Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 306, 2003 г.

В. Н. Старовойтов

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Посвящается
Всеволоду Алексеевичу Солонникову
в связи с его юбилеем

1. Введение

Задача о движении абсолютно твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости (далее – *задача A*) является предметом многих исследований и уже довольно хорошо изучена (см. [1–13]). В то же время, остается большое число вопросов, ответ на которые еще не найден. В частности, пока не доказана единственность слабого решения. Так как постановка задачи A включает уравнения Навье–Стокса, то не следует питать больших надежд, что мы в ближайшее время получим ответ на этот вопрос для случая трех пространственных переменных. Если же ограничиться двумерными течениями, то задача, казалось бы, должна иметь только одно решение. Как показано в данной работе, это не всегда так.

Следует различить два случая в зависимости от того, рассматриваем мы задачу без столкновений тел между собой и с границей (то есть до момента первого столкновения), или мы допускаем возможность столкновений. Первый случай является более простым и исследован подробнее. В частности, в [13] доказано, задача A с двумя пространственными переменными имеет единственное сильное решение на любом интервале времени, в течение которого тело не соударялось с границей. В данной работе рассмотрен второй, более общий, случай. Однако, представленный результат является скорее отрицательным, чем положительным. А именно, здесь показывается, что существующая обобщенная постановка задачи A допускает по крайней мере два слабых решения. Сильных же решений на интервале времени, включающем момент столкновения, существовать не может (см. [7, 11]).

Мы ограничимся исследованием двумерного случая задачи. Кроме того, мы предположим, что в объеме присутствует только одно твердое тело, плотности тела и жидкости совпадают и тождественно равны единице.

Для определения понятия обобщенного решения задачи А нам потребуются некоторые специальные пространства функций. Пусть $\mathbf{u}$ – какое–либо векторное поле в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $D(\mathbf{u})$ тензор, имеющий компоненты

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Если $\mathbf{u}$ – это поле скорости, то $D(\mathbf{u})$ называется тензором скоростей деформации. Этот тензор обладает одним важным для нас свойством, а именно, если $\mathcal{S}$ — связная область, то $D(\mathbf{u}) = 0$ в $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда существуют вектор $\mathbf{a}$ и кососимметрический тензор $\mathcal{Q}$, такие что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathcal{Q}\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. То есть поле скорости $\mathbf{u}$ в $\mathcal{S}$ соответствует твердотельному движению. Доказательство этого факта можно найти, например, в [14]. Таким образом, мы можем рассматривать твердое тело как среду, поле тензора скоростей деформации которой обращается в нуль. На этом свойстве тензора $D(\mathbf{u})$ и основана обобщенная постановка задачи.

Пусть $\mathcal{S}, \Omega$ – области в $\mathbb{R}^2$, такие что $\mathcal{S} \subset \Omega$. Мы будем использовать следующие функциональные пространства:

$$H(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\},$$
$$V(\Omega) = \{\mathbf{u} \in W_2^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \ \text{в} \ \Omega \quad \text{и} \ \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\},$$
$$K(\mathcal{S}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in V(\Omega) \mid D(\mathbf{u}) = 0 \ \text{в} \ \mathcal{S}\}.$$

Сопряженное к $V(\Omega)$ пространство обозначим через $V'(\Omega)$. Пространство $H(\Omega)$ отождествляется со своим сопряженным. Пространство $K(\mathcal{S}, \Omega)$ было введено и исследовано в [2, 3, 6] (см. также [7, 11]).

Пусть $\mathcal{S}(t)$ – область в Ω, которую занимает тело в момент времени $t \in [0, T]$, $T < \infty$. Так как тело является абсолютно твердым и движется без изменения формы, должно существовать семейство сохраняющих ориентацию изометрий $\mathcal{M}_{s,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\big(s,t \in [0,T]\big)$, таких что $\mathcal{S}(t) = \mathcal{M}_{s,t}\mathcal{S}(s)$. Мы будем использовать одно и то же обозначение для множеств $\mathcal{S}(t)$ и их характеристических функций. Таким образом,

$$\mathcal{S}(\mathbf{x},t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \mathcal{S}(t), \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}(t). \end{cases}$$

Наконец, обозначим через $L^q(0,T;K(\mathcal{S},\Omega))$ пространство, элементами которого являются функции $\mathbf{u} \in L^q(0,T;V(\Omega))$, такие что $\mathbf{u}(\cdot,t) \in K(\mathcal{S}(t),\Omega)$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Следующее определение обобщенного решения задачи A было введено в [2, 3].

