Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

Н. С. Семенов

ОДИН АРГУМЕНТ В ПОЛЬЗУ ГУРВИЦЕВОСТИ $\mathrm{G_{sc}}(\mathrm{E}_6, q)$

Введение

Рассмотрим (2,3,7)-треугольную группу

$$\Delta(2,3,7) = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1 \rangle.$$

Неединичная группа G называется **(2,3,7)-порожденной** (соответственно **(2,3)-порожденной**), если она является эпиморфным образом группы $\Delta(2,3,7)$ (соответственно порождается инволюцией и элементом порядка три). Группа G называется **гурвицевой**, если она конечна и (2,3,7)-порождена. (2,3)-порожденные группы возникают как факторы классической модулярной группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, которая изоморфна свободному произведению циклических групп порядков 2 и 3.

В 1893 году Гурвиц доказал, что группа автоморфизмов алгебраической кривой рода $g > 1$ всегда имеет порядок, не превосходящий $84(g-1)$, и конечная группа порядка $84(g-1)$ может действовать на кривой рода g тогда и только тогда, когда она является образом $\Delta(2,3,7)$.

Долгое время были известны лишь отдельные примеры (2,3)- и (2,3,7)-порожденных групп и считалось, что таких групп очень мало. В последние же 10–15 лет были получены совершенно удивительные результаты о порождении групп типа Ли над конечнопорожденными кольцами.

Большим прорывом здесь стал перестановочный метод, придуманный Тамбурини в 80-ые годы. С помощью этого метода удалось выяснить, что очень многие классические группы больших рангов (2,3)-порождены. Совместными усилиями Тамбурини, Ди Мартино, Уилсона, Гавиоли, Малле, Вавилова и других математиков было доказано, что следующие группы (2,3)-порождены:

- знакопеременная группа A_n при $n \neq 3, 6, 7, 8$ (результат Миллера 1901 года);

- группы Шевалле $G_2(q)$ и скрученные группы ${}^2G_2(q)$ (Малле);
- проективные специальные линейные группы $PSL(2, q)$ при $q \neq 9$ и $PSL(3, q)$ при $q \neq 4$ (Макбет, Гарбе, Коэн);
- группы $SL(4, q)$, q нечетно (Тамбурини, Вассалло);
- специальные линейные группы $SL(n, q)$, $n \geqslant 25$ (Тамбурини);
- специальные линейные группы $SL(n, q)$, $n \geqslant 5$, q нечетно (Ди Мартино, Вавилов);
- проективные симплектические группы $PSp(4, q)$, $q = p^m$, $p \neq 2, 3$ (Каццола, Ди Мартино);
- группы $Sp(2n, q)$ при $n \geqslant 37$, $q = p^m$, $p \neq 2$; $\Omega(2n+1, q)$, $n \geqslant 49$; $SU(2n+1, q^2)$, $n \geqslant 49$, q нечетно; $\Omega^-(2n+2, q)$, $n \geqslant 55$, q нечетно (Тамбурини, Дж.Уилсон, Гавиоли);
- группы $\Omega^+(2n, q)$ и $SU(2n, q^2)$, $n \geqslant 37$;
- все простые спорадические группы, кроме M_{11}, M_{22}, M_{23} и McL (Уолдар, Р.Уилсон).

Весьма интересен результат Либека–Шалева [12] о том, что вероятность порождения конечной простой классической группы G, отличной от $PSp(4, q)$, случайно выбранными инволюцией и элементом 3-го порядка стремится к 1, когда $|G| \to \infty$.

Еще более интересным является вопрос гурвицевости групп. Этот вопрос оказался чрезвычайно трудным, и в первую очередь здесь следует отметить замечательный результат Г. Хигмена и М. Кондера [3] утверждающий, что все знакопеременные группы A_n, $n \geqslant 168$, гурвицевы. Совсем недавно А. Луккини, М. К. Тамбурини и Дж. Уилсон, используя результат Хигмена–Кондера, доказали, что почти все классические группы над конечным полем достаточно больших рангов гурвицевы. На самом деле ими получены гораздо более общие результаты, связанные с (2,3,7)-порождением элементарных групп $E(n, R)$ над конечнопорожденными кольцами (см. [13–15]). Методы их работ основаны на диаграммах Хигмена–Кондера. Так, в настоящее время известно, что группы

$$Sp(2n, q), \quad \Omega^+(2n, q), \quad SU(2n, q), \quad \Omega(2n+7, q)$$

гурвицевы при $n \geqslant 371$, группа $SU(2n+7, q)$ гурвицева при $n \geqslant 371$ и нечетном q, группы $SL(n, q)$ и $SL(n, \mathbb{Z})$ (2,3,7)-порождены при $n \geqslant 287$. Кроме того, Малле изучал вопросы порождения исключительных групп Шевалле, а именно, он получил красивые результаты о гурвицевости групп $G_2(q)$, $q \geqslant 5$; ${}^2G_2(q)$, $q > 3$; ${}^3D_4(q)$ для $q = p^m$, $p \neq 3$, $q \neq 4$ и ${}^2F_4(2^{2m+1})'$ для $m \equiv 1(3)$.

