Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

В. А. Петров

НЕЧЕТНЫЕ УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ

1. Введение

В настоящей работе дается новое определение классических групп над кольцами, которое обобщает *все* рассмотренные в литературе случаи: квадратичные группы Бака (также известные как унитарные и псевдоортогональные, см. [5, 10]), эрмитовы группы [5, 13], классические группы Шевалле и группу Абе $\mathrm{U}_{2l+1}(R)$ [3] (являющуюся скрученной группой Шевалле типа $^2A_{2l}$). Вводимое автором понятие "нечетной унитарной группы" (о происхождении названия будет сказано ниже) позволяет давать единообразные доказательства для всех этих групп, а также объяснять эффекты, возникающие в частных случаях (для примера можно сравнить достаточно нетривиальное определение элементарной эрмитовой группы, данное в [19], и определение, которое дается в разделе 6, где оно возникает совершенно естественным образом).

В качестве начального шага к построению структурной теории и K-теории нечетных унитарных групп доказывается нормальность абсолютной и относительной элементарных подгрупп (см. [9, 23] для случая квадратичной группы), сюръективная стабилизация K_1-функтора (см. [7, 8] для случаев квадратичных и эрмитовых групп), некоторые результаты о транзитивности действия на стабильном уровне ("теорема Витта" – см. [4, 20, 14] для случая квадратичных групп). При этом условие стабилизации описывается в терминах "стабильного ранга форменного кольца", а не размерности Басса–Серра или абсолютного стабильного ранга (в [14] использовался тот же ранг под называнием "Λ-стабильного"; новое название нам кажется чуть более удачным).

В последующих работах автор собирается перенести на слу-

Настоящая работа выполнена в рамках INTAS 00-566 и проекта Минвуза E02-0.1-61.

чай нечетной унитарной группы структурные теоремы и результаты элементарной K-теории, такие, как инъективная стабилизация K_1 и поведение группы на стабильном уровне (см. [7, 8, 19]), нильпотентность K_1 (см. [6, 11, 12]), центральность K_2 (см. [19]).

Чтобы читателю было легче следить за нашими определениями и конструкциями, напомним сперва определение квадратичной (или унитарной) группы Бака. Пусть R – кольцо с псевдоинволюцией $a \to \bar{a}$. (Следует отметить, что Бак использует обычную инволюцию $*$ и фиксирует центральный элемент λ такой, что $\lambda\lambda^* = 1$. Можно слегка обобщить эту ситуацию: отказаться от центральности λ и требовать, чтобы $a^{**} = \lambda a \lambda^*$. В [14] показано, что задание таких $*$ и λ эквивалентно заданию псевдоинволюции; соответствие задается формулами $\bar{a} = -a^*\lambda$ и $a^* = \bar{a}\bar{1}^{-1}$, $\lambda = -\bar{1}$. Знак, введенный для удобства (например, чтобы в выражении для ESD-трансвекций участвовали только сложения, см. раздел 4), объясняет, почему мы говорим об *антиэрмитовых* формах, а не о эрмитовых, как это делали классики.) Положим

$$\Lambda_{\min} = \{a + \bar{a} \mid a \in R\}, \quad \Lambda_{\max} = \{a \mid \bar{a} = a\}.$$

Форменным параметром (в смысле Бака) называется аддитивная подгруппа Λ, лежащая между $\Lambda_{\min}$ и $\Lambda_{\max}$, такая, что $\bar{a}\bar{1}^{-1}\Lambda a \subseteq \Lambda$ для любого элемента a из R.

Пусть теперь V – правый R-модуль. *Квадратичной формой* (в смысле Бака) называется пара (B, Q), состоящая из биаддитивной формы $B : V \times V \to R$ и отображения $Q : V \to R/\Lambda$, для которых выполнены следующие соотношения для любых $u, v \in V$:

$$B(ua, vb) = \bar{a}\bar{1}^{-1}B(u, v)b \text{ для любых } a, b \in R, \tag{1}$$

$$B(u, v) = -\overline{B(v, u)}, \tag{2}$$

$$Q(ua) = \bar{a}\bar{1}^{-1}Q(u)a \text{ для любого } a \in R, \tag{3}$$

$$Q(u + v) = Q(u) + Q(v) + B(u, v) + \Lambda, \tag{4}$$

$$B(u, u) = Q(u) - \overline{Q(u)}. \tag{5}$$

Квадратичной группой $\mathrm{GQ}(V, q)$ называется группа биективных изометрий формы q, то есть группа, состоящая из всех $g \in \mathrm{GL}(V)$, для которых $B(gu, gv) = B(u, v)$ и $Q(gu) = Q(u)$ для всех $u, v \in V$.

В случае, когда пространство V – гиперболическое ранга l (тогда $\mathrm{GQ}(V,q)$ обозначают через $\mathrm{GQ}_{2l}(R,\Lambda)$), естественным образом можно построить *элементарную подгруппу* $\mathrm{EQ}_{2l}(R,\Lambda)$, см. [9, 10].

Существенный недостаток определения квадратичной формы по Баку заключается в том, что условие (5) вынуждает форму B быть *четной*, то есть $B(u,u)$ имеет вид $a-\bar{a}$ для некоторого $a \in R$, в то время как из условия (2) вытекает, вообще говоря, только $B(u,u) = -\overline{B(u,u)}$. Так что группы изометрий эрмитовых форм далеко не всегда являются квадратичными. Поэтому Бак был вынужден дать отдельное определение *эрмитовых групп* и строить для них особую теорию, см. [5, 13].

Казалось бы, обе теории должны развиваться синхронно; однако для эрмитовых групп даже определение элементарной подгруппы появилось только в работе [19]! Это связано с тем, что некоторые элементарные корневые подгруппы нужно параметризовать не только элементами кольца, но и *векторами*. Столь же необычное явление имеет место в случае групп Абе: там нужно использовать *пары* элементов кольца со специальной операцией сложения. Наше определение нечетного форменного кольца значительно проясняет ситуацию.