Определение 1.1. Пара функций $\{\mathbf{u},\mathcal{S}\}$, таких что

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H(\Omega)) \cap L^2(0,T;K(\mathcal{S},\Omega)),$$
$$\mathcal{S} \in C^{0,1/q}(0,T;L^q(\Omega)), \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

является обобщенным решением задачи A, если

(1) $\mathcal{S}(\cdot,t)$ является характеристической функцией какой-либо области $\mathcal{S}(t) \subset \Omega$;

(2) существует семейство сохраняющих ориентацию изометрий $\mathcal{M}_{s,t} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\big(s,t \in [0,T]\big)$, таких что

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{M}_{s,t}\mathcal{S}(s) \quad \text{для всех} \quad s,t \in [0,T]; \tag{1.1}$$

(3) интегральные тождества

$$\int\limits_{\Omega_T} \Big(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_t + \big(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - D(\mathbf{u})\big) : D(\mathbf{w}) + \mathbf{g}\cdot\mathbf{w}\Big)\,d\mathbf{x}dt = -\int\limits_{\Omega} \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{w}_0\,d\mathbf{x}, \tag{1.2}$$

$$\int\limits_{\Omega_T} \mathcal{S}\left(\eta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\eta\right)d\mathbf{x}dt = -\int\limits_{\Omega} \mathcal{S}_0\eta_0\,d\mathbf{x} \tag{1.3}$$

выполняются для любых функций

$$\mathbf{w} \in W_2^1(\Omega_T) \cap L^2(0,T;K(\mathcal{S},\Omega))$$

и $\eta \in C^1(\Omega_T)$, таких что $\mathbf{w}|_{t=T} = 0$, $\eta|_{t=T} = 0$.

Здесь $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $\mathbf{g}$ – вектор-функция, задающая внешние массовые силы, через $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathcal{S}_0$ и η_0 обозначены значения соответствующих функций при $t = 0$.

Следующий результат о разрешимости задачи A был доказан в [2, 3] (см. также [7] и [10]).

Теорема 1.2. *Пусть Ω и $\mathcal{S}_0$ являются ограниченными связными областями класса $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}_0 \subset \Omega$ и $\mathbf{u}_0 \in H(\Omega)$. Тогда для произвольного $T \in (0, \infty)$ существует обобщенное решение задачи A. Более того, изометрии $\mathcal{M}_{s,t}$ Липшиц-непрерывны по s и t.*

Основным результатом данной работы является доказательство того, что задача A разрешима неоднозначно. В следующих двух параграфах будет доказана сформулированная ниже теорема.

Теорема 1.3. *Существуют $\mathcal{S}_0 \in \Omega$, $\mathbf{u}_0 \in H(\Omega)$ и $\mathbf{g} \in L^2(0, T; V'(\Omega))$, такие что задача A допускает по крайней мере два обобщенных решения.*

Идея доказательства состоит в следующем. Мы предположим, что области Ω и $\mathcal{S}$ являются кругами. В параграфе 2 будет построено поле скорости, при котором тело подходит к границе $\partial\Omega$ области Ω, касается ее в момент времени $t_* \in (0, T)$ и затем отходит. Предложение 2.4, доказанное в конце параграфа, утверждает, что существует поле внешних массовых сил $\mathbf{g}$, при котором построенное поле скорости является обобщенным решением задачи A. Далее, в параграфе 3, мы покажем, что существует другое решение задачи с той же функцией $\mathbf{g}$. Это решение совпадает с первым до момента t_*, а далее оно продолжается таким образом, что тело не отходит от стенки. Возможность существования решений второго типа была отмечена в [12]. С физической точки зрения эти решения не являются приемлемыми, так как факт прилипания тела к границе области течения предполагает наличие каких-то связей, которые не присутствуют в постановке задачи. Решение должно само выбирать, остается тело у стенки или отходит от нее. Таким образом, определение 1.1 должно включать какое-либо дополнительное соотношение, которое отсеивало бы “неправильные” решения.

