Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 308, 2004 г.

А. Я. Казаков, Ю. Н. Сирота

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕБИУСА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

Специальные функции гипергеометрического класса (см., например, [1]) являются одним из основных инструментов математической и теоретической физики. В последние десятилетия широкое применение находят решения более сложных уравнений, в том числе уравнений класса Гойна. Уравнение Гойна (уравнение класса Фукса с 4 регулярными особыми точками) является естественным обобщением гипергеометрического уравнения (уравнения класса Фукса с тремя регулярными особыми точками). К исследованию решений уравнения Гойна и его различных редукций сводятся многие задачи теории твердого тела, теории черных дыр, изучение квантовых задач с ангармоническим потенциалом и потенциалом двух кулоновских центров [2]. Для уравнений класса Гойна, в отличие от уравнений гипергеометрического класса, отсутствует такая важная для приложений аналитическая информация, как явный вид матриц связи и матриц монодромии. Эта информация для уравнений гипергеометрического класса следует из существования для их решений интегральных представлений. Для решений уравнений класса Гойна (и для более сложных уравнений) интегральных представлений нет, в связи с чем возникает необходимость искать иные возможности исследования соответствующих матриц монодромии (связи). Напомним, что именно полная информация о матрицах связи для уравнений гипергеометрического класса позволила недавно существенно продвинуться в исследовании решений уравнений Пенлеве [8, 9].

В данной работе мы обсудим в данном контексте одно аналитическое преобразование, которое связывает между собой решения разных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) второго порядка. Вывод формы упомянутого выше преобразования основан на следующих фактах. Во-первых, ЛОДУ второго порядка известным образом связано с уравнением Риккати, так что от решений исходного ЛОДУ можно перейти к решениям уравнения Риккати. Ключевым моментом для дальнейшего является следующий факт: если мы подвергнем решение уравнения Риккати преобразованию Мебиуса, мы вновь получим решение уравнения Риккати, с другими коэффициентами, которое вновь можно связать с ЛОДУ второго порядка, которое мы будем называть *конечным* ЛОДУ. В результате возникает явное соотношение между решениями исходного и конечного ЛОДУ второго порядка, которое позволяет связать аналитические свойства решений исходного и конечного уравнений. При этом коэффициенты конечного уравнения зависят от функциональных параметров преобразования Мебиуса. Выбирая эти параметры, можно изменять особые точки уравнения, их характер и их число.

Отметим, что в работах [5, 6] развиваются иные подходы для аналитического исследования групп монодромии линейных систем ОДУ с рациональными коэффициентами.

2. Преобразование линейного дифференциального уравнения второго порядка

Запишем исходное ЛОДУ второго порядка в виде

$$v''(z) = p(z)v'(z) + q(z)v(z), \tag{1}$$

где $p(z)$, $q(z)$ – рациональные функции комплексного переменного z,

$$p(z) = \frac{P(z)}{R(z)}, q(z) = \frac{Q(z)}{R(z)},$$

$P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ полиномиально зависят от z. Если положить $m(z) = v'(z)/v(z)$, то функция $m(z)$ будет решением уравнения Риккати

$$m'(z) = q(z) + p(z)m(z) - m^2(z). \tag{2}$$

Далее, положим

$$n(z) = \frac{\alpha(z)m(z) + \beta(z)}{\gamma(z)m(z) + \delta(z)} = \frac{\alpha(z)v'(z) + \beta(z)v(z)}{\gamma(z)v'(z) + \delta(z)v(z)}. \tag{3}$$

Таким образом, функции $n(z)$, $m(z)$ связаны преобразованием Мебиуса. Функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ мы будем называть параметрами преобразования Мебиуса (3). Нетрудно проверить, что функция $n(z)$ является решением уравнения Риккати

$$n'(z) = K(z) + L(z)n(z) + N(z)n^2(z),$$

где

$$N(z) = \frac{M(z)}{R(z)D(z)}, L(z) = \frac{S(z)}{R(z)D(z)}, K(z) = \frac{T(z)}{R(z)D(z)}, \tag{4}$$

$$M(z) = \gamma\delta P - \gamma^2 Q + \left[\delta^2 + \gamma'\delta - \gamma\delta'\right] R, \tag{5}$$

$$S(z) = 2\alpha\gamma Q - [\alpha\delta + \beta\gamma] P + [\beta'\gamma - \beta\gamma' + \delta'\alpha - \delta\alpha' - 2\beta\delta] R, \tag{6}$$

$$T(z) = \alpha\beta P - \alpha^2 Q + \left[\alpha'\beta - \alpha\beta' + \beta^2\right] R, \tag{7}$$

$$D(z) = \beta(z)\gamma(z) - \alpha(z)\delta(z).$$

Вводя новую функцию $u(z)$ с помощью соотношения $n(z) = -u'(z)\,[N(z)u(z)]^{-1}$, мы получим для нее ЛОДУ второго порядка

$$u''(z) - \left[L(z) + \frac{N'(z)}{N(z)}\right] u'(z) + K(z)N(z)u(z) = 0t. \tag{8}$$

Отметим при этом следующие обстоятельства.

1. Если коэффициенты исходного ЛОДУ, функции $p(z)$, $q(z)$, а также параметры преобразования Мебиуса, функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$, являются рациональными функциями независимой переменной z, то и коэффициенты конечного ЛОДУ (8) также являются рациональными функциями z. Этот факт непосредственно следует из соотношений (4)–(6).

2. Решения исходного ЛОДУ $v(z)$ и конечного ЛОДУ $u(z)$ связаны следующим соотношением:

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = -N(z)\frac{\alpha(z)v'(z) + \beta(z)v(z)}{\gamma(z)v'(z) + \delta(z)v(z)}. \tag{9}$$

Этот факт позволяет соотнести локальное и глобальное поведение решений $v(z)$ и $u(z)$. Преобразование (9) (связывающее решения ЛОДУ $v(z)$ и $u(z)$) мы также будем в дальнейшем называть преобразованием Мебиуса.

3. Преобразования Мебиуса, действующие на множестве ЛОДУ, образуют группу. Это, в частности, означает, что для невырожденного преобразования можно построить обратное ему. Если параметры исходного преобразования Мебиуса были рациональными функциями z, то и коэффициенты обратного преобразования также будут рациональными функциями z.