Другое досадное ограничение теории квадратичных/эрмитовых групп заключается в том, что она не покрывает случаи нечетномерной ортогональной группы $\mathrm{O}_{2l+1}(R)$ и группы Абе $\mathrm{U}_{2l+1}(R)$. Хотя первая из этих групп является квадратичной, а вторая эрмитовой, они соответствуют *негиперболическим* формам: в обоих случаях остается "лишнее" подпространство размерности 1. В то же время для этих групп, конечно же, можно построить элементарную подгруппу и развить K-теорию, например, в контексте (скрученных) групп Шевалле. Именно это обстоятельство и стимулировало автора к поиску нового определения классической группы. В первоначальном варианте модуль V_0 (см. раздел 2) был одномерным, так что группа действовала на модуле R^{2l+1}; этим и объясняется эпитет "нечетная".

Однако затем автор осознал, что гораздо естественнее рассматривать произвольный модуль с фиксированной антиэрмитовой формой, что позволило включить в этот контекст случай эрмитовых групп. Тем не менее, название "нечетная" все еще имеет оправдание: наше определение снимает ограничение четности на форму B. Так что с точки зрения логики группы надо было бы называть "не обязательно четными" (но это неблагозвучно).

Работа организована следующим образом. В разделах 2–8 даются основные определения и конструкции и показывается их функториальность. В разделах 9 и 10 определяются нечетные форменные идеалы (являющиеся совместным обобщением форменных идеалов Бака и специальных подмодулей Абе), форменные подмодули и относительная элементарная подгруппа. В разделе 11 изучается связь относительной элементарной подгруппы и абсолютной элементарной подгруппой расслоенного произведения. В разделе 12 определяются стабильные ранги, в разделе 13 доказываются результаты о транзитивности действия на стабильном уровне и сюръективной стабилизации K_1. Наконец, в разделе 14 доказывается основная теорема о нормальности элементарной подгруппы.

Автор хотел бы выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю Николаю Александровичу Вавилову, а также Энтони Баку и Гуопингу Тангу, общение с которыми позволило автору усвоить технику работы с квадратичными и эрмитовыми группами.

2. Нечетные форменные параметры

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1. *Псевдоинволюцией* на R называется аддитивное отображение $\sigma : R \to R$, $\sigma : a \mapsto \bar{a}$, обладающее свойствами $\overline{ab} = \bar{b}\bar{1}^{-1}\bar{a}$ и $\bar{\bar{a}} = a$ для любых $a, b \in R$.

Пусть теперь R – кольцо с псевдоинволюцией, и V – правый R-модуль. Отображение $B : V \times V \to R$ называется *полуторалинейной формой*, если оно биаддитивно и выполнено соотношение

$$B(ua, vb) = \bar{a}\bar{1}^{-1}B(u,v)b \quad \text{для всех} \quad u, v \in V, \; a, b \in R.$$

Полуторалинейная форма B называется *антиэрмитовой*, если к тому же

$$B(u,v) = -\overline{B(v,u)} \quad \text{для всех} \quad u, v \in V.$$

Зафиксируем правый R-модуль V_0 и антиэрмитову форму B_0 на нем. Рассмотрим $\mathfrak{H}$ – *группу Гейзенберга* формы B_0. Как множество, $\mathfrak{H} = V_0 \times R$; операция определена по формуле

$$(u,a) \dotplus (v,b) = (u+v, a+b-B_0(u,v)).$$

Легко видеть, что операция $\dotplus$ ассоциативна (но, вообще говоря, некоммутативна), что $(0,0)$ является нейтральным элементом, а обратный задается формулой

$$\dot{-}(u,a) = (-u, -a - B_0(u,u)).$$

Далее, на $\mathfrak{H}$ задана операция правого умножения на элементы R по формуле

$$(u,a) \leftharpoondown b = (ub, \bar{b}\bar{1}^{-1}ab).$$

Эта операция обладает свойствами

$$\xi \leftharpoondown a \leftharpoondown b = \xi \leftharpoondown ab$$

и

$$(\xi \dotplus \eta) \leftharpoondown a = \xi \leftharpoondown a \dotplus \eta \leftharpoondown a.$$

Определим еще отображение *следа* $\mathrm{tr} : \mathfrak{H} \to R$:

$$\mathrm{tr}((u,a)) = a - \bar{a} + B_0(u,u);$$

оно является гомоморфизмом групп, то есть

$$\mathrm{tr}(\xi \dotplus \eta) = \mathrm{tr}(\xi) + \mathrm{tr}(\eta).$$

Положим

$$\mathfrak{L}_{\min} = \{(0, a + \bar{a}) \mid a \in R\},$$
$$\mathfrak{L}_{\max} = \{\xi \in \mathfrak{H} \mid \mathrm{tr}(\xi) = 0\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{L}_{\min}$ и $\mathfrak{L}_{\max}$ – подгруппы $\mathfrak{H}$, устойчивые относительно умножения на элементы R, $\mathfrak{L}_{\min} \leqslant \mathfrak{L}_{\max}$. При этом $\mathfrak{L}_{\min}$ содержит коммутант $\mathfrak{H}$, поскольку

$$(u,a) \dotplus (v,b) \dot{-} (u,a) \dot{-} (v,b) = (0, B_0(v,u) - B_0(u,v)).$$

Нечетным форменным параметром называется подгруппа $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{H}$, заключенная между $\mathfrak{L}_{\min}$ и $\mathfrak{L}_{\max}$ и устойчивая относительно умножения на элементы R. Поскольку $\mathfrak{L}$ содержит коммутант $\mathfrak{H}$, она нормальна, и $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ – правый R-модуль (относительно $\dotplus$ и $\leftharpoondown$). Пара $(R, \mathfrak{L})$ называется *нечетным форменным кольцом* (псевдоинволюция, модуль V_0 и форма B_0 подразумеваются, но опускаются в обозначении для краткости).

Положим $\mathfrak{L}_{ev} = \{a \in R \mid (0,a) \in \mathfrak{L}\}$ (*четная часть* $\mathfrak{L}$). Тогда $\mathfrak{L}_{ev}$ – форменный параметр в смысле Бака. Очевидно, что в случае $V_0 = 0$ это соответствие биективно. Так что наше определение естественным образом расширяет определение Бака.