2. Построение первого решения

Обозначим через $B_\rho(\mathbf{b})$ открытый круг радиуса ρ с центром в точке $\mathbf{b}$. Предположим, что $\Omega = B_R(\mathbf{0})$ и $\mathcal{S}(t) = B_r(\mathbf{a}(t))$, где $R > r > 0$, $\mathbf{0} = (0, 0)$ и $\mathbf{a}(t) = (a(t), 0)$. Мы выберем позднее такую функцию $a \in W^1_\infty(0, T)$, что $\mathcal{S}(t) \subset \Omega$ для всех t, то есть, $|a(t)| \leqslant R - r$. Часто вместо функции $a(t)$ нам будет более удобно пользоваться функцией $\sigma(t) = a(t)(R - r)^{-1}$. Предположим также, что в некоторый момент времени $t_* \in (0,T)$ тело касается стенки, то есть, $\operatorname{dist}(\mathcal{S}(t_*), \partial\Omega) = 0$. Заметим, что $\sigma(t) \in [0,1)$ при $t \in [0,t_*)$, и $\sigma(t) \to 1$, если $t \to t_*$. Определим отображение $\mathbf{F}(\cdot,t)$, которое каждой точке $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ ставит в соответствие некоторую точку $\mathbf{x} \in \Omega$ по правилу:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1(\xi_1,\xi_2,t) = \xi_1 + \sigma(t)\Big(R - \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\Big),\\
x_2 &= F_2(\xi_1,\xi_2,t) = \xi_2.
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что $\mathbf{F}(\Omega,t) = \Omega$ и

$$
\mathcal{S}(t) = \mathbf{F}\big(B_r(\mathbf{0}),t\big). \tag{2.1}
$$

Кроме того, если $\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega$, то $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{\xi}$. Обратное отображение $\mathbf{G}$ выглядит так:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= G_1(x_1,x_2,t) = \frac{1}{1-\sigma^2}\Big(x_1 - \sigma R + \sigma\sqrt{x_2^2(1-\sigma^2) + (\sigma R - x_1)^2}\Big),\\
\xi_2 &= G_2(x_1,x_2,t) = x_2,
\end{aligned}
$$

где под σ подразумевается $\sigma(t)$. Таким образом, $\mathbf{G}(\Omega,t) = \Omega$ и $\mathbf{G}\big(\mathcal{S}(t),t\big) = B_r(\mathbf{0})$. Поскольку отображение $\mathbf{G}$ определено только при $\sigma \in (-1,1)$, мы будем сначала считать, что $t \in [0,t_*)$.

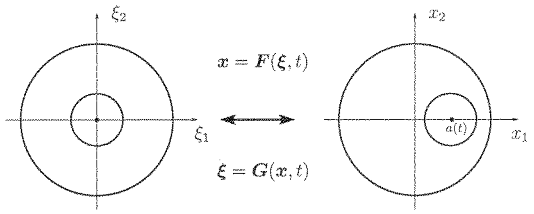

Рис. 1. Отображения $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.

Заметим, что мы не рассматриваем (x_1,x_2,t) и (ξ_1,ξ_2,t) как эйлеровы и лагранжевы координаты. Просто в координатах $\boldsymbol{\xi}$ область $\Omega\backslash\mathcal{S}(t)$ выглядит более симметричной, а именно, области Ω и $\mathcal{S}$ являются концентрическими кругами (см. рис. 1).