4. Преобразование (3) зависит от 4 функциональных параметров $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$. Вообще говоря, независимыми из них являются только 3 функции, одну из них можно исключить, поделив на нее (если она не тождественный ноль) и используя соответствующие переобозначения. Однако форма (3) представляется более предпочтительной, так как позволяет обсуждать ситуацию, когда все 4 параметра являются функциями выделенного класса (например, полиномами) переменной z. В дальнейшем будем мы обсуждать именно этот случай, т.е. будем считать, что все параметры являются полиномами от z. Очевидно, что наше преобразование не изменится, если мы умножим все параметры преобразования $(\alpha(z), \beta(z), \gamma(z), \delta(z))$ на одну и ту же функцию. Более того, как следует из соотношений (4)–(8), конечное уравнение также не изменится, если мы умножим только пару функций $(\alpha(z), \beta(z))$, или $(\gamma(z), \delta(z))$ на произвольный функциональный множитель.

5. Если функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ удовлетворяют соотношению $D(z_*) = 0$, дробно-рациональное соотношение (3) является вырожденным в этой точке, саму точку z_* мы будем называть точкой вырождения преобразования Мебиуса.

6. Особыми точками конечного уравнения (8), как следует из соотношений (4)–(8), могут, вообще говоря, быть: а) особые точки исходного уравнения; б) нули функции $M(z)$; в) точки вырождения преобразования Мебиуса. Ниже мы обсудим характер этих особых точек.

7. Непосредственно из способа построения преобразования Мебиуса следует, что оно переводит линейно независимые решения исходного уравнения в линейно независимые решения конечного уравнения.

3. Локальное поведение решений ЛОДУ

3.1. Основные понятия. Напомним понятия и результаты аналитической теории дифференциальных уравнений, необходимые в дальнейшем. Более подробное их обсуждение можно найти в [2–4]).

Особые точки в конечной плоскости уравнения (1) совпадают с полюсами его коэффициентов $p(z)$, $q(z)$, остальные точки в конечной плоскости мы называем *обыкновенными точками* уравнения. Если в данной точке z_* функция $p(z)$ имеет полюс не выше первого порядка, а $q(z)$ – полюс не выше второго порядка, точка z_* является *регулярной особой точкой.* Если одно из этих условий нарушается, точка является *иррегулярной особой точкой* уравнения (1). Аналогичным образом можно ввести определения, соответствующие бесконечной особой точке. Мы будем обсуждать в дальнейшем особые точки, лежащие в конечной части комплексной плоскости. Бесконечную особую точку, если она есть, можно дробно-рациональным преобразованием перевести в конечную особую точку, сохранив другие особые точки в конечной плоскости. Таким образом, обсуждая конечную часть комплексной плоскости, мы не ограничиваем общности рассмотрений.

Введем еще одно понятие [2].

Определение 1. *Пусть точка $z = z_*$ является особой точкой уравнения* (1). *Она называется устранимой особой точкой этого уравнения, если существует такая функция $m(z)$, что после подстановки $v(z) = m(z)w(z)$ уравнение для функции $w(z)$ не имеет особой точки при $z = z_*$.*

Очевидно, что умножая функцию $v(z)$ на произвольную функцию $f(z)$, мы построим $w(z) = f(z)v(z)$, решение ЛОДУ, которое хоть и отличается от начального уравнения, но по своим важнейшим свойствам (группе монодромии) совпадает с ним. Поэтому такие уравнения называются *формами* исходного уравнения. При этом *канонической формой* уравнения называется такая, при которой коэффициенты уравнения (1), функции $p(z)$, $q(z)$, в регулярных особых точках имеют полюса порядка не выше первого. Определение 1 означает, что при записи в канонической форме уравнение не имеет особой точки в $z = z_*$.

Мы будем считать в дальнейшем, что исходное уравнение (1) записано в канонической форме. Выпишем локальное представление коэффициентов уравнения (1) в окрестности регулярной особой точки,

$$p(z) = \frac{p_{-1}^{(z_*)}}{z - z_*} + p_0^{(z_*)} + \dots ,$$

$$q(z) = \frac{q_{-1}^{(z_*)}}{z - z_*} + q_0^{(z_*)} + \dots ,$$

где многоточие отмечает степени выше нулевой. При этом мы будем предполагать (за исключением особо оговоренных случаев), что величина $p_{-1}^{(z_*)}$ не является целым числом. В окрестности регулярной особой точки z_* уравнение (1) имеет пару фундаментальных решений $v_h^{(z_*)}(z)$, $v_b^{(z_*)}(z)$, решений Фробениуса, первое из которых голоморфно в окрестности точки z_* (это следствие канонической формы уравнения), а второе ветвится в окрестности этой точки. Следовательно,

$$v_h^{(z_*)}(z) = 1 + \rho^{(z_*)}(z - z_*) + \dots ,$$

$$v_b^{(z_*)}(z) = (z - z_*)^{1+p_{-1}^{(z_*)}} V^{(z_*)}(z),$$

причем

$$V_b^{(z_*)}(z) = 1 + \mu^{(z_*)}(z - z_*) + \dots ,$$

где многоточие соответствует сходящимся рядам, чье разложение начинается с более высоких целых степеней $(z - z_*)$. Присутствие единиц в этих соотношениях фиксирует нормировку решений. При этом функции $v_h^{(z_*)}(z)$, $V_b^{(z_*)}(z)$ – аналитические функции на комплексной плоскости с выкинутыми особыми точками уравнения (1), голоморфные в окрестности точки $z = z_*$. Эти решения при обходе вокруг особой точки $z = z_*$ преобразуются весьма простым образом – они приобретают соответствующий множитель (для голоморфного в этой точке решения он равен 1). Произвольное решение является их линейной комбинацией и при обходе вокруг особой точки z_* трансформируется соответствующим образом.

Регулярной особой точке $z = z_*$ уравнения (1) можно сопоставить пару характеристических показателей $\chi_{1,2}$ – характеристик ветвления решений Фробениуса в этой точке. Для уравнения в канонической форме один из этих показателей равен нулю, так что для исходного уравнения (1) мы имеем $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = p_{-1}^{(z_*)} + 1$.

