_2 = 0, \overline{v}_2 = 0$) $v = v_1$, а при $\varepsilon_1 = 0$ ($\varepsilon_2 = 1, \overline{v}_1 = 0$) $v = v_2$.

Рассмотрим теперь область, где $\overline{v}_1 \ll 1$ и $\varepsilon_1 \ll 1$. В ней на основании (3.13) выполняются приближенные равенства

$$\overline{v}_1 = 3\varepsilon_1, \quad \overline{v}_2 = 1 - 3\varepsilon_1, \tag{3.18}$$

а соотношение (3.11) заменяется формулами

$$v = v_2 \left[1 + \frac{3\varepsilon_1 \rho_2 (v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\varepsilon_1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)^2\right],$$

$$v = v_2 \left[1 + \frac{\widetilde{v}_1 \rho_2 (v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\overline{v}_1}{6\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)^2\right]. \tag{3.19}$$

Из формул (3.19) следует, что в случае отсутствия среды 1, когда $\varepsilon_1 = 0$, выполняется равенство $v = v_2$, а при $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\overline{v}_1 \ll 1$ к указанному значению добавляются две поправки. Первая поправка описывает или увеличение скорости при $v_1 > v_2$, или уменьшение скорости при $v_1 < v_2$. Вторая поправка определяется квадратом разности плотностей и всегда является отрицательной.

4. Рассмотрим среду, в которой жидкость 1 расположена в блоке 1, а жидкость 2 заполняет все остальные семь блоков в ячейках. Так как блоки 1 окружены со всех сторон жидкостью 2, то среду можно рассматривать как среду с периодическими включениями в виде жидкости 1 в жидкость 2. В этой среде выполняются равенства

$$\rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_8, \quad v_2 = v_3 = \dots = v_8. \tag{3.20}$$

Кроме того, предполагается, что справедливы соотношения (3.10). При этих предположениях эффективная модель является изотропной жидкостью. Скорость распространения в ней представляется равенством

$$v = \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_1^2}{\rho_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_1^2}{\rho_2}\right] \Big/ \left[\frac{\varepsilon_1^3}{\rho_1 v_1^2} + \frac{1 - \varepsilon_1^3}{\rho_2 v_2^2}\right]}. \tag{3.21}$$

В случае одинаковых плотностей жидкостей ($\rho_1 = \rho_2$) формула (3.21) заменяется соотношением

$$v = \frac{v_2}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^3 (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2}}. \tag{3.22}$$

Из равенства (3.21) следует, что в случае одинаковых плотностей существование включений, в которых скорость v_1 больше скорости в окружающей среде v_2, приводит к увеличнению скорости распространения в модели и, наоборот, $v < v_1$ при $v_1 < v_2$. Если в средах скорости одинаковые ($v_1 = v_2$), то, на основании соотношения (3.21), приходим к равенству

$$v = v_2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1^3 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_{12}[\rho_1(1-\varepsilon_1^3) + \rho_2 \varepsilon_1^3]}}, \tag{3.23}$$

которое, как и формулы (3,8) и (3.14), показывает, что скорость распространения в смеси жидкостей с одинаковыми скоростями распространения меньше чем скорость в каждой смешиваемой жидкости.

Рассмотрим теперь случай, когда относительный объем жидкости 1 $\widetilde{v}_1 = \varepsilon_1^3$ является очень малым и $\varepsilon_1 \ll 1$, $\widetilde{v}_1 \ll 1$. В этом случае, на основании формулы (3.21), после ряда преобразований приходим к приближенным соотношениями

$$\begin{aligned} v &= v_2 \left[1 + \frac{\varepsilon_1^3 \rho_2 (v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\varepsilon_1^3 (\rho_1 - \rho_2)^2}{2\rho_1 \rho_2} \right], \\ v &= v_2 \left[1 + \frac{\widetilde{v}_1 \rho_2 (v_1^2 - v_2^2)}{2\rho_1 v_1^2} - \frac{\widetilde{v}_1 (\rho_1 - \rho_2)^2}{2\rho_1 \rho_2} \right], \end{aligned} \tag{3.24}$$

которые, как и равенства (3.19), содержат две поправки к скорости в окружающей жидкости 2. Согласно вторым формулам (3.19) и (3.24), первые поправки полностью совпадают. Эти поправки описывают увеличение или уменьшение скорости распространения в зависимости от выполнения неравенств $v_1 > v_2$ или $v_2 > v_1$. Вторые поправки в равенствах (3.19) и (3.24) отличаются только коэффициентами. В обоих случаях вторые поправки определяют уменьшение скорости распространения волны и это уменьшение пропорционально квадрату разности плотностей жидкости. В случае чередующихся жидких блоков эта поправка оказывается в три раза больше, чем в случае периодических жидких включений.