Свяжем с $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2)$ полярные координаты (ρ,θ):

$$
\xi_1 = \rho\cos\theta, \quad \xi_2 = \rho\sin\theta.
$$

В этих координатах якобиан отображений $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ имеет простой вид:

$$J_F(\boldsymbol{\xi}, t) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = 1 - \sigma(t)\cos\theta,$$

$$J_G\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)} = J_F^{-1} = \frac{1}{1-\sigma(t)\cos\theta}.$$

Отображение $\mathbf{F}$ задает изменение геометрии области течения. Мы будем предполагать, что тело движется без вращения от центра области Ω к краю. Таким образом, существует семейство изометрий $\mathcal{M}_{s,t}$, удовлетворяющих (1.1). Эти изометрии представляют собой сдвиги области $\mathcal{S}$ вдоль оси x_1. Построим поле скорости $\mathbf{u}$, соответствующее рассматриваемой ситуации. Оно должно быть таким, что

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \qquad \text{и} \qquad D(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{S}.$$

Так как в двумерном случае каждому полю скорости можно однозначно сопоставить соответствующую функцию тока, мы построим сначала функцию тока ψ, а затем вычислим по ней поле скорости $\mathbf{u}$.

Пусть $\lambda : [0,\infty) \to [0,1]$ – гладкая функция, такая что $\lambda(\rho) = 1$ при $\rho < r$ и $\lambda'(r) = \lambda(R) = \lambda'(R) = 0$. Подходит, например, функция

$$\lambda(\rho) = (R-r)^{-3}(\rho - R)^2(2\rho - 3r + R).$$

Если, в частности, $R = 3$ и $r = 1$, тогда $\lambda(\rho) = \frac{1}{4}\rho(\rho-3)^2$. Определим функцию тока:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \dot a(t)\, x_2\, \varphi(\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)),$$

где $\varphi(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\big(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\big)$ и $\dot a = da/dt$. Линии уровня этой функции схематично показаны на рис. 2.

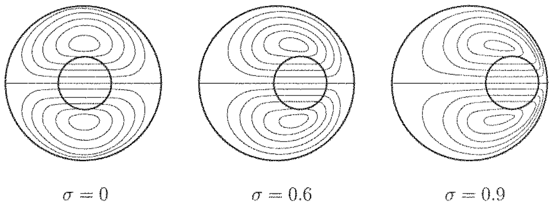

Рис. 2. Линии уровня функции ψ при различных значениях σ.

Соответствующее поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla_x^{\perp}\psi(\mathbf{x},t)$ имеет следующие компоненты

$$u_1(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \dot{a}(t)\,\varphi\big(\mathbf{G}(\mathbf{x},t)\big) + \dot{a}(t)\,x_2\,\mathbf{G}_{x_2}\cdot\nabla_\xi\varphi(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{G}(\mathbf{x},t)},$$
$$u_2(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\dot{a}(t)\,x_2\,\mathbf{G}_{x_1}\cdot\nabla_\xi\varphi(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{G}(\mathbf{x},t)}. \tag{2.3}$$

Заметим, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям (2.2). Исследуем свойства функции $\mathbf{u}$.

Лемма 2.1. *Функция* $\mathbf{u}$ *принадлежит пространству* $L^\infty(0,t_*; L^2(\Omega))$ *тогда и только тогда, когда* $\dot{\sigma} \in L^\infty(0,t_*)$.

Норму функции $\mathbf{u}$ в пространстве $L^2(\Omega)$ можно вычислить явно:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \mu_1(R,r)\,\nu_1(\sigma)\,|\dot{\sigma}|^2, \tag{2.4}$$

где $\mu_1(R,r) = \int_r^R \big(\lambda'(\rho)\big)^2\rho^3\,d\rho < \infty$ и

$$\nu_1(\sigma) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{1-\sigma\cos\theta}\,d\theta = 2\pi\,\frac{1-\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma^2} = 2\pi\,\frac{1}{1+\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Поскольку $\nu_1(\sigma) \in [\pi, 2\pi]$ для любого значения σ, утверждение леммы справедливо.

Лемма 2.2. *Если* $(1-\sigma)^{-3/2}|\dot{\sigma}|^2 \in L^1(0,t_*)$, *то функция* $\mathbf{u}$ *принадлежит пространству* $L^2(0,t_*;V(\Omega))$.