Каждому характеристическому показателю соответствует естественным образом решение Фробениуса, фиксированное своим поведением в данной особой точке. Отметим, что при изменении формы уравнения (согласно введенной выше терминологии) сами характеристические показатели могут изменяться, однако модуль их разности $\Delta^{(z_*)} = \chi_2 - \chi_1 = p_{-1}^{(z_*)} + 1$ не меняется.

В дальнейшем нам потребуется еще одно понятие.

Определение 2. *Особая точка уравнения называется ложной регулярной особой точкой порядка k, $\mid k \mid > 1$, если разность соответствующих характеристических показателей равна целому числу k, причем соответствующая пара решений Фробениуса не имеет логарифмического поведения в окрестности данной особой точки.*

Согласно этому определению, в окрестности ложной особой точки z_* можно ввести пару решений Фробениуса уравнения, фиксированную следующим поведением:

$$v_h^{(z_*)}(z) = 1 + \ldots ,$$
$$v_r^{(z_*)}(z) = (z - z_*)^k \left[1 + \ldots\right],$$

где многоточие соответствует здесь и далее голоморфным в точке $z = z_*$ функциям, чье разложение по $(z - z_*)$ начинается со степеней выше нулевой. Единицы, как и ранее, фиксируют нормировку решений.

Отметим, что ложные особые точки играют особую роль в исследовании общих свойств монодромии линейных фуксовых систем [6]. Напомним в этой связи статус ложных особых точек при изучении монодромии ЛОДУ. Для заданного ЛОДУ монодромия решений, связанная с фиксированным контуром, не зависит от того, охватывает контур ложные особые точки или нет. Однако если мы для заданного ЛОДУ устраним (или добавим) ложную особую точку, монодромные свойства для данного контура изменятся, так как изменится само уравнение.

3.2. Влияние дробно-рационального преобразования на локальное поведение решений. В данном пункте мы обсудим влияние преобразования Мебиуса на характер регулярной особой точки и решения Фробениуса. Напомним, что параметры преобразования мы считаем полиномами от z. Ниже мы будем опускать для краткости индекс z_*.

Как уже упоминалось, особыми точками конечного уравнения могут быть особые точки исходного уравнения, нули функции $M(z)$ и точки вырождения преобразования Мебиуса. Из анализа соотношений (4)–(7) следует, что изменение характера особых точек (в том числе их появление и исчезновение при переходе от начального ЛОДУ к конечному) может происходить в том случае, когда особые точки исходного уравнения совпадут с нулями $M(z)$ или точками вырождения преобразования Мебиуса. Разбор этих ситуаций – наша ближайшая задача.

Утверждение 1. *Пусть z_* является регулярной особой точкой исходного уравнения* (1)*, причем эта точка не является ни точкой вырождения преобразования Мебиуса, ни нулем функции $M(z)$. Тогда z_* является регулярной особой точкой и для конечного уравнения* (8)*, преобразование* (9) *переводит решения Фробениуса уравнения* (1) *в решения Фробениуса уравнения* (8)*, причем разность соответствующих характеристических показателей равна p_{-1} (т.е. изменяется на* 1*).*

Доказательство мы проведем на основе соотношения (9). Для того, чтобы определить показатели ветвления решений Фробениуса, достаточно выписать с помощью (9) старший член локального разложения функции $u'(z)/u(z)$. При этом нам следует подставить в правую часть (9) локальное разложение решений Фробениуса исходного уравнения:

$$v_h(z) = 1 + \dots , v_h'(z) = -q_{-1}/p_{-1} + \dots , \tag{10}$$

$$v_b(z) = (z-z_*)^{p_{-1}+1}(1+\dots), v_b'(z) = (p_{-1}+1)(z-z_*)^{p_{-1}}(1+\dots), \tag{11}$$

где многоточие отмечает степени $(z-z_*)$ более высокого порядка.

Выпишем старший член локального разложения функции $N(z)$ в окрестности особой точки $z = z_0$:

$$N(z) = \gamma(z_*)\frac{p_{-1}\delta(z_*) - q_{-1}\gamma(z_*)}{\beta(z_*)\gamma(z_*) - \alpha(z_*)\delta(z_*)}\frac{1}{z-z_*} + \dots , \tag{12}$$

знаменатель первой дроби не равен нулю ввиду невырожденности точки z_* для преобразования Мебиуса. Возьмем сначала голоморфное в окрестности точки z_* решение Фробениуса исходного уравнения (1), и выпишем на основе (9), (10) и (12) локальное поведение его образа относительно преобразования Мебиуса:

$$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \gamma(z_*)\frac{\alpha(z_*)q_{-1} - \beta(z_*)p_{-1}}{\beta(z_*)\gamma(z_*) - \alpha(z_*)\delta(z_*)}\frac{1}{z-z_*}\left[1 + \dots\right]. \tag{13}$$

Из этой формулы следует, что $u_1(z)$, решение уравнения (8), будет ветвящейся в точке z_* функцией, причем характеристический показатель равен

$$\vartheta_1 = \gamma(z_*)\frac{\alpha(z_*)q_{-1} - \beta(z_*)p_{-1}}{\beta(z_*)\gamma(z_*) - \alpha(z_*)\delta(z_*)}.$$

(Если $\alpha(z_*)q_{-1} = \beta(z_*)p_{-1}, \vartheta_1 = 0$.) Возьмем теперь второе решение Фробениуса уравнения (1), соответствующее точке z_*, и подставим в правую часть соотношения (9), учитывая (11). При этом мы получим:

$$\frac{u_2'(z)}{u_2(z)} = \alpha(z_*)\frac{\gamma(z_*)q_{-1} - \delta(z_*)p_{-1}}{\beta(z_*)\gamma(z_*) - \alpha(z_*)\delta(z_*)}\frac{1}{z - z_*}[1 + \ldots]. \qquad (14)$$

Таким образом, функция $u_2(z)$ представляет собой решение Фробениуса уравнения (8), ветвящееся в точке z_*, причем характеристический показатель этого решения равен

$$\vartheta_2 = \alpha(z_*)\frac{\gamma(z_*)q_{-1} - \delta(z_*)p_{-1}}{\beta(z_*)\gamma(z_*) - \alpha(z_*)\delta(z_*)}.$$

Из этих соотношений следует, что $\vartheta_2 - \vartheta_1 = p_{-1}$, ч.т.д.