Эти результаты являются самым крупным продвижением в понимании гурвицевых групп за последние сто лет со времен Клейна и Гурвица.

В противоположном направлении необходимо отметить следующий результат Ди Мартино–Тамбурини–Залесского (см. [9]): группы $SL(n, \mathbb{Z})$ не являются гурвицевыми при $n \leqslant 19$, $n = 22$. Эта теорема послужила отправной точкой в нашем исследовании группы $G_{sc}(E_6, q)$. Нами получено следующее утверждение:

Теорема. *Пусть $F = \mathbb{F}_q$, где $q = p^n$ и $p = \operatorname{char} F \neq 2, 3, 7$. Предположим также, что q сравнимо с 2 по модулю 3 и сравнимо с 3, 5 или 6 по модулю 7. Обозначим через $\omega \in \overline{F}$ — первообразный корень из 1 степени 3, а через $\eta \in \overline{F}$ — первообразный корень из 1 степени 7. Если $G_{sc}(E_6, F) = \langle x, y\rangle$, где $x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$, то собственные числа у элементов x, y, xy следующие:*

- *у инволюции x – два собственных числа: 1 и -1 с кратностями 15 и 12 соответственно,*
- *у элемента y – три собственных числа: $1, \omega, \omega^2$ с одинаковыми кратностями 9,*
- *у произведения xy – семь собственных чисел: 1 с кратностью 3 и $\eta, \ldots, \eta^6$ – все кратности 4.*

Наложенные в теореме условия на q необходимы для того, чтобы кратности сопряженых собственных чисел у элементов порядков 3 и 7 совпадали.

Приведенный результат позволяет выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза. $G_{sc}(E_6, q)$ – гурвицева группа.

1. Предварительные сведения: формула Скотта и симметрический квадрат

Пусть $f\colon H \to GL(n, F)$ представление группы H над полем F. Для любого подмножества X группы H определим d_V^X как размерность подпространства в пространстве представления $V = F^n$, элементы которого остаются неподвижными при действии на них $f(X)$. Другими словами,

$$d_V^X = \dim_F\{v \in V \mid \forall\ x \in X\ f(x)(v) = v\}.$$

Аналогично определяется $\widehat{d}_V^X$ по отношению к дуальному представлению

$$\widehat{f}: H \to \mathrm{GL}(n, F),\ \widehat{f}(h) = (f(h^{-1}))^T.$$

Теперь можно сформулировать утверждение, которое будет иметь большое значение в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $f: H \to \mathrm{GL}(n, F)$ *– представление группы* $H = \langle x, y\rangle$. *Тогда*

$$d_V^x + d_V^y + d_V^{xy} \leqslant \dim V + d_V^H + \widehat{d}_V^H.$$

Эта теорема – результат Скотта (теорема 1, [20]).

Обозначим через $\overline{F}$ алгебраическое замыкание поля F характеристики, отличной от 2. Рассмотрим $\overline{V} = \overline{F}^n$ и выберем базис $\{v_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ пространства $\overline{V}$ над $\overline{F}$. Через S обозначим симметрический квадрат $\overline{V}$, который мы истолковываем как подпространство в $\overline{V} \otimes \overline{V}$, порожденное множеством

$$\{v_i \otimes v_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

(напомним, что $\mathrm{char}\, F \neq 2$).

Через E обозначим внешний квадрат, который истолковывается как подпространство в $\overline{V} \otimes \overline{V}$, порожденное множеством

$$\{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Легко доказать, что $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim E = \frac{n(n-1)}{2}$ и $\overline{V} \otimes \overline{V} = S + E$, причем каждое слагаемое инвариантно относительно действия $g(u \otimes v) = g(u) \otimes g(v)$ для любого $g \in \mathrm{GL}(n, \overline{F})$. Такое действие называется диагональным.