3. Нечетные унитарные группы

Пусть $\mathfrak{L}$ – нечетный форменный параметр. *Нечетной $\mathfrak{L}$-квадратичной формой* называется пара $q = (B, Q)$, состоящая из антиэрмитовой формы B и отображения $Q : V \to \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ таких, что:

$$
\begin{aligned}
&Q(ua) = Q(u) \leftharpoondown a \quad \text{для всех} \quad u \in V,\ a \in R,\\
&Q(u+v) = Q(u) \dotplus Q(v) \dotplus (0, B(u,v)) \dotplus \mathfrak{L} \quad \text{для всех} \quad u, v \in V,\\
&B(u,u) = \operatorname{tr}(Q(u)) \quad \text{для любого} \quad u \in V.
\end{aligned}
$$

Мы обозначаем B через $(\cdot,\cdot)_q$ и Q через $|\cdot|_q$. Пара (V, q) называется *нечетным $\mathfrak{L}$-квадратичным пространством.*

Определим *четную часть* квадратичного пространства:

$$V_{ev} = \{u \in V \mid |u|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L} \quad \text{для некоторого} \quad a \in R\}.$$

Из свойств q следует, что V_{ev} – подмодуль V. Определим отображение $Q_{ev} : V_{ev} \to R/\mathfrak{L}_{ev}$ по формуле $|u|_q = (0, Q_{ev}(a)) \dotplus \mathfrak{L}$. Легко видеть, что определение корректно, и что $q_{ev} = (B|_{V_{ev}\times V_{ev}}, Q_{ev})$ – $\mathfrak{L}_{ev}$-квадратичная форма на пространстве V_{ev} в смысле Бака. В случае $V_0 = 0$ это соответствие между квадратичными формами, очевидно, биективно.

Пусть (V, q) и (V', q') – два нечетных $\mathfrak{L}$-квадратичных пространства. R-модульный гомоморфизм $f : V \to V'$ называется *изометрией*, если

$$
\begin{aligned}
&(fu, fv)_{q'} = (u, v)_q \quad \text{для всех} \quad u, v \in V,\\
&|fv|_{q'} = |v|_q \text{ для всех } v \in V.
\end{aligned}
$$

Композиция двух изометрий, очевидно, является изометрией. Таким образом, мы получаем категорию нечетных $\mathfrak{L}$-квадратичных пространств, в которой морфизмами являются изометрии. Далее, если $f : V \to V'$ – изометрия, легко видеть, что образ $f|_{V_{ev}}$ содержится в V'_{ev}, и что $f_{ev} = f|_{V_{ev}} : V_{ev} \to V'_{ev}$ – $\mathfrak{L}_{ev}$-изометрия. Таким образом, ev – функтор из категории нечетных $\mathfrak{L}$-квадратичных пространств в категорию $\mathfrak{L}_{ev}$-квадратичных пространств; при $V_0 = 0$, он, очевидно, является эквивалентностью категорий.

Нечетной унитарной группой $\mathrm{U}(V, q)$ называется группа автоморфизмов нечетного $\mathfrak{L}$-квадратичного пространства (V, q). Таким образом, $\mathrm{U}(V, q)$ состоит из биективных изометрий нечетного квадратичного пространства (V, q) на себя. Есть очевидный гомоморфизм из $\mathrm{U}(V,q)$ в полную квадратичную группу Бака $\mathrm{GQ}(V_{ev},q_{ev})$ (состоящую из элементов, сохраняющих q_{ev}); при $V_0=0$ он является изоморфизмом.

4. Трансвекции Эйхлера–Зигеля–Диксона

Пусть u,v – вектора нечетного квадратичного пространства V, a – элемент R такие, что $|u|_q=0$, $(u,v)_q=0$ и $|v|_q=(0,a)\dotplus\mathfrak{L}$. Определим $T_{uv}(a)$ как линейное преобразование V в себя, отправляющее вектор w в $w+u\bar{1}^{-1}((v,w)_q+a(u,w)_q)+v(u,w)_q$. Преобразования такого вида называются *трансвекциями Эйхлера–Зигеля–Диксона*, или кратко ESD-*трансвекциями*. Следующие их свойства проверяются прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
&T_{uv_1}(a)T_{uv_2}(b)=T_{u,v_1+v_2}(a+b+(v_1,v_2)_q),\\
&gT_{uv}(a)g^{-1}=T_{gu,gv}(a),\quad \text{если}\quad g\in\mathrm{U}(V,q),\\
&T_{u,va}(0)=T_{v,u\bar{1}^{-1}a\bar{1}^{-1}}(0),\quad \text{если}\quad |v|_q=0.
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Трансвекции $T_{uv}(a)$ лежат в $\mathrm{U}(V,q)$.*

Доказательство. Пусть w лежит в V; положим $x=(u,w)_q$, $y=(v,w)_q$. Тогда

$$\begin{aligned}
|T_{uv}(a)w|_q&=|w|_q\dotplus|v|_q\leftharpoonup x\dotplus(0,-\bar{x}\bar{1}^{-1}(y+ax))\dotplus(0,-\bar{y}x)\\
&=|w|_q\dotplus(|v|_q\dot{-}(0,a))\leftharpoonup x\dotplus(0,-\bar{y}x-\bar{x}\bar{1}^{-1}y)=|w|_q,
\end{aligned}$$

так как $(0,-\bar{y}x-\bar{x}\bar{1}^{-1}y)\in\mathfrak{L}_{\min}$. Пусть теперь w_1,w_2 – вектора V. Положим $x_1=(u,w_1)_q$, $y_1=(v,w_1)_q$, $x_2=(u,w_2)_q$, $y_2=(v,w_2)_q$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(T_{uv}(a)w_1,T_{uv}(a)w_2)_q\\
&=(w_1+u\bar{1}^{-1}(y_1+ax_1)+vx_1,w_2+u\bar{1}^{-1}(y_2+ax_2)+va_2)_q\\
&=(w_1,w_2)_q-\bar{x}_1\bar{1}^{-1}(y_2+ax_2)-\bar{y}_1x_2+(\bar{y}_1+\bar{x}_1\bar{1}^{-1}\bar{a})x_2+\bar{x}_1\bar{1}^{-1}y_2\\
&=(w_1,w_2)_q+\bar{x}_1\bar{1}^{-1}((v,v)_q-a+\bar{a})x_2=(w_1,w_2)_q,
\end{aligned}$$

так как $(v,v)_q-a+\bar{a}=\mathrm{tr}(|v|_q\dot{-}(0,a))=0$. □

5. Нечетная гиперболическая унитарная группа

Гиперболической парой называется пара векторов (u,v) таких, что $(u,v)_q=1$, $|u|_q=|v|_q=0$.