Таким образом, соотношение (9) сохраняет важнейшее локальное свойство решения – оно переводит решения Фробениуса исходного уравнения (1) в решения Фробениуса конечного уравнения (8). Отметим при этом, что голоморфное решение Фробениуса наше преобразование переводит, вообще говоря, в ветвящееся решение Фробениуса конечного уравнения, так что соответствующий характеристический показатель не равен нулю. Утверждение 1 позволит нам в дальнейшем связать также и глобальное поведение решений исходного и конечного уравнений.

Для того, чтобы определить, является ли данная точка обыкновенной или ложной особой точкой конечного уравнения, полезен следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *точка $z = z_*$ является обыкновенной точкой исходного уравнения;*
2) *параметры преобразования Мебиуса голоморфны в окрестности этой точки;*
3) *разность характеристических показателей конечного уравнения в точке $z = z_*$ является целым числом.*

Тогда решения Фробениуса конечного уравнения не содержат слагаемого с логарифмическим поведением в окрестности точки z_* *и, соответственно, точка* z_* *либо обыкновенная, либо ложная особая точка конечного уравнения.*

Доказательство мы опускаем.

Утверждение 3. *Если точка* $z = z_*$ *является нулем кратности* k *функции* $M(z)$, *не совпадает с особыми точками исходного уравнения и с точками вырождения дробно-рационального преобразования, то конечное уравнение имеет в точке* $z = z_*$ *ложную регулярную особую точку порядка* $k+1$.

Доказательство. Как следует из наших предположений, явного выражения конечного уравнения (8) и соотношений для его коэффициентов (4)–(7), только коэффициент при первой производной искомой функции содержит полюс в точке $z = z*$ – особенность $(-k)/(z - z_*)$, которая содержится в логарифмической производной функции $N(z)$. Следовательно, характеристические показатели в этой особой точке для уравнения (8) равны 0, $(k+1)$. Учитывая результаты утверждения 2, мы завершаем доказательство. □

Прокомментируем наши результаты. Утверждение 1 справедливо и в том случае, когда $z = z_*$ является ложной особой точкой. При этом разность характеристических показателей изменяется на единицу – либо увеличивается, либо уменьшается (выбором формы начального уравнения можно выбрать тот или иной вариант) и, согласно утверждению 2, пара решений Фробениуса не имеет логарифмического поведения, так что эта особая точка является ложной регулярной для преобразованного уравнения. Таким образом, если у исходного уравнения была ложная особая точка порядка 2, с помощью преобразования Мебиуса можно ее сделать обыкновенной точкой конечного уравнения (записанного в канонической форме). Мы приходим к выводу, что наше преобразование позволяет "стирать" ложные особые точки. Обращая наши рассуждения, можно, согласно утверждению 3, обыкновенную точку исходного уравнения с помощью подходящего преобразования Мебиуса превратить в ложную регулярную особую точку.

Желательно, учитывая возможные приложения, чтобы при переходе от исходного уравнения к конечному уравнению число особых точек не слишком сильно увеличивалось – в ином случае конечное уравнение может выйти из класса интересных. Поэтому существенным является тот факт, что точки вырождения преобразования Мебиуса не приводят к появлению новых особых точек.

Утверждение 4. *Если точка $z = z_*$ является простой точкой вырождения преобразования Мебиуса, не совпадает с нулями функции $M(z)$ и с особыми точками исходного уравнения, то конечное уравнение имеет в точке $z = z_*$ устранимую особую точку.*

Доказательство, которое нетрудно провести на основе соотношения (9), мы опускаем.

Утверждение 5. *Если точка $z = z_*$ является одновременно простым нулем функции $M(z)$ и регулярной особой точкой исходного уравнения, и не является точкой вырождения преобразования Мебиуса, то эта точка является регулярной особой точкой конечного уравнения, причем преобразование Мебиуса переводит решения Фробениуса исходного уравнения в решения Фробениуса конечного уравнения и разность характеристических показателей либо изменяется на 2, либо не изменяется.*

Доказательство этого утверждения является модификацией доказательства утверждения 1. Следующий результат описывает случай совпадения нуля функции $M(z)$ и точки вырождения преобразования.

Утверждение 6. *Пусть точка z_* является простым нулем функции $M(z)$ и простой точкой вырождения преобразования Мебиуса и обыкновенной точкой исходного уравнения. Тогда эта точка является либо обыкновенной точкой конечного уравнения, либо ложной особой точкой.*

Доказательство, основанное на соотношении (9), мы опускаем.

4. Глобальное поведение решений

4.1. Основные понятия. В данном разделе мы рассмотрим влияние преобразования Мебиуса на глобальные характеристики решений ЛОДУ, а именно, на элементы матриц связи.

Напомним определение матриц связи для уравнения (1) [2, 3]. Возьмем две его регулярные особые точки z_1, z_2, в окрестности которых мы имеем, соответственно, 2 пары решений Фробениуса, $\left(v_h^{(z_1)}(z), v_b^{(z_1)}(z)\right)$, $\left(v_h^{(z_2)}(z), v_b^{(z_2)}(z)\right)$. Возьмем любой контур на комплексной плоскости L, начинающийся в точке z_1, заканчивающийся в точке z_2 и не проходящий через другие особые точки уравнения (1). Продолжим пару решений Фробениуса $v_h^{(z_1)}(z)$, $v_b^{(z_1)}(z)$ вдоль этого контура в окрестность точки z_2. Согласно аналитической теории ЛОДУ, результат этого продолжения мы можем представить с помощью линейных комбинаций решений Фробениуса $v_h^{(z_2)}(z)$, $v_b^{(z_2)}(z)$,

$$v_h^{(z_1)}(z) \Longrightarrow \Gamma^L(z_1, z_2)_{11} v_h^{(z_2)}(z) + \Gamma^L(z_1, z_2)_{12} v_b^{(z_2)}(z),$$

$$v_b^{(z_1)}(z) \Longrightarrow \Gamma^L(z_1, z_2)_{21} v_h^{(z_2)}(z) + \Gamma^L(z_1, z_2)_{22} v_b^{(z_2)}(z),$$

Матрица $\Gamma^L(z_1, z_2)$ называется матрицей связи для точек z_1, z_2, соответствующей пути L. Отметим, что при таких деформациях пути, когда он не пересекает других особых точек, матрица связи не изменяется. Знание полного набора матриц связи позволяет решить так называемые спектральные задачи связи [2]. Еще раз подчеркнем, что набор матриц связи в явном виде известен в настоящее время только для уравнений гипергеометрического класса.