В заключение сравним полученные выражения для скоростей в смеси с соответствующими скоростями работ [8, 9]. Если использовать обозначения, используемые в настоящей работе, то указанные скорости [8, 9] выразятся в виде равенства

$$\frac{1}{\rho v^2} = \frac{\widetilde{v}_1}{\rho_1 v_1^2} + \frac{\widetilde{v}_2}{\rho_2 v_2^2} + \frac{\widetilde{v}_3}{\rho_3 v_3^2} + \frac{\widetilde{v}_4}{\rho_4 v_4^2}, \tag{3.25}$$

где

$$\rho = \rho_1 \widetilde{v}_1 + \rho_2 \widetilde{v}_2 + \rho_3 \widetilde{v}_3 + \rho_4 \widetilde{v}_4. \tag{3.26}$$

Как показывают формулы (1.3), (1.20), (1.24) и (3.2), соотношение (3.25) с точностью до множителя ρ правильно определяет скорость распространения. Однако среднюю плотность ρ следует заменить на одну из эффективных плотностей ρ_x, ρ_y и ρ_z в зависимости от выбора координатной оси. Таким образом, подход [8, 9] не учитывает возможной анизотропии. Эффективные плотности ρ_x, ρ_y и ρ_z выражаются соотношениями (1.24), и как показывают эти соотношения, при вычислении этих величин проводятся осреднения как самих плотностей, так и их обратных величин. Только в случае одинаковых плотностей во всех смешиваемых средах скорости волн в смести могут быть выражены равенствами (3.25) и (3.26). Во всех остальных случаях, вследствие разных плотностей смешиваемых сред, скорость в смеси окажется меньше скорости, определенной формулой (3.25).

§4. Эффективная модель двумерной блочной среды

Для сравнения рассмотрим двумерную жидкую блочную систему $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, в которой в направлениях осей x и z расположены соответственно n и $\widetilde{n}$ периодов с длинами h и $\widetilde{h}$ (рис. 1, [2]). Система разделяется на $n\widetilde{n}$ одинаковых прямоугольных ячеек (рис. 2). Каждая ячейка состоит из 4 блоков $1, 2, 3, 4$. Размеры первого, второго, третьего и четвертого блоков выражаются равенствами

$$\begin{aligned} h_1 &= h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1, \\ h_2 &= h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1, \\ h_1 &= h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2, \\ h_2 &= h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

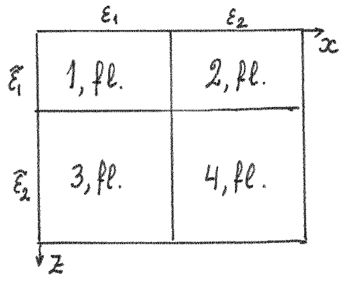

Рис. 2.

Все блоки заполнены жидкостями, которые в общем случае являются разными.

Жидкие среды характеризуются плотностями ρ_i, скоростями распространения v_i, параметрами $\lambda_i = \rho_i v_i^2$ и описываются уравнениями (1.2), в которых отсутствуют составляющие смещений u_y и производные по y. В образующемся волновом поле совершается предельный переход при условиях, аналогичных условиям (1.7). Так как осуществление этого предельного перехода выполняется теми же приемами, как и в трехмерном случае, то ограничимся только приведением результатов.

После предельного перехода волновое поле описывается уравнениями

$$-p = \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \qquad (4.2)$$

$$\lambda = 1\Big/\sum_{i=1}^{4} \frac{s_i}{\lambda_i}, \quad \rho_x = \frac{\rho_{12}\rho_{34}}{\widetilde{\varepsilon}_1\rho_{34} + \widetilde{\varepsilon}_2\rho_{12}}, \quad \rho_z = \frac{\rho_{13}\rho_{24}}{\varepsilon_1\rho_{24} + \varepsilon_2\rho_{13}}; \qquad (4.3)$$

$$\lambda_i = \rho_i v_1^2, \quad \rho_{12} = \rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3\varepsilon_1 + \rho_4\varepsilon_2,$$
$$\rho_{13} = \rho_1\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_3\widetilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{24} = \rho_2\widetilde{\varepsilon}_1 + \rho_4\widetilde{\varepsilon}_2,$$
$$s_1 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_2 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_3 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2, \quad s_4 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2,$$

при этом s_i – относительная площадь блока i ($s_1+s_2+s_3+s_4 = 1$).

Из равенств (4.2) следует волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda\left(\frac{1}{\rho_x}\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_z}\ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \qquad (4.5)$$

описывающее трансверсально-изотропную жидкость. В такой среде от точечного источника распространяется волна с эллиптическим фронтом, скорости которого вдоль осей определяются равенствами

$$v_x = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_x}}, \quad v_z = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_z}}. \tag{4.6}$$

Скорости распространения (4.6) будем исследовать в ряде частных случаев.