Наибольшее l такое, что в (V,q) существует l взаимно ортогональных гиперболических пар, называется *индексом Витта* (V,q) и обозначается через $\operatorname{ind}(V,q)$.

Пространство (V,q) называется *нечетным гиперболическим ранга* l, если оно изометрично пространству

$$\langle e_1,\dots e_l,e_{-l},\dots e_{-1}\rangle\oplus V_0,$$

где (e_i,e_{-i}) – взаимно ортогональные гиперболические пары, V_0 ортогонально ко всем e_i, и $|u|_q=(u,0)$, $(u,v)_q=B_0(u,v)$ для $u,v\in V_0$. Тогда форма $|\cdot|_q$ определяется по формуле

$$\Big|\sum_i e_ia_i+u\Big|_q=(u,\sum_{i=1}^{l}\bar a_i\bar 1^{-1}a_{-i})\dotplus\mathfrak{L},\ \ u\in V_0, \qquad (*)$$

а $(\cdot,\cdot)_q$ – по формуле

$$\Big(\sum_i e_ia_i,\sum_j e_jb_j\Big)_q=\sum_i\bar a_i\varepsilon_ib_{-i},$$

где ε_i равняется $\bar 1^{-1}$ для $i=1,\dots,l$ и -1 для $i=-l,\dots,-1$.

Группа $\mathrm{U}(V,q)$ в этом случае называется *нечетной гиперболической унитарной группой* и обозначается через $\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L})$.

В случае $V_0=0$ естественный гомоморфизм

$$\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L})=\mathrm{U}(V,q)\to\mathrm{GQ}(V_{ev},q_{ev})=\mathrm{GQ}_{2l}(R,\mathfrak{L}_{ev})$$

является изоморфизмом. Поэтому гиперболическая полная квадратичная группа Бака может рассматриваться как частный случай нечетной гиперболической унитарной.

С другой стороны, пусть у нас есть правый R-модуль V с антиэрмитовой формой B; предположим, что в V существуют элементы $\{e_i\}_{i=1,\dots,l,-l,\dots,-1}$ такие, что $B(e_i,e_j)=0$ при $i\neq -j$ и $B(e_i,e_{-i})=1$ для $i=1,\dots,l$. Определим тогда V_0 как ортогональное дополнение к $\langle e_1,\dots,e_l,e_{-l},\dots,e_{-1}\rangle$, B_0 – как ограничение B на V_0. Определим также Q на V по формуле $(*)$ (где $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_{\max}$). Тогда $q=(B,Q)$ – нечетная $\mathfrak{L}_{\max}$-квадратичная форма, и $\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L}_{\max})$ отождествляется с группой изометрий формы B. Таким образом, группа изометрий антиэрмитовой формы индекса хотя бы l может рассматриваться как нечетная гиперболическая группа ранга l.

В частности, полная эрмитова группа $\mathrm{GH}(R, a_1, \ldots, a_r)$ Бака и Танга может рассматриваться как частный случай $\mathrm{U}_{2(l-r)}(R, \mathfrak{L}_{\max})$: нужно взять $V_0 = \langle f_1, \ldots, f_r, f_{-r}, \ldots, f_{-1}\rangle$ с антиэрмитовой формой B_0, заданной формулой

$$B_0\Big(\sum_i f_i b_i, \sum_j f_j c_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \bar{b}_j \bar{1}^{-1} a_j c_j + \sum_i \bar{b}_i \varepsilon_{-i} c_{-i}.$$

6. Гиперболическая элементарная группа

Здесь мы опишем *элементарную* подгруппу $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$ нечетной гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{L})$.

Возьмем (неприведенную) систему корней типа BC_l, состоящую из векторов $\chi_i \pm \chi_j$, $\pm\chi_i$ и $\pm 2\chi_i$, где $\{\chi_i\}_{i=1,\ldots,l}$ – ортонормированный базис в l-мерном евклидовом пространстве. Векторы вида $\pm 2\chi_i$ называются *длинными* корнями, вида $\chi_i \pm \chi_j$ – *короткими*, а векторы вида $\pm\chi_i$ – *экстракороткими* корнями.

Определим теперь отвечающие корням *элементарные трансвекции*:

$$\begin{aligned}
&T_{\chi_i-\chi_j}(a) = T_{ij}(a) = T_{e_{-j},-e_i a\varepsilon_j}(0),\ j \neq \pm i,\ a \in R,\\
&T_{\chi_i}(u, a) = T_i(u, a) = T_{e_i, u\varepsilon_{-i}}(-\bar{\varepsilon}_{-i}\bar{1}^{-1} a \varepsilon_{-i}),\ (u, a) \in \mathfrak{L},\\
&T_{2\chi_i}(a) = T_i(0, a),\ a \in \mathfrak{L}_{ev}.
\end{aligned}$$

Здесь i и j принимают значения $1, \ldots l, -l, \ldots, -1$, при этом для отрицательных i полагаем $\chi_i = -\chi_{-i}$. Заметим, что длинные элементарные трансвекции являются частным случаем экстракоротких.