В дальнейшем нам будут полезны следующие результаты.

Утверждение 7. *Пусть h – разность характеристических показателей в какой-либо регулярно особой точке. Тогда коэффициенты уравнения* (1) *аналитически зависят от h.*

Утверждение 8. *Если коэффициенты уравнения* (1) *аналитически зависят от некоторого параметра h, то и матрица связи* $\Gamma(L)$ *аналитически зависит от этого параметра.*

Кроме матриц связи в аналитической теории линейных дифференциальных уравнений обсуждаются также матрицы монодромии, которые описывают преобразование выделенной пары решений уравнения при обходе по замкнутому контуру в комплексной плоскости, в совокупности они образуют группу монодромии уравнения. Если контур не охватывает особых точек уравнения, преобразование является тождественным. Если же он охватывает особые точки, преобразование монодромии можно вычислить с помощью матриц связи.

4.2. Влияние преобразования Мебиуса на глобальное поведение решений. Итак, обсудим влияние преобразования Мебиуса ЛОДУ второго порядка на набор матриц связи ЛОДУ. Пусть z_1, z_2 – регулярные особые точки исходного уравнения (1), причем в обеих этих точках дробно-рациональное преобразование невырожденно. Как и ранее, мы считаем, что коэффициенты преобразования – голоморфные функции. Как было показано выше, в этом случае точки z_1, z_2 являются регулярными особыми точками и для конечного уравнения (8).

Введем пары решений Фробениуса в окрестности точек z_1, z_2 для обоих уравнений. Пусть

$$V_k(z) = \begin{pmatrix} v_{1,k}(z) \\ v_{2,k}(z) \end{pmatrix}, U_k(z) = \begin{pmatrix} u_{1,k}(z) \\ u_{2,k}(z) \end{pmatrix}$$

– решения уравнений (1) и (8), соответствующие точке z_k, $k = 1, 2$. Выберем путь L из окрестности точки z_1 в окрестность точки z_2, не проходящий через другие особые точки уравнения (1). Тогда можно определить матрицы связи $\Gamma(L)$ и $\Xi(L)$ согласно соотношениям

$$V_1(z) \Longrightarrow \Gamma(L)V_2(z), \tag{15}$$

$$U_1(z) \Longrightarrow \Xi(L)U_2(z). \tag{16}$$

где стрелка отмечает результат аналитического продолжения вдоль выбранного пути. Наша цель в данном разделе – установить связь между матрицами $\Gamma(L)$ и $\Xi(L)$. Напомним, что исходное уравнение мы считаем записанным в канонической форме, так что одно из решений в каждой паре решений $V_k(z)$, $k = 1, 2$, голоморфно в соответствующей особой точке. Мы будем считать, что голоморфные решения в парах $V_k(z)$ выписаны в верхних строках. Как было показано выше, преобразование Мебиуса переводит каждое из решений Фробениуса уравнения (1) в решение Фробениуса уравнения (8) (утверждения 1 и 5 соответственно для ситуаций, когда ноль функции $M(z)$ не совпадает или совпадает с особой точкой исходного уравнения). Мы выберем обозначения так, что верхняя (нижняя) компонента вектора $V_k(z)$ переходит в верхнюю (нижнюю) компоненту вектора $U_k(z)$, $k = 1, 2$.

Далее мы будем опираться на утверждения 7 и 8, которые позволяют выводить соотношения для матриц $\Gamma(L)$ и $\Xi(L)$ при условии, что некоторый параметр h принимает значения только на интервале, а затем распространять полученные результаты на произвольные значения h.

Утверждение 9. *Пусть регулярная особая точка z_2 исходного уравнения не является ни точкой вырождения преобразования Мебиуса, ни нулем функции $M(z)$. Тогда*

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\frac{\Xi_{12}}{\Xi_{11}}=\mu_2\left\{\frac{\alpha(z_2)}{\alpha(z_2)\kappa+\beta(z_2)}-\frac{\gamma(z_2)}{\gamma(z_2)\kappa+\delta(z_2)}\right\}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}, \qquad (17)$$

где ρ_2, ρ_1 – показатели ветвления решений Фробениуса конечного уравнения, μ_2 – показатель ветвления неголоморфного решения Фробениуса исходного уравнения, решения Фробениуса соответствуют точке z_2.

Доказательство. Возьмем голоморфное решение Фробениуса исходного уравнения, отвечающее точке z_1, функцию $v_{1,1}(z)$. Как было установлено в утверждении 1, преобразование Мебиуса переводит это решение в голоморфное решение Фробениуса, соответствующее той же точке, в функцию $u_{1,1}(z)$. Выпишем, с учетом наших соглашений, для нее соотношение (9):

$$\frac{u'_{1,1}(z)}{u_{1,1}(z)}=-N(z)\frac{\alpha(z)v'_{1,1}(z)+\beta(z)v_{1,1}(z)}{\gamma(z)v'_{1,1}(z)+\delta(z)v_{1,1}(z)}. \qquad (18)$$

Рассмотрим поведение левой и правой частей этого соотношения при аналитическом продолжении вдоль пути L, а затем сравним результаты. Левая часть, согласно (16), продолжается следующим образом (мы опускаем зависимость от пути L):

$$\frac{u'_{1,1}(z)}{u_{1,1}(z)}\Longrightarrow M_1(z)=\frac{\Xi_{11}u'_{1,2}(z)+\Xi_{12}u'_{2,2}(z)}{\Xi_{11}u_{1,2}(z)+\Xi_{12}u_{2,2}(z)}. \qquad (19)$$