Лемма 2. *Пусть* H *– неприводимая подгруппа в* $\mathrm{GL}(n, \overline{F})$*, которая оставляет неподвижным ненулевой элемент из* S*. Тогда, если* $p = \mathrm{char}\, F \neq 2$*, то* H *содержится в ортогональной группе. Кроме того, тождественное представление* H *эквивалентно дуальному.*

Доказательство этой леммы содержится в [9].

Для матрицы $A \in M(n, \overline{F})$ определим d_S^A как размерность подпространства в симметрическом квадрате $\overline{V}$, которое поточечно остается неподвижным под действием A. Следующая лемма понадобится нам для конкретных вычислений в $\mathrm{G_{sc}}(\mathrm{E}_6, F)$.

Лемма 3. *Пусть $g \in \mathrm{GL}(n, F)$ – элемент конечного порядка, взаимно простого с $\mathrm{char}\, F$. Если ν – собственное число g, то обозначим через m_ν кратность ν (здесь собственные числа и их кратности считаются в $\overline{F}$). Тогда*

$$d_S^g = \frac{m_1(m_1+1) + m_{-1}(m_{-1}+1)}{2} + \sum m_\nu m_{\nu^{-1}},$$

где сумма берется по всем парам (ν, ν^{-1}) собственных чисел g в $\overline{F}$ таким, что $\nu \neq \nu^{-1}$.

Эта лемма взята из [9]. Она доказывается непосредственной проверкой.

2. 27-мерное представление E_6

Пусть $F = \mathbb{F}_q$, где $q = p^n$ и $p = \mathrm{char}\, F \neq 2, 3, 7$. Теория, связанная с представлениями групп Шевалле, их старшими весами, решетками весов хорошо освещена во многих математических работах (см., например, [2]), и мы будем предполагать, что читатель с ней знаком.

Известно, что представление односвязной группы Шевалле $\mathrm{E}_6(F) = \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, F)$ со старшим весом $\overline{\omega}_1$ 27-мерно. Рассмотрим весовую диаграмму этого представления (см. [24, 25]). С ее помощью мы постараемся найти все жордановы формы у всех инволюций и элементов порядка 3 и 7 из $\mathrm{E}_6(F)$.

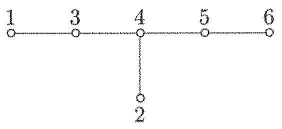

Рис. 1. Система корней E_6.

Начиная с этого места, мы рассматриваем $\mathrm{E}_6(F)$ как подгруппу в $\mathrm{GL}(27, F)$. Более того, когда это необходимо, мы будем предполагать, что $\mathrm{E}_6(F)$ вложена в $\mathrm{GL}(27, \overline{F})$.

В наших предположениях относительно F все элементы $\mathrm{E}_6(F)$ порядков 2, 3, 7 полупросты, то есть сопряжены с некоторыми элементами фиксированного максимального тора $\mathrm{E}_6(\overline{F})$. Рассмотрим полупростые корневые элементы $h_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha \in \mathrm{E}_6$, $\varepsilon \in \overline{F}$. Из

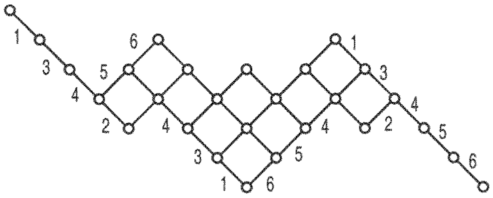

Рис. 2. Весовая диаграмма $(\mathrm{E}_6, \overline{\omega}_1)$.

сказанного выше вытекает, что для того, чтобы получить полный список распределения собственных чисел у инволюций, элементов порядка 3 и элементов порядка 7 из $\mathrm{E}_6(F)$ необходимо найти жордановы формы у элементов тора вида $h_{\alpha_1}(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot h_{\alpha_6}(\varepsilon_6)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ — простые корни системы корней E_6. При этом для инволюций $\varepsilon_i = \pm 1$, для элементов порядка три $\varepsilon_i = 1, \omega, \omega^2$ и для элементов порядка семь $\varepsilon_i = 1, \eta, \ldots, \eta^6$, где $\omega \in \overline{F}$ – первообразный корень из 1 степени 3, а $\eta \in \overline{F}$ – первообразный корень из 1 степени 7.