Элементарные трансвекции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$T_{ij}(a) = T_{-j,-i}(\varepsilon_{-j}\bar{a}\varepsilon_i) \tag{R0}$$
$$T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b) \tag{R1}$$
$$T_i(\xi)T_i(\eta) = T_i(\xi \dotplus \eta) \tag{R2}$$
$$[T_{ij}(a), T_{hk}(b)] = e,\ h \neq j, -i,\ k \neq i, -j \tag{R3}$$
$$[T_i(\xi), T_{jk}(c)] = e,\ j \neq -i,\ k \neq i \tag{R4}$$
$$[T_{ij}(a), T_{jk}(b)] = T_{ik}(ab),\ k \neq \pm i \tag{R5}$$
$$[T_i(u, a), T_j(v, b)] = T_{i,-j}(\varepsilon_i B_0(u, v)),\ j \neq \pm i \tag{R6}$$
$$[T_i(u, a), T_i(v, b)] = T_i(0, B_0(v, u) - B_0(u, v)) \tag{R7}$$

$$[T_i(u,a), T_{-ij}(b)] = T_{ij}(-\varepsilon_i ab)T_{-j}((u,-\bar{a}) \leftharpoondown b), \tag{R8}$$

$$[T_{ij}(a), T_{j,-i}(b)] = T_i(0, \varepsilon_{-i}\bar{1}ab - \bar{b}\bar{1}^{-1}\bar{a}\varepsilon_i). \tag{R9}$$

Нечетной элементарной гиперболической унитарной группой называется группа $\mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L})$, порожденная всеми элементарными трансвекциями. По лемме 1, $\mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L})$ – подгруппа $\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L})$. Множество с отмеченной точкой $\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L})/\mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L})$ обозначается через $\mathrm{KU}_{1,2l}(R,\mathfrak{L})$ и называется *нечетным унитарным* K_1-*функтором*.

Легко видеть, что $\mathrm{EQ}_{2l}(R,\mathfrak{L}_{ev})$ естественным образом вкладывается в $\mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L})$, причем в случае $V_0 = 0$ это вложение является биективным. Значит, отождествление гиперболической квадратичной группы с соответствующей гиперболической нечетной унитарной совместимо с элементарными подгруппами.

С другой стороны, проверка показывает, что элементарная эрмитова группа $\mathrm{EH}_{2l}(R,a_1,\ldots,a_r)$ совпадает с $\mathrm{EU}_{2(l-r)}(R,\mathfrak{L}_{\max})$ (если определить V_0 как выше).

Заметим, что *все* расщепимые классические группы над коммутативным кольцом R являются частными случаями нечетных гиперболических унитарных групп: если взять тривиальную инволюцию, $V_0 = 0$ и $\mathfrak{L} = (0,R)$, то

$$\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{Sp}_{2l}(R) \text{ и } \mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{Ep}_{2l}(R);$$

если взять инволюцию $\bar{a} = -a$, произвольное $V_0 = 0$ и $\mathfrak{L} = 0$, то

$$\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{O}_{2l}(R) \text{ и } \mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{EO}_{2l}(R);$$

наконец, если взять инволюцию $\bar{a} = -a$, $V_0 = R$, $B_0(a,b) = 2ab$ и $\mathfrak{L} = \{(a,-a^2) \mid a \in R\}$, то

$$\mathrm{U}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{O}_{2l+1}(R) \text{ и } \mathrm{EU}_{2l}(R,\mathfrak{L}) = \mathrm{EO}_{2l+1}(R).$$

Нечетная унитарная группа Абе $\mathrm{U}_{2l+1}(R)$ (являющаяся скрученной группой Шевалле типа ${}^2A_{2l}$), определенная для коммутативного кольца R с инволюцией $*$ (см. [3]), тоже получается таким способом, если взять $\bar{a} = -a^*$, $V_0 = R$, $B_0(a,b) = ab$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\max}$.

7. Элементарная подгруппа: общий случай

В этом разделе мы распространим определение элементарной группы на произвольное пространство с фиксированной гиперболической парой. Пусть сначала V – нечетное гиперболическое пространство ранга l.

Лемма 2. *Пусть v – вектор из V такой, что $(e_i, v)_q = (e_{-i}, v)_q = 0$, и a – элемент R такой, что $|v|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L}$. Тогда $T_{e_i v}(a)$ принадлежит $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$.*

Доказательство. Из условия следует, что $v = \sum_{k \neq \pm i} e_k a_k + u$, $a_k \in I$, $u \in V_0$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$T_{e_i v}(a) = \prod_{k \neq \pm i} T_{e_i, e_k a_k}(0) \cdot T_{e_i, u}\Big(a - \sum_{j=1}^{l} \bar{a}_j \bar{1}^{-1} a_{-j}\Big),$$

и все сомножители лежат в $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$. □

Предложение 1. *Группа $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$ совпадает с группой, порожденной всеми элементами вида $T_{e_{\pm 1} v}(a)$, где $(e_i, v)_q = (e_{-i}, v)_q = 0$, и $|v|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Обозначим временно эту группу через E. Лемма 2 показывает, что E содержится в $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$. Из определения элементарных корневых трансвекций и соотношения R0 следует, что E содержит все элементы вида $T_{1i}(a)$, $T_{i1}(b)$, $T_1(\xi)$ и $T_{-1}(\eta)$. Теперь утверждение леммы вытекает из соотношений R5 и R8. □

Доказанное предложение подсказывает определение элементарной подгруппы в общем случае. Пусть V – нечетное квадратичной пространство, (e_1, e_{-1}) – гиперболическая пара. Определим $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ как группу, порожденную элементами из предложения 1.

Обозначим через $\mathrm{U}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ подгруппу $\mathrm{U}(V, q)$, состоящую из элементов, оставляющих неподвижными e_1 и e_{-1}. В гиперболическом случае она естественным образом отождествляется с $\mathrm{U}_{2l-2}(R, \mathfrak{L})$.

Предложение 2. *$\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ нормализуется группой $\mathrm{U}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$.*

Доказательство. Действительно, если $g \in \mathrm{U}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$, то $g T_{e_{\pm 1} v}(a) g^{-1} = T_{e_{\pm 1}, gv}(a)$, причем $(e_1, gv)_q = (e_{-1}, gv)_q = 0$ и $|gv|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L}$. □

Предложение 3. *Пусть (e_1, e_{-1}) и (e_2, e_{-2}) – взаимно ортогональные гиперболические пары. Тогда $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q) = \mathrm{EU}_{(e_2, e_{-2})}(V, q)$.*

Доказательство. Покажем, что элементы $T_{e_{\pm 2} v}(a)$, $(e_2, v)_q = (e_{-2}, v)_q = 0$, $|v|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L}$, лежат в $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$. По свойству симметричности ESD-трансвекций, это верно для $T_{e_{\pm 2}, e_1 b}(0)$