Это соотношение, вместе с информацией о локальном поведении пары решений Фробениуса $U_2(z)$, дает возможность описать локальное поведение функции $M_1(z)$ в окрестности точки z_2:

$$M_1(z)\sim\frac{\Xi_{11}\rho_1(z-z_2)^{\rho_1-1}+\Xi_{12}\rho_2(z-z_2)^{\rho_2-1}}{\Xi_{11}(z-z_2)^{\rho_1}+\Xi_{12}(z-z_2)^{\rho_2}}. \qquad (20)$$

Заметим, что коэффициенты уравнения аналитически зависят от параметра $h=\rho_2-\rho_1$. С учетом сделанных выше замечаний, мы будем сначала обсуждать ситуацию, когда параметр h принимает значения в полосе $0<Reh<1$. В этом случае старшие члены локального разложения функции $M_1(z)$ в окрестности точки $z=z_2$ можно представить в виде

$$M_1(z) \sim \frac{\rho_1}{z-z_2}\left\{1+\xi(z-z_2)^{\rho_2-\rho_1}\right\}, \tag{21}$$

$$\xi = \frac{\Xi_{12}}{\Xi_{11}}(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1).$$

Теперь, на основе верхней строки соотношения (15), опишем результат аналитического продолжения правой части соотношения (18):

$$M_2(z) =$$
$$= -N(z)\frac{\alpha(z)\left\{\Gamma_{11}v'_{1,2}(z)+\Gamma_{12}v'_{2,2}(z)\right\}+\beta(z)\left\{\Gamma_{11}v_{1,2}(z)+\Gamma_{12}v_{2,2}(z)\right\}}{\gamma(z)\left\{\Gamma_{11}v'_{1,2}(z)+\Gamma_{12}v'_{2,2}(z)\right\}+\delta(z)\left\{\Gamma_{11}v_{1,2}(z)+\Gamma_{12}v_{2,2}(z)\right\}}. \tag{22}$$

Выпишем локальное поведение этой функции в окрестности точки $z=z_2$, учитывая тот факт, что функция $v_{1,2}(z)$ голоморфна, и предположение о параметре h:

$$M_2(z) \sim -\frac{ResN(z_2)}{z-z_2}\times \tag{23}$$
$$\times\frac{\alpha(z_2)\left\{\Gamma_{11}\kappa+\Gamma_{12}\mu_2(z-z_2)^{\mu_2-1}\right\}+\beta(z_2)\left\{\Gamma_{11}+\Gamma_{12}(z-z_2)^{\mu_2}\right\}}{\gamma(z_2)\left\{\Gamma_{11}\kappa+\Gamma_{12}\mu_2(z-z_2)^{\mu_2-1}\right\}+\delta(z_2)\left\{\Gamma_{11}+\Gamma_{12}(z-z_2)^{\mu_2}\right\}}.$$

Здесь $ResN(z_2)$ - вычет функции $N(z)$ в точке z_2, κ - значение производной $v_{1,2}(z_2)$ голоморфного в $z=z_2$ решения Фробениуса уравнения (1) (соответствующего точке $z=z_2$), μ_2 – показатель ветвления второго (неголоморфного в точке $z=z_2$) решения Фробениуса уравнения (1). Напомним, что согласно нашим предположениям функция $N(z)$ имеет полюс в точке z_2 и, согласно утверждению 1, справедливо равенство $\mu_2-1=\rho_2-\rho_1$. Оставляя только старшие члены локального разложения, получаем:

$$M_2(z) \sim \frac{\rho_1}{z-z_2}\left\{1+\zeta(z-z_2)^{\rho_2-\rho_1}\right\}, \tag{24}$$

$$\zeta = \mu_2\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}\left\{\frac{\alpha(z_2)}{\alpha(z_2)\kappa+\beta(z_2)}-\frac{\gamma(z_2)}{\gamma(z_2)\kappa+\delta(z_2)}\right\}. \tag{25}$$

Сравним локальное поведение $M_2(z)$ и $M_1(z)$. Равенство старших членов мы уже использовали ранее, при доказательстве утверждения 1. Приравнивая коэффициенты при $(z-z_2)^{\rho_2-\rho_1}$ в (21), (24), получаем соотношение (17) между матрицами связи исходного и конечного уравнений.

Учитывая утверждения 7 и 8, приходим к заключению, что это соотношение справедливо при произвольных значениях параметра h. □

Приведем еще один результат – для ситуации, когда точка z_2 является одновременно и регулярной особой точкой исходного уравнения и нулем функции $M(z)$. В данном случае мы будем опираться на утверждение 5. Как было показано, $M(z)$ может иметь нуль в двух случаях – когда $\gamma(z_2) = 0$ или $\delta(z_2)p_{-1} = \gamma(z_2)q_{-1}$, где p_{-1}, q_{-1} соответственно вычеты функций $p(z)$, $q(z)$ в точке z_2. Мы обсудим первый случай.

Утверждение 10. *Пусть точка z_2 является одновременно особой точкой уравнения, нулем функции $\gamma(z)$ и не является точкой вырождения преобразования Мебиуса. Тогда выполняется соотношение:*

$$\frac{\Xi_{12}}{\Xi_{11}} = \frac{\delta(z_2) + \gamma'(z_2)(1 + Resq(z_2))}{\delta(z_2)} \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}. \tag{26}$$

Здесь $Resq(z_2)$ означает вычет функции $q(z)$, вычисленный в точке z_2.

Доказательство, аналогичное доказательству утверждения 9, мы опускаем.

Полученные в данном разделе результаты означают, что отношения элементов матриц связи для исходного и конечного уравнений отличаются только множителем, соответствующие константы легко вычисляются для конкретных уравнений. Таким образом, нули и полюса этих отношений (как функций параметров уравнения) для исходного и конечного уравнений связаны друг с другом. Отметим, что эти нули и полюса соответствуют решениям центральных двухточечных задач связи [2] для исходного и конечного уравнений. Итак, мы пришли к выводу, что описанное преобразование Мебиуса обладает квазиизоспектральными свойствами: преобразование спектра соответствующих центральных двухточечных задач связи легко контролируется с помощью полученных соотношений.