1. В случае, когда плотности во всех жидкостях одинаковые и

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4, \tag{4.7}$$

эффективная модель оказывается изотропной жидкостью со скоростью распространения

$$v_x = v_z = \sqrt{1\Big/\left(\frac{s_1}{v_1^2} + \frac{s_2}{v_2^2} + \frac{s_3}{v_3^2} + \frac{s_4}{v_4^2}\right)}. \tag{4.8}$$

2. Пусть во всех блоках скорости одинаковые и

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4. \tag{4.9}$$

В этом случае эффективная модель является ортотропной жидкостью. Скорость v_x представим равенством

$$v_x = v_1 \sqrt{\frac{\dfrac{s_1+s_2}{\rho_{12}} + \dfrac{s_3+s_4}{\rho_{34}}}{\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}}}. \tag{4.10}$$

Используя формулы типа

$$\frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1+s_2}{\rho_{12}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_1-\rho_2)^2)}{\rho_1\rho_2\rho_{12}}, \tag{4.11}$$

заменим равенство (4.10) соотношением

$$v_x = v_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\dfrac{\widetilde{\varepsilon}_1(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1\rho_2\rho_{12}} + \dfrac{\widetilde{\varepsilon}_2(\rho_3-\rho_4)^2)}{\rho_3\rho_4\rho_{34}}}{\dfrac{s_1}{\rho_1} + \dfrac{s_2}{\rho_2} + \dfrac{s_3}{\rho_3} + \dfrac{s_4}{\rho_4}}}. \tag{4.12}$$

Аналогичное соотношение может быть записано и для скорости v_z. Формула (4.12) и ей подобное равенство для v_z показывают, что в смеси жидкостей с одинаковыми скоростями, но с разными плотностями скорость распространения меньше чем скорость в смешиваемых жидкостях.

3. Рассмотрим среду, в которой жидкость 1 расположена в блоке 1, а жидкость 2 заполняет все остальные три блока в ячейках. Так как блоки 1 окружены со всех сторон жидкостью 2, то среду можно рассматривать как среду с периодическими включениями. В этой среде выполняются равенства

$$\rho_2 = \rho_3 = \rho_3, \quad v_2 = v_3 = v_4, \quad \varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1. \tag{4.13}$$

При этих предположениях эффективная модель является изотропной жидкостью. Скорость распространения в ней представляется равенством

$$v = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\rho_{12}} + \frac{\varepsilon_2}{\rho_2}\right) \Big/ \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\rho_1 v_1^2} + \frac{1-\varepsilon_1^2}{\rho_2 v_2^2}\right)}. \tag{4.14}$$

В случае одинаковых плотностей жидкостей ($\rho_1 = \rho_2$) формула (4.14) заменяется соотношением

$$v = v_2 \Big/ \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 (v_1^2 - v_2^2)/v_1^2}. \tag{4.15}$$

Из равенства (4.15) следует, что в случае одинаковых плотностей, включение с большей скоростью приводит к увеличению скорости в модели и, наоборот, в случае включения с меньшей скоростью скорость в эффективной модели оказывается меньше чем в окружающей среде. Если в средах скорости одинаковые ($v_1 = v_2$), то, на основании формулы (4.14), приходим к равенству

$$v = v_2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_{12}[\rho_1(1-\varepsilon_1^2) + \rho_2 \varepsilon_1^2]}}, \tag{4.16}$$

которое, как и формулы (3.8), (3.14) и (4.12), показывает, что скорость распространения в смеси жидкостей с одинаковыми скоростями распространения меньше скоростей в каждой смешиваемой жидкости.

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
2. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
3. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* СПб (2001).
4. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (1998), 140–164.
5. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (1998), 230–253.
6. Л. А. Молотков, *О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (1998), 254–271.
7. M. W. Lee, D. R. Hutchinson, T. S. Collett, and W. P. Dillon, *Seismic velocities for hydrate-bearing sediments using weighted equation.* — J. Geoph. Res. **101,** No. B9 (1990), 20,347–20,358.
8. C. F. Pearson, J. Murphy, and R. Hermes, *Acoustic and resistivity measurments on rock samples containing tetrahydrofuran hydrates.* — J. Geophys. Int. **91** (1986), 14,132–14,138.
9. J. P. Castanga, M. L. Batle, and R. L. Eastwood, *Relatioship between compressional-wave and shear-wave velocities in elastic silicate rocks.* — Geophysics **50** (1985), 571–581.

Molotkov L. A. About propagation of seismic waves in block fluid media.

Propagation of seismic waves in block two- and three-dimensional fluid media is investigated. For these media the effective models which are anisotropic fluids are established. For velocities of wave propagation in these fluid media the formulas are derived and analyzed. The particular investigation is performed in the cases that blocks with different fluids alternate along the coordinate axes or that blocks filled by a fluid are surrounded by blocks with another fluid. In the both cases the dependence of wave velocities in the whole of the medium on the differences of densities and of wave velocities in the fluid blocks is investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 марта 2004 г.