и $T_{e_{\pm 2}, e_{-1}c}(0)$. Представим теперь v в виде $e_1 b + e_{-1}c + w$, где $(e_1, w)_q = (e_{-1}, w)_q = 0$. Тогда

$$T_{e_{\pm 2}v}(a) = T_{e_{\pm 2}, e_1 b}(0) T_{e_{\pm 2}, e_{-1}c}(0) [T_{e_1 w}(-\bar{a}), T_{e_{\pm 2}, e_{-1}}(0)],$$

и все сомножители лежат в $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$. □

8. Замена форменного кольца

Пусть R' – кольцо с псевдоинволюцией σ' ($\sigma'(a)$ будем также обозначать через $\bar{a}$). Предположим, что задан гомоморфизм колец $\varphi : R \to R'$, сохраняющий псевдоинволюцию (то есть $\varphi(\sigma(a)) = \sigma'(\varphi(a))$). Для каждого правого R-модуля V определим правый R'-модуль V' как $V \otimes_R R'$ (R' рассматривается как левый R-модуль посредством φ). R-линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ продолжается до R'-линейного отображения $f' : V_1' \to V_2'$ по обычной формуле $f'(v \otimes a) = f(v) \otimes a$. По заданной на V полуторалинейной форме B определим полуторалинейную форму B' на V' по формуле

$$B'(u \otimes a, v \otimes b) = \bar{a}\bar{1}^{-1}\varphi(B(u, v))b, \quad \text{где} \quad u, v \in V, \quad a, b \in R'.$$

Легко видеть, что если B антиэрмитова, то B' тоже антиэрмитова.

В частности, модулю V_0 с антиэрмитовой формой B_0 соответствует модуль V_0' с антиэрмитовой формой B_0'. Пусть теперь $\mathfrak{L}'$ – нечетный форменный параметр для R' и V_0' такой, что если (u, a) лежит в $\mathfrak{L}$, то $(u \otimes 1, \varphi(a))$ лежит в $\mathfrak{L}'$. Будем тогда говорить, что φ – *морфизм* нечетных форменных колец $(R, \mathfrak{L})$ и $(R', \mathfrak{L}')$. Покажем, что группы U и EU функториальны по форменному кольцу.

Если $q = (B, Q)$ – нечетная $\mathfrak{L}$-квадратичная форма на V, определим нечетную $\mathfrak{L}'$-квадратичную форму на V' как (B', Q'), где

$$Q'(u \otimes a) = (v \otimes 1, \varphi(b)) \leftharpoondown a, \ \text{где}\ u \in V,\ a \in R',\ (v, b) = Q(u).$$

Итак, мы получили функтор из категории нечетных $\mathfrak{L}$-квадратичных пространств в категорию нечетных $\mathfrak{L}'$-квадратичных пространств. В частности, получается гомоморфизм из $\mathrm{U}(V, q)$ в $\mathrm{U}(V', q')$. Легко видеть, что он переводит $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ в $\mathrm{EU}_{(e_1 \otimes 1, e_{-1} \otimes 1)}(V', q')$.

Если задано только кольцо с псевдоинволюцией R' и гомоморфизм φ, всегда можно определить “минимальный” $\mathfrak{L}'$ как подгруппу $\mathfrak{H}' = V' \times R'$, порожденную элементами вида $(u \otimes 1, \varphi(a)) \leftharpoondown$

b, где $(u,a) \in \mathfrak{L}$, $b \in R'$. Легко видеть, что $\mathfrak{L}'$ действительно является нечетным форменным параметром R', что φ – морфизм нечетных форменных колец, и любой другой нечетный форменный параметр $\mathfrak{L}''$, для которого φ является морфизмом из $(R,\mathfrak{L})$ в $(R',\mathfrak{L}'')$, содержит $\mathfrak{L}'$.

Есть два важных частных случая замены форменного кольца: локализация и присоединение независимой переменной.

Будем рассматривать только мультипликативные системы, элементы которых s центральны и удовлетворяют условию $\bar{s} = s\bar{1}$.

Пусть S – мультипликативная система, а $\mathfrak{L}$ – нечетный форменный параметр. Локализацию кольца R по системе S обозначаем через $S^{-1}R$. Определим псевдоинволюцию на $S^{-1}R$ по формуле

$$\sigma'\Big(\frac{a}{s}\Big) = \frac{\bar{a}}{s}.$$

Тогда естественный гомоморфизм $R \to S^{-1}R$ определяет нечетный форменный параметр $S^{-1}\mathfrak{L}$, морфизм нечетных форменных колец $(R,\mathfrak{L}) \to (S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{L})$ и функтор, отправляющий (V,q) в $(S^{-1}V, S^{-1}q)$. Соответствующий ему гомоморфизм из $\mathrm{U}(V,q)$ в $\mathrm{U}(S^{-1}V, S^{-1}q)$ будет обозначаться через F_S. Легко видеть, что он совместим с гомоморфизмом F_S из $\mathrm{GL}(V)$ в $\mathrm{GL}(V_S)$, определенным по формуле

$$(F_S(g))\Big(\frac{u}{s}\Big) = \frac{g(u)}{s}.$$

Пусть X – независимая переменная, коммутирующая с элементами R. Продолжим псевдоинволюцию на $R[X]$, полагая $\bar{X} = X\bar{1}$. Тогда вложение $R \to R[X]$ определяет нечетный форменный параметр $\mathfrak{L}[X]$ и функтор, отправляющий (V,q) в $(V[X], q[X])$.

9. Конгруэнц-подгруппы нечетной гиперболической группы

Пусть I – двусторонний идеал кольца R, инвариантный относительно псевдоинволюции, $\mathfrak{L}$ – нечетный форменный параметр. Положим

$$\mathfrak{M}_{\min} = \langle \xi \leftharpoonup a,\ \xi \in \mathfrak{L}, a \in I;\ (0, a + \bar{a}),\ a \in I \rangle,$$
$$\mathfrak{M}_{\max} = \{(u,a) \in \mathfrak{L} \mid a \in I, B_0(u,v) \in I \text{ для всех } v \in V_0\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{M}_{\min}$ и $\mathfrak{M}_{\max}$ – подгруппы $\mathfrak{H}$, устойчивые относительно умножения на элементы R, $\mathfrak{M}_{\min} \leqslant \mathfrak{M}_{\max} \leqslant \mathfrak{L}$. При этом $\mathfrak{M}_{\min}$ содержит относительный коммутант $[\mathfrak{H}, \mathfrak{M}_{\max}]$ (см. аналогичное вычисление для $\mathfrak{L}_{\min}$).