5. Гипергеометрическое уравнение и уравнение Гойна

В этом разделе мы обсудим приложение наших результатов к конкретным уравнениям, а именно, к гипергеометрическому [1] и уравнению Гойна. Именно, мы покажем, что если взять в качестве исходного уравнения гипергеометрическое, то можно получить в качестве конечного уравнения уравнение Гойна с одной ложной особой точкой. При этом, соответственно, увеличивается число свободных параметров – с 3 (для гипергеометрического уравнения) до 4 (для уравнения Гойна с одной ложной особой точкой).

Изложим исходные соображения. Как уже упоминалось выше, преобразование Мебиуса позволяет менять характер особых точек. Рассмотрим более подробно соотношения (4)–(8), полагая

$$p(z) = (Az + B)/(z^2 + z); q(z) = C/(z^2 + z).$$

Это соответствует выбору в качестве исходного гипергеометрического уравнения [1]

$$v''(z) = \left(\frac{A-B}{z+1} + \frac{B}{z}\right) v'(z) + \frac{C}{z^2+z} v(z).$$

В этом случае

$$P(z) = Az + B; Q(z) = C; R(z) = z^2 + z.$$

Если мы возьмем

$$\alpha(z) = \alpha_1 z + \alpha_0, \beta(z) = \beta_0, \gamma(z) = \gamma_1 z + \gamma_0, \delta(z) = \delta_0,$$

то функции $M(z), N(z), T(z)$ (согласно их определению, соотношениям (4)–(7)), которые определяют коэффициенты конечного уравнения, являются полиномами второго порядка. Напомним, что особыми точками конечного уравнения могут быть нули функции $M(z)$ и особые точки исходного уравнения (точки вырождения преобразования Мебиуса, как следует из утверждения 4, можно не учитывать). Исходное уравнение имеет 3 регулярные особые точки: 0, -1, ∞. Для того, чтобы уменьшить число особых точек конечного уравнения (слишком большое их число выводит уравнение из класса интересных), мы подберем параметры преобразования Мебиуса так, чтобы один из нулей функции $M(z)$ совпал с регулярной особой точкой исходного уравнения. При этом, в соответствии с утверждением 5, эта точка останется регулярной особой точкой (мы полагаем, что гипергеометрическое уравнение не является ни в каком смысле вырожденным). Еще один нуль функции $M(z)$, согласно нашим результатам, приведет к появлению ложной регулярной особой точки порядка 2 у конечного уравнения. Реализуя эту программу для гипергеометрического уравнения (3 регулярные особые точки, одна из которых находится на бесконечности) в качестве исходного, мы должны получить (после приведения к канонической форме) уравнение с 4 регулярными особыми точками (три лежат в конечной части комплексной плоскости, одна из которых – ложная порядка 2, а последняя лежит на бесконечности). Следовательно, при описанном выборе параметров в результате преобразования Мебиуса гипергеометрического уравнения мы должны получить уравнение Гойна, одна из особых точек которого – ложная регулярная особая точка порядка 2.

Приведем теперь вычисления, которые реализуют эти соображения. Мы полагаем:

$$\gamma_0 = 0, \delta_0\alpha_1 = \beta_0\gamma_1.$$

Первое условие фиксирует совпадение нуля $M(z)$ и регулярной особой точки $z = 0$ исходного уравнения. Второе условие устраняет точку вырождения преобразования Мебиуса. Обозначим для краткости

$$r = \frac{\nu(\nu + B + 1)}{\nu^2 + \nu(A+1) - C}, \nu = \frac{\delta_0}{\gamma_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_1}. \tag{27}$$

Выпишем конечное уравнение, аналог уравнения (8):

$$u''(z) - u'(z)\left\{\frac{1}{z+r} - \frac{1}{z+1} + \frac{2z^2(\beta_0\gamma_1(A+1)+\beta_0\delta_0-\alpha_1\gamma_1 C)}{\alpha_0\delta_0(z^2+z)} + \right.$$
$$\left. + \frac{z\,(2\beta_0\gamma_1(B+1)+2\beta_0\delta_0+A\alpha_0\delta_0-2\alpha_0\gamma_1)+B\alpha_0\delta_0}{\alpha_0\delta_0(z^2+z)}\right\} +$$
$$+u(z)\left\{\frac{\left\{z\left[\delta_0^2+\gamma_1\delta_0\,(A+1)-C\gamma_1^2\right]+\delta_0^2+\gamma_1\delta_0\,(B+1)\right\}}{\alpha_0^2\delta_0^2(z+1)^2 z}\times\right.$$
$$\times\left\{z^2(\alpha_1\beta_1(A+1)-C\alpha_1^2+\beta_0^2)+z(\alpha_1\beta_0(B+1)-2C\alpha_1\alpha_0+\beta_0^2+A\alpha_0\beta_0)\right.$$
$$\left.\left. -C\alpha_0^2+B\alpha_0\beta_0\right\}\right\} = 0.$$

Это уравнение лишь элементарным множителем отличается от уравнения Гойна. В самом деле, после подстановки

$$u(z) = \exp(\lambda z)(z+1)^\mu w(z),$$

$$\lambda = \frac{(A+1)\beta_0\gamma_1 + \beta_0\delta_0 - C\alpha_1\gamma_1}{\alpha_0\delta_0},$$

$$\mu = \frac{\alpha_1(C\alpha_0 - C\alpha_1 + A\beta_0 - B\beta_0)}{\alpha_0\beta_0},$$

мы приходим к уравнению Гойна:

$$w''(z) = \left(\frac{A-B-1}{z+1} + \frac{B}{z} + \frac{1}{z+r}\right) w'(z) + \frac{C(z+\xi)}{(z+r)(z+1)z} w(z), \quad (28)$$

$$\xi = \frac{(1+\nu)r}{\nu}. \quad (29)$$

Это самое общее уравнение Гойна, которое имеет ложную регулярную особую точку порядка 2 (а именно, точку $z = -r$). Оно имеет 4 свободных параметра – A, B, C, ν, параметры r, ξ заданы соотношениями (27), (29). (Напомним, что общее уравнение Гойна имеет 6 свободных параметров.) При этом разность характеристических показателей в точке $z = -1$ изменилась на 1 (в соответствии с утверждением 1), а разность характеристических показателей в точке $z = 0$ сохранилась (в соответствии с утверждением 5).