Для доказательства леммы достаточно оценить $\Delta\psi$ в $L^2(0,t_*; L^2(\Omega))$. После довольно громоздких, но простых вычислений мы получим оценку:

$$\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \mu_2(R,r)\nu_2(\sigma)\,|\dot{\sigma}|^2,$$

где $\nu_2(\sigma) = (1-\sigma)^{-3/2}$ и μ_2 — положительная константа, зависящая только от R и r. Утверждение леммы сразу следует из этой оценки.

Лемма 2.3. *Если* $\ddot{\sigma} \in L^2(0,t_*)$, *тогда* $\mathbf{u}_t \in L^2(0,t_*;V'(\Omega))$.

Существует зависящая только от R и r константа $\mu_3(R,r)$, такая что

$$\|\psi_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \mu_3(R,r)\big(|\ddot{\sigma}| + |\dot{\sigma}|^2\big).$$

Утверждение леммы следует из этой оценки, так как принадлежность $\ddot{\sigma}$ пространству $L^2(0,t_*)$ влечет ограниченность $\dot{\sigma}$.

Определим функцию σ следующим образом

$$\sigma(t) = 1 - (t-t_*)^4\, T^{-4}. \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, что $|\sigma(t)| < 1$ при $t \in [0,t_*) \cup (t_*,T]$ и $\sigma(t_*) = 1$. Кроме того, σ удовлетворяет условиям лемм 2.1, 2.2 и 2.3. Следовательно, функция $\mathbf{u}$, определенная в (2.3), принадлежит пространству $L^\infty(0,t_*;H(\Omega))\cap L^2(0,t_*;V(\Omega))$, а ее производная по времени – пространству $L^2(0,t_*;V'(\Omega))$. Поэтому функция $\mathbf{u}$ слабо непрерывна по t в $L^2(\Omega)$. Более того, $\mathbf{u}$ сильно непрерывна по t в $L^2(\Omega)$, так как равенство (2.4) влечет непрерывность $\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ по t.

Доопределим функцию $\mathbf{u}$ при $t = t_*$ по непрерывности, а далее, при $t \in (t_*,T]$, опять же с помощью равенств (2.3) с функцией σ, заданной выражением (2.5). Полученная таким образом функция $\mathbf{u}$ обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H(\Omega))\cap L^2(0,T;V(\Omega)), \qquad \mathbf{u}_t \in L^2(0,T;V'(\Omega)). \tag{2.6}$$

Кроме того,

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;K(\mathcal{S},\Omega)).$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть функции σ, $\mathbf{u}$ и $\mathcal{S}$ заданы равенствами* (2.5), (2.3) *и* (2.1), *соответственно. Тогда существует функция* $\mathbf{g} \in L^2(0,T;V'(\Omega))$, *такая что пара $\{\mathbf{u},\mathcal{S}\}$ является обобщенным решением задачи A.*

Доказательство. Сначала заметим, что тождество (1.3) выполняется по построению. Что касается тождества (1.2), в силу (2.6) оно может быть переписано следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega_T} \Big(\mathbf{u}_t\cdot\mathbf{w} - \big(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} - D(\mathbf{u})\big) : D(\mathbf{w})\Big)\, d\mathbf{x}dt = \int\limits_{\Omega_T} \mathbf{g}\cdot\mathbf{w}\, d\mathbf{x}dt. \tag{2.7}$$

Мы должны доказать существование функции $\mathbf{g}$, такой что равенство (2.7) выполняется для всех функций $\mathbf{w} \in L^2(0,T;K(\mathcal{S},\Omega))$.