Нечетным форменным идеалом называется пара $\mathfrak{I} = (I, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ – подгруппа $\mathfrak{H}$, заключенная между $\mathfrak{M}_{\min}$ и $\mathfrak{M}_{\max}$ и устойчивая относительно умножения на элементы R (по замечанию выше, такая подгруппа обязательно нормальна в $\mathfrak{H}$).

При $V_0 = 0$ нечетные форменные идеалы совпадают с форменными идеалами Бака. В случае классических групп Шевалле (то есть групп O_{2l}, Sp_{2l} и O_{2l+1}) нечетные форменные идеалы в точности совпадают со *специальными подмодулями* Абе [2], служащими для параметризации нормальных подгрупп.

Пусть $q = (B, Q)$ – нечетная $\mathfrak{L}$-квадратичная форма на V, $\mathfrak{I} = (I, \mathfrak{M})$ – нечетный форменный идеал. Нас будут интересовать поднятия формы Q до формы $\tilde{Q}$ со значениями в $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, определенные на некотором подмодуле $U \leqslant V$. При этом, естественно, должны выполняться свойства

$$\begin{aligned} Q(u) &= \tilde{Q}(u) \dotplus \mathfrak{L}, \\ \tilde{Q}(ua) &= \tilde{Q}(u) \leftharpoonup a, \\ \tilde{Q}(u+v) &= \tilde{Q}(u) \dotplus \tilde{Q}(v) \dotplus (0, (u,v)_q) \dotplus \mathfrak{M} \end{aligned}$$

для всех u и v из U.

Если $\tilde{Q}_1$, определенное на U_1, и $\tilde{Q}_2$, определенные на U_2 – два поднятия Q, согласованных в том смысле, что $\tilde{Q}_1(u) = \tilde{Q}_2(u)$ для всех $u \in U_1 \cap U_2$, то очевидным образом можно определить поднятие $\tilde{Q}$ на $U = U_1 + U_2$.

Пусть $\tilde{Q}$ – поднятие Q, определенное на U. Если u, v – вектора такие, что $u - v \in U$, будем обозначать через $\tilde{Q}(u) \dot{-} \tilde{Q}(v)$ значение

$$\tilde{Q}(u-v) \dotplus (0, B(v, u-v)) \dotplus \mathfrak{M}.$$

Несложная проверка показывает, что определение совместимо со случаем, когда u и v лежат в U, и что

$$(\tilde{Q}(u) \dot{-} \tilde{Q}(v)) \dotplus (\tilde{Q}(v) \dot{-} \tilde{Q}(w)) = \tilde{Q}(u) \dot{-} \tilde{Q}(w).$$

Покажем, что на VI всегда можно естественным образом определить поднятие $\tilde{Q}$ формы Q. Действительно, каждый элемент

$v \in VI$ можно записать в виде $\sum_i v_i a_i$, $v_i \in V$, $a_i \in I$. Положим тогда

$$\tilde{Q}(v) = \dot{\sum_i} Q(v_i) \leftharpoonup a_i \dotplus \dot{\sum_{i<j}}(0, B(v_i a_i, v_j a_j)) \dotplus \mathfrak{M}.$$

Легко видеть, что определение корректно (то есть не зависит от выбора $Q(v_i)$ по модулю $\mathfrak{L}$ и выбора представления v в виде суммы), и что $\tilde{Q}$ действительно является поднятием Q.

Рассмотрим теперь случай гиперболического пространства. На V_0 естественно определить поднятие Q по формуле $\tilde{Q}(u) = (u, 0) \dotplus \mathfrak{M}$. Легко видеть, что оно согласовано с поднятием, определенным на VI; поэтому можно продолжить $\tilde{Q}$ на $VI + V_0$.

Нечетной унитарной конгруэнц-подгруппой уровня $\mathfrak{I}$ называется подгруппа $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{I})$ группы $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{L})$, состоящая из элементов g таких, что g лежит в $\mathrm{GL}(V, VI + V_0)$ (то есть $gu - u \in VI + V_0$ для любого $u \in V$) и сохраняет $\tilde{Q}$, то есть $\tilde{Q}(gu) \dot{-} \tilde{Q}(u) = 0$ для всех $u \in V$. В разделе 11 мы покажем, что $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{I})$ – нормальная подгруппа $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{L})$.

Пусть $\mathrm{EU}_{2l}(\mathfrak{I})$ – подгруппа, порожденная всеми элементами вида $T_{ij}(a)$, $a \in \mathfrak{I}$, и $T_i(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{J} = (J, \mathfrak{N})$ – второй нечетный форменный идеал. Говорят, что $\mathfrak{I}$ содержится в $\mathfrak{J}$, если $I \leqslant J$ и $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$. Видно, что $\mathrm{EU}_{2l}(\mathfrak{I})$ содержится в $\mathrm{U}_{2l}(R, \mathfrak{J})$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{I}$ содержится в $\mathfrak{J}$.

Относительной элементарной подгруппой $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$ *уровня* $\mathfrak{I}$ называется нормальное замыкание $\mathrm{EU}_{2l}(\mathfrak{I})$ в $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{L})$.

10. Конгруэнц-подгруппы: общий случай

Мы хотим перенести определения предыдущего раздела на случай произвольного нечетного $\mathfrak{L}$-квадратичного пространства V. Назовем *форменным подмодулем* V тройку $\mathfrak{U}$, состоящую из нечетного форменного идеала $\mathfrak{I} = (I, \mathfrak{M})$, подмодуля $U \leqslant V$ и поднятия $\tilde{Q}$ формы Q, определенного на U, обладающих следующими свойствами: U содержит VI; $(u, v)_q \in I$ для всех $u \in U$, $v \in V$; $\tilde{Q}$ согласовано с естественным поднятием Q, определенным на VI; если $\tilde{Q}(u) = (w, a) \dotplus \mathfrak{M}$, то $a \in I$.