Начиная с этого места, мы предполагаем, что q сравнимо с 2 по модулю 3 и сравнимо с 3, 5 или 6 по модулю 7. Тогда любой элемент $h \in \mathrm{E}_6(q)$ порядка 3 вещественнен, а любой элемент $g \in \mathrm{E}_6(q)$ порядка 7 либо вещественнен, либо рационален (см. [9]). Напомним, что $g \in \mathrm{GL}(n, F)$ называется вещественным (соответственно рациональным), если он полупрост и сопряжен с g^{-1} (соответственно полупрост и сопряжен со всеми своими нетривиальными степенями).

С помощью специальной компьютерной программы был получен полный список всех различных жордановых форм полупростых элементов $\mathrm{E}_6(F)$ порядков 2, 3 и 7. Этот список воспроизводится в таблицах ниже.

Для матрицы $A \in \mathrm{GL}(27, F)$ порядка 2, 3 или 7 обозначим

$$d_V^A = \dim_F \{v \in F^{27} \mid Av = v\},$$

$$d_S^A = \dim_F \{v \in S \mid Av = v\}.$$

Здесь S обозначает симметрический квадрат $\overline{F}^{27}$, а действие матрицы A на элементы $V = F^{27}$ и S обычные. Легко видеть, что d_V^A равно кратности собственного числа 1 в матрице

$A \in \mathrm{GL}(27, F)$, а d_S^A легко вычисляется по лемме 3, если известна жорданова форма A. Эти данные также включены в таблицы ниже.

В своем минимальном представлении группа $\mathrm{E}_6(F)$ абсолютно неприводима и не содержится в ортогональной группе. Поэтому правая часть в формуле Скотта (лемма 1), примененной к композиции естественного представления $\mathrm{E}_6(F)$ с представлением $\mathrm{GL}(27, F)$ на симметрическом квадрате $\overline{F}^{27}$, равна $\dim S$. Это легко следует из леммы 2.

Итак, рассмотрим композицию естественного представления $\mathrm{E}_6(F) \to \mathrm{GL}(27, F)$ с симметрическим квадратом $\mathrm{GL}(27, F) \to \mathrm{GL}(S)$. Из таблиц легко видеть, что наименьшее значение d_S^x для инволюции x – это 198, наименьшее значение d_S^y для элемента 3-го порядка y — 126. По формуле Скотта (лемма 1)

$$d_S^{xy} \leqslant \dim S - d_S^x - d_S^y \leqslant 378 - 198 - 126 = 54,$$

то есть мы доказали теорему, данную во введении.

Автору не удалось исключить последний оставшийся в теореме случай. Более того, рассмотрение других представлений $\mathrm{E}_6(q)$ таких, как присоединенное представление, внешний квадрат, композиция какого-либо представления $\mathrm{E}_6(q)$ с представлениями GL_n не исключило этот последний случай. Кроме того, известно, что $\mathrm{E}_6(q)$ (2,3)-порождена (результат Малле), хотя и неизвестен явный вид образующих. Поэтому возникает гипотеза, что $\mathrm{E}_6(q)$ гурвицева.

Ниже приводятся таблицы жордановых форм интересующих нас элементов $\mathrm{E}_6(q)$.

Инволюции:

	1	-1	d_V^x	d_S^x
1	15	12	15	198
2	11	16	11	202

Элементы 3-го порядка:

	1	ω	ω^2	d_V^y	d_S^y
1	15	6	6	15	156
2	9	9	9	9	126

Элементы 7-го порядка:

	1	η	η^2	η^3	η^4	η^5	η^6	d_V^{xy}	d_S^{xy}
1	15	6	0	0	0	0	6	15	156
2	15	0	6	0	0	6	0	15	156
3	15	0	0	6	6	0	0	15	156
4	9	8	1	0	0	1	8	9	110
5	7	5	4	1	1	4	5	7	70
6	7	4	1	5	5	1	4	7	70
7	9	0	8	1	1	8	0	9	110
8	7	1	5	4	4	5	1	7	70
9	9	1	0	8	8	0	1	9	110
10	9	6	3	0	0	3	6	9	90
11	9	3	3	3	3	3	3	9	72
12	9	3	0	6	6	0	3	9	90
13	9	0	6	3	3	6	0	9	90
14	5	4	4	3	3	4	4	5	56
15	5	3	4	4	4	4	3	5	56
16	5	3	2	6	6	2	3	5	64
17	5	6	3	2	2	3	6	5	64
18	5	4	3	4	4	3	4	5	56
19	5	2	6	3	3	6	2	5	64
20	3	4	4	4	4	4	4	3	54

В первом столбце содержится порядковый номер записи, в последних двух – значения d_V^- и d_S^- из формулы Скотта для естественного представления $E_6(F)$ и для его композиции с симметрическим квадратом, а в промежуточных – кратности соответствующих собственных чисел.