В силу (2.6), левая часть равенства (2.7) представляет собой непрерывный линейный функционал в $L^2(0,T;V(\Omega))$, действующий на функцию $\mathbf{w}$. Поэтому существует $\mathbf{g} \in L^2(0,T;V'(\Omega))$, такая что (2.7) имеет место для всех $\mathbf{w} \in L^2(0,T;V(\Omega))$, а следовательно, и для всех $\mathbf{w} \in L^2(0,T;K(\mathcal{S},\Omega))$. Предложение доказано. $\bullet$

3. Построение второго решения

В предыдущем параграфе мы построили решение задачи A с вектором массовых сил $\mathbf{g}$ из предложения 2.4. Сейчас мы докажем, что существует другое решение задачи с той же функцией $\mathbf{g}$. Обозначим поле скорости для нового решения через $\mathbf{v}$, а область, занятую твердым телом – через $\mathcal{R}$. Положим

$$\mathbf{v}(\cdot,t)=\mathbf{u}(\cdot,t),\quad \mathcal{R}(t)=\mathcal{S}(t)\qquad \text{при}\quad t\in[0,t_*]. \tag{3.1}$$

Напомним, что в момент времени t_* тело касается стенки, то есть, $\operatorname{dist}(\mathcal{S}(t_*),\partial\Omega)=0$. Определим функции $\mathbf{v}$ и $\mathcal{R}$ при $t\in(t_*,T]$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(t)=\mathcal{R}_*=\mathcal{S}(t_*)\qquad \text{при}\quad t\in(t_*,T],\\ &\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=0\qquad \text{при}\quad \mathbf{x}\in\mathcal{R}(t),\quad t\in(t_*,T],\end{aligned} \tag{3.2}$$

в области $\Omega\setminus\mathcal{R}_*$ функция $\mathbf{v}$ будет решением уравнений Навье-Стокса с правой частью $\mathbf{g}$ и с нулевыми граничными значениями. Так как $\mathbf{u}(\mathbf{x},t_*)=0$ для всех $\mathbf{x}\in\Omega$, то для любой функции $\mathbf{w}\in L^2(t_*,T;V(\Omega\setminus\mathcal{R}_*))$ должно выполняться интегральное тождество:

$$\int\limits_{t_*}^{T}\int\limits_{\Omega\setminus\mathcal{R}_*}\Big(\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{w}-\big(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}-D(\mathbf{v})\big):D(\mathbf{w})-\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}\Big)\,d\mathbf{x}dt=0. \tag{3.3}$$

Как следует из общей теории уравнений Навье–Стокса (см. [15]), существует единственная функция $\mathbf{v}\in L^\infty(t_*,T;H(\Omega\setminus\mathcal{R}_*))\cap L^2(t_*,T;V(\Omega\setminus\mathcal{R}_*))$, такая что $\mathbf{v}_t\in L^2(t_*,T;V'(\Omega\setminus\mathcal{R}_*))$ и справедливо тождество (3.3). То, что область $\Omega\setminus\mathcal{R}_*$ – не гладкая, не имеет значения, так как мы рассматриваем задачу с нулевыми краевыми условиями.

Таким образом, мы определили функцию $\mathbf{v}$ всюду в Ω_T, а функцию $\mathcal{R}$ – при всех $t\in[0,T]$.

Предложение 3.1. *Функции $\mathbf{v}$ и $\mathcal{R}$ образуют обобщенное решение задачи A.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{v}=0$ в $\mathcal{R}(t)$ при $t\in[t_*,T]$, то $\mathbf{v}\in L^2(0,T;K(\mathcal{R},\Omega))$. Таким образом, нам необходимо проверить лишь выполнение тождеств (1.2) и (1.3), заменив в них $\mathbf{u}$ и $\mathcal{S}$ на $\mathbf{v}$ и $\mathcal{R}$, соответственно. Вследствие предложения 2.4 и соотношений (3.1), достаточно проводить интегрирование по времени в этих тождествах от t_* до T. Тождество (1.3) выполняется благодаря (3.2), а (1.2) может быть переписано следующим образом:

$$\int_{t_*}^{T}\int_{\Omega}\Big(\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{w}-\big(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}-D(\mathbf{v})\big):D(\mathbf{w})-\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}\Big)\,d\mathbf{x}dt=0. \qquad (3.4)$$

Проверим, что (3.4) выполняется для всех $\mathbf{w}\in L^2(t_*,T;\,K(\mathcal{R},\Omega))$.