Наши результаты означают, что мы в явном виде построили все решения Фробениуса этого уравнения, соответствующие особым точкам $z = 0$, $z = -1$ (решения Фробениуса, соответствующие точке $z = \infty$ могут быть рассмотрены аналогичным образом). Кроме того, как следует из наших результатов, мы получили соотношение между матрицами связи для исходного (гипергеометрического) и конечного (уравнения Гойна с одной ложной особой точкой порядка 2) уравнений. Во избежание громоздких деталей мы опустим явный вид этого соотношения.

6. Обсуждение результатов

Предметом наших рассмотрений являлась группа преобразований, действующая на линейных однородных дифференциальных уравнениях второго порядка. Как было показано выше, ее наличие является прямым следствием устойчивости уравнения Риккати относительно преобразований Мебиуса. Эта группа обладает многими интересными аналитическими свойствами.

Мы описали основные аналитические свойства этих преобразований. В частности, мы обсудили трансформацию основных объектов аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (регулярных особых точек, решений Фробениуса, матриц связи) под воздействием преобразований Мебиуса и показали, что эти преобразования сохраняют регулярные особые точки (в общем случае), позволяют создавать (или устранять) ложные особые точки, а также переводят решения Фробениуса исходного уравнения в решения Фробениуса конечного уравнения. Эти факты позволяют связать между собой и глобальные свойства исходного уравнения и его образа. При этом мы получили явное соотношение между решениями центральных двухточечных задач связи для исходного уравнения и его образа, установив, таким образом, квази-изоспектральные свойства преобразования Мебиуса. Наши результаты позволяют высказать предположение, что если параметры преобразования Мебиуса являются полиномами, то оно переводит фуксовы уравнения в фуксовы (с точностью до элементарного сдвига).

В качестве приложения полученных результатов мы показали, что уравнение Гойна, у которого одна особая точка является ложной порядка 2, может быть получено с помощью преобразования Мебиуса из гипергеометрического уравнения. Таким образом, мы в явном виде построили решения такого уравнения Гойна, которое обладает 4 свободными параметрами. Аналогичные результаты могут быть получены и в том случае, когда одна из особых точек уравнения Гойна является ложной более высокого порядка, а также для конфлюэнтного уравнения Гойна.

Преобразование (9) представляет собой группу, параметрами которой являются 2 независимые функции. Группы симметрий различных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и уравнений в частных производных, широко обсуждались в последние годы, см., например, книги [10, 11]. В отличие от преобразований, которым посвящены упомянутые книги, преобразование (9) является нелокальным, так как значение функции $u(z)$ восстанавливается по решениям исходного уравнения $v(z)$ с помощью интегрирования. Кроме того, оно связывает решения различных уравнений, будучи в определенном смысле [12] вариантом преобразования Бэклунда.

В недавних работах [13, 14], обсуждалось линейное преобразование решений ЛОДУ второго порядка, по существу являющееся частным случаем описанного в нашей работе преобразования Мебиуса. В работе [14] это преобразование использовалось для получения глобальной информации о решениях связанных этим преобразованием дифференциальных уравнений. В работе [13] описаны дискретные симметрии уравнения Гойна и, в частности, построены такие уравнения Гойна, которые можно (с помощью описанной в [13] симметрии) свести к гипергеометрическому уравнению. При этом построенное уравнение Гойна зависит от 3 свободных параметров, в то время как мы построили (также с помощью гипергеометрической функции) решения уравнения Гойна, зависящего от 4 свободных параметров.

Как стало известно авторам уже после подготовки работы к печати, в работе [15] были, на основе иных подходов, построены решения уравнения Гойна в случае, когда одна из особых точек является ложной.

В заключение отметим, что уравнение Риккати является устойчивым и относительно более общих дробно-рациональных преобразований. А именно, пусть $m(z)$ является решением уравнения Риккати. Положим $n(z) = P(z,m)/Q(z,m)$, где $P(z,m)$, $Q(z,m)$ – полиномы по m. Если $\deg P(z,m) = \deg Q(z,m)$, то при определенных условиях на коэффициенты этих полиномов функция $n(z)$ также является решением уравнения Риккати. Этот факт мы намереваемся обсудить в другом месте.

Авторы благодарны С. Ю. Славянову за интересные и полезные дискуссии и А. В. Шанину за информацию о работе [15].

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* т.1. Наука, М. (1967).
2. С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей.* Невский диалект, С.-Петербург (2002).
3. W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* John Wiley and Sons, Inc., New York (1965).
4. F. G. Trikomi, *Differential equations.* Blackie and Son, Turin (1961).
5. W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations.* Berlin, Heidelberg, Springer, New York (1999).
6. А. А. Болибрух, *21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем.* — Труды МИАН им. В. А. Стеклова **206(5)** (1995), 1–159.
7. M. V. Fedoryuk, *Asymptotic methods.* Springer, Berlin, Heidelberg (1993).
8. H. Flashka, A. C. Newell, — Comm. Math. Phys. **76** (1980), 65.

9. A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, *The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations.* Lect. Notes Math. **1191**, Berlin, Heidelberg (1986).
10. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уранений.* Наука, М. (1978).
11. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Мир, М. (1989).
12. А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике.* Мир, М. (1989).
13. A. Ishkanyan, K.-A. Suominen, — J. Phys. A **36** (2003), L81.
14. D. Schmidt, Y. Sibuya, T. J. Tabara, — Asymptotic Analysis **31** (2002), 211.
15. A. V. Shanin, R. V. Craster, — Euro. J. Appl. Math. **13** (2002), 617.

Kazakov A. Yu, Sirota Yu. N. Mobius transform for the linear ordinary differential equations.

The Mobius transform for the linear ordinary differential equations of the second order is examined. It is shown, that this transform has some quasi-isospectral properties. Solutions of the Heun equation with one false singularity are constructed.

С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Поступило 12 марта 2004 г.