Данная статья основана на дипломной работе автора. В заключение хотелось бы выразить глубокую признательность Н. А. Вавилову за плодотворное сотрудничество. Именно его советы, уточнения, коррективы помогли автору в данном исследовании.

Литература

1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Мир, М. (1972).
2. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
3. M. Conder, *Generators for alternating and symmetric groups.* — J. London Math. Soc. (2) **22**, No. 1 (1980), 75–86.

4. M. Conder, *Hurwitz groups: a brief survey.* — Bull. Amer. Math. Soc. **23**, No. 2 (1990), 359–370.
5. M. Conder, *Two element generation of the finite reflection groups.* — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **46**, No. 181 (1995), 95–106.
6. M. Conder, *Some results on quotients of triangle groups.* — Bull. Austral. Math. Soc. **30**, No. 1 (1984), 73–90.
7. M. Conder, *More on generators for alternating and symmetric groups.* — Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32**, No. 126 (1981), 137–163.
8. L. Di Martino, M. C. Tamburini, *2-Generation of finite simple groups and some related topics.* — Generators and Relations in Groups and Geometries, A. Barlotti et al., Kluwer Acad. Publ. (1991), 195–233.
9. L. Di Martino, M. C. Tamburini, A. E. Zalesskii, *On Hurwitz groups of low rank.* — Comm. Algebra **28**, No. 11 (2000), 5383–5404.
10. L. Di Martino, N. Vavilov, *(2,3)-generaion of* $\mathrm{SL}(n,q)$. I. *Cases* $n = 5,6,7$. — Comm. Algebra **22**, No. 4 (1994), 1321–1347.
11. L. Di Martino, N. Vavilov, *(2,3)-generaion of* $\mathrm{SL}(n,q)$. II. *Cases* $n \geqslant 8$. — Comm. Algebra **24** (1996), 487–515.
12. M. W. Liebeck, A. Shalev, *Classical groups, probabilistic methods and the (2,3)-generation problem.* — Ann. of Math., **144** (1996), 77–125.
13. A. Lucchini, *(2,3,k)-generated groups of large rank.* — Arc. Math. (Basel) **73**, No. 4 (1999), 241–248.
14. A. Lucchini, M. C. Tamburini, *Classical groups of large rank as Hurwitz groups.* — J. Algebra **219** (1999), 531–546.
15. A. Lucchini, M. C. Tamburini, J. S. Wilson, *Hurwitz groups of large rank.* — J. London Math. Soc. (2) **61**, No. 1 (2000), 81–92.
16. F. Lübeck, G. Malle, *(2,3)-generation of exceptional groups.* — Preprint, Univ. Heidelberg **31** (1996), 1–15.
17. G. Malle, *Hurwitz groups and* G_2. — Canad. Math. Bull., **33**, No. 3 (1990), 349–357.
18. G. Malle, *Small rank exceptional Hurwitz groups.* — Groups of Lie type and their geometries, LMS Lecture Notes, vol. 207, Cambridge University Press (1995), 173–183.
19. E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. Journal of Alg. and Computations, vol. 8, No. 1 (1998), 61–95.
20. L. L. Scott, *Matrices and cohomology.* — Ann. Math. **105** (1977), 473–492.
21. M. C. Tamburini, J. S. Wilson, N. Gavioli, *On the* $(2,3)$*-generation of some classical groups.* I. — J. Algebra **168** (1994), 353–370.
22. M. C. Tamburini, J. S. Wilson, *On the (2,3)-generation of some classical groups.* II. — J. Algebra **176** (1995), 667–680.
23. M. C. Tamburini, S. Vassallo, *(2,3)-generazione di* $\mathrm{SL}(4,q)$ *in caratteristica dispari e problemi collegati.* — Boll. Un. Math. Ital., to appear.
24. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Nonassociative algebras and related topics, Hiroshima, 1990, World Scientific, London et al., 1991, 219–335.
25. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Math. Univ. di Padova, **104**, No. 1 (2000), 201–250.

Semenov N. S. Towards Hurwitz generation of $\mathrm{G_{sc}}(\mathrm{E}_6, q)$.

The paper is devoted to the problem of Hurwitz generation of the group $\mathrm{G_{sc}}(\mathrm{E}_6, q)$. All possibilities for Hurwitz generators, except exactly one, are excluded.

Department of Mathematics,
Statistics & Computing Science,
Dalhousie University
Canada

E-mail: alex@winedt.com

Поступило 20 октября 2003 г.