Заметим, что (3.4) и (3.3) отличаются только областью интегрирования и выбором пробных функций. Напомним одно свойство функций из пространства $K(\mathcal{R},\Omega)$ (см. [2, 3, 7, 11]).

Лемма 3.2. *Пусть* $\Omega,\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^2$ *– связные области класса* $C^{1,\alpha}$, $\alpha\in[\frac{2}{3},1]$, *такие что* $\mathcal{R}\subset\Omega$ *и* $\operatorname{dist}(\mathcal{R},\partial\Omega)=0$. *Если* $\mathbf{w}\in K(\mathcal{R},\Omega)$, *то* $\mathbf{w}(\mathbf{x})=0$ *при* $\mathbf{x}\in\mathcal{R}$.

Из этой леммы и (3.3) сразу следует справедливость тождества (3.4).

Предложение доказано. •

Очевидно, что построенное решение $\{\mathbf{v},\mathcal{R}\}$ задачи A отличается от решения $\{\mathbf{u},\mathcal{S}\}$ из предыдущего параграфа. Таким образом, теорема 1.3 доказана.

Литература

1. Н. В. Юдаков, *Разрешимость задачи о движении твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости.* — Динамика сплошной среды, **18** (1974), 249–253.
2. K.-H. Hoffmann, V. N. Starovoitov, *On a motion of a solid body in a viscous fluid.* — Preprint M9617, Technische Universität München, (1996).
3. K.-H. Hoffmann, V. N. Starovoitov, *On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two–dimensional case.* — Adv. Math. Sci. Appl., **9** No. 2 (1999), 633–648.
4. G. P. Galdi, *On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid.* — Arch. Ration. Mech. Anal., **148**, No. 1 (1999), 53–88.
5. B. Desjardins, M. J. Esteban, *Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid.* — Arch. Ration. Mech. Anal., **146**, No. 1 (1999), 59–71.
6. K.-H. Hoffmann, V. N. Starovoitov, *Zur Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit.* — Documenta Mathematica, **5** (2000), 15–21.
7. В. Н. Старовойтов, *Нерегулярные задачи гидродинамики.* — Докторская диссертация, Новосибирский государственный университет, (2000).
8. C. Conca, J. A. San Martin, M. Tucsnak, *Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid.* — Comm. Partial Differential Equations, **25**, No. 5-6 (2000), 1019–1042.
9. M. D. Gunzburger, H.-C. Lee, G. Seregin, *Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions.* — J. Math. Fluid Mech., **2**, No. 3 (2000), 219–266.

10. J. A. San Martin, V. N. Starovoitov, M. Tucsnak, *Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid.* — Arch. Ration. Mech. Anal., **161**, No. 2 (2002), 113–147.
11. V. N. Starovoitov, *Behavior of a rigid body in an incompressible viscous fluid near a boundary.* — To appear in Proceedings of the International Conference "Free boundary problems: theory and applications", Trento, Italy (2002).
12. E. Feireisl, *On the motion of rigid bodies in a viscous fluid.* — Applications of Mathematics, **47**, No. 6 (2002), 463–484.
13. T. Takahashi, *Existence of strong solutions for the problem of a rigid–fluid system.* — C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I, **336**, No. 5 (2003), 453–458.
14. R. Temam, *Problèmes mathématiques en plasticité.* — Méthodes Mathématiques de l'Informatique, 12. Publié avec le concours du C.N.R.S. Paris: Gauthier-Villars. Bordas. VII, (1983).
15. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* — Наука, М., (1970).

Starovoitov V. N. Non-uniqueness of the solution to the problem of a motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid.

This paper is devoted to the investigation of the problem on a motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. It is proved that there exist at least two weak solutions of this problem, if the collisions of the body with the boundary of the flow domain are allowed. These solutions have different behavior of the body after the collision. Namely, for the first solution, the body goes away from the boundary after the collision. In the second solution, the body and the boundary remain in contact.

Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева
СО РАН, Новосибирск, Россия
Center of advanced
European studies and research,
Bonn, Germany

E-mail: starovoitov@caesar.de

Поступило 20 октября 2003 г.