Например, для любого нечетного форменного идеала $\mathfrak{I}$ можно взять $U = VI$ и определить $\tilde{Q}$ как естественное поднятие Q. Во многих случаях все форменные подмодули получаются таким способом; например, это так, если V – конечно порожденный проективный, а форма B невырожденна, или, что более обще, если выполнено условие из [21], а именно, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде $\sum_i w_i(v, u_i)_q$ для некоторых $u_i, w_i \in V$ (здесь V произвольный).

Нечетная унитарная конгруэнц-подгруппа уровня $\mathfrak{U}$ состоит из элементов g, лежащих в $\mathrm{GL}(V, U)$ (то есть $gv - v \in U$ для любого $v \in V$) и сохраняющих $\tilde{Q}$, то есть $\tilde{Q}(gv) \dot{-} \tilde{Q}(v) = 0$ для всех $v \in V$.

Определим $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ как подгруппу $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$, порожденную всеми элементами вида $T_{e_{\pm1}v}(a)$, $(e_1, v)_q = (e_{-1}, v)_q = 0$, $v \in U$, $\tilde{Q}(v) = (0, a) \dot{+} \mathfrak{M}$. Вычисление из доказательства леммы 1 показывает, что $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ содержится в $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$. *Относительная элементарная подгруппа уровня* $\mathfrak{U}$ $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ определяется как нормальное замыкание $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}$ (V, q).

Покажем теперь, что наши определения согласованы со случаем гиперболического пространства. Понятно, что $\mathfrak{U} = (\mathfrak{I}, VI + V_0, \tilde{Q})$ – форменный подмодуль. Выкладка из доказательства леммы 2 показывает, что $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ содержится в $\mathrm{EU}_{2l}(\mathfrak{I})$. С другой стороны, из соотношений R5 и R8 следует, что $\mathrm{EU}_{2l}(\mathfrak{I})$ содержится в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$. Так что $\mathrm{EU}_{2l}(R, \mathfrak{I})$ и $\mathrm{EU}_{2l}(V, q, \mathfrak{U})$ совпадают.

Предложение 4. *Пусть (V, q) содержит взаимно ортогональные гиперболические пары (e_1, e_{-1}), (e_2, e_{-2}) и (e_3, e_{-3}), $\mathfrak{U}$ – форменный подмодуль. Тогда*

$$[\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q), \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})] = \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U}).$$

В частности, $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ совершенна.

Доказательство. Обозначим левую часть через E. Поскольку $xyx^{-1} = [x, y]y$, достаточно доказать, что каждый элемент $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ лежит в E. Пусть сначала $v \in VI$ ортогонален к (e_1, e_{-1}) и (e_2, e_{-2}), $\tilde{Q}(v) = (0, a) \dot{+} \mathfrak{M}$. Соотношение

$$T_{e_{\pm2}v}(a) = [T_{e_1v}(-\bar{a}), T_{e_{\pm2},e_{-1}}(0)],$$

показывает, что $T_{e_{\pm2}(v)}(a)$ лежит в E. Теперь из

$$T_{e_{\pm1}v}(a) = [T_{e_2v}(-\bar{a}), T_{e_{\pm1},e_{-2}}(0)],$$

следует, что $T_{e_{\pm 1}(v)}(a)$ тоже лежит в E, если v ортогонален к (e_1, e_{-1}) и (e_2, e_{-2}). Точно так же доказывается, что это верно, если v ортогонален к (e_1, e_{-1}) и (e_3, e_{-3}). Но $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ порождается элементами $T_{e_{\pm 1}v}(a)$, где v ортогонален к (e_1, e_{-1}) и либо к (e_2, e_{-2}), либо к (e_3, e_{-3}): действительно, любой v можно записать в виде $e_2b + e_{-2}c + v'$, $b, c \in I$, где v' ортогонален к (e_2, e_{-2}), а $e_2b + e_{-2}c$ ортогонален к (e_3, e_{-3}), и

$$T_{e_{\pm 1}v}(a) = T_{e_{\pm 1}, e_2b+e_{-2}c}(0)T_{e_{\pm 1}, v'}(a).$$

□

11. Релятивизация

Здесь мы обсудим изящный способ определения относительной унитарной группы, принадлежащий Стейну [16].

Пусть I – двусторонний идеал кольца R (пока мы не предполагаем наличие псевдоинволюции). Определим $R \times_I R$ как расслоенное произведение R и R над R/I, то есть как подкольцо прямого произведения $R \times R$, состоящее из пар (a_1, a_2) с $a_1 - a_2 \in I$. Пусть π – проекция на первый и сомножитель. Тогда можно построить короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} R \times_I R \underset{\overleftarrow{\ \delta\ }}{\xrightarrow{\pi}} R \longrightarrow 0,$$

где $\iota(a) = (0, a)$ – вложение идеала I в $R \times_I R$, а $\delta(a) = (a, a)$ – расщепление гомоморфизма π.

Пусть V – R-модуль, U – подмодуль V, содержащий VI. Положим $V' = V \times_U V$; тогда V' естественно наделяется структурой R'-модуля по формуле

$$(v_1, v_2)(a_1, a_2) = (v_1a_1, v_2a_2)$$

(включение $VI \leqslant U$ гарантирует корректность определения). R'-линейное отображение $f : V' \to V'$ может быть отождествлено с парой (f_1, f_2) R-линейных отображений $V \to V$ таких, что $f_1(v) - f_2(v) \in U$ для любого $v \in V$.

Пусть теперь R – кольцо с псевдоинволюцией, $\mathfrak{L}$ – нечетный форменный параметр, (V, q) – нечетное $\mathfrak{L}$-квадратичное пространство, $\mathfrak{I} = (I, \mathfrak{M})$ – нечетный форменный идеал, $\mathfrak{U} = (\mathfrak{I}, U, \tilde{Q})$ –

форменный подмодуль. Псевдоинволюция на $R' = R \times_I R$ определяется покомпонентно. Полуторалинейная форма B на V продолжается до формы B' на V' по формуле

$$B'((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = (B(v_1, w_1), B(v_2, w_2)).$$

Пусть U_0 – подмодуль V_0, порожденный $V_0 I$ и всеми элементами $w \in V_0$ такими, что $\tilde{Q}(u) = (w, a) \dotplus \mathfrak{M}$ для некоторых $u \in U$, $a \in I$. Определим V_0' как $V_0 \times_{U_0} V_0$; форма B_0' на V_0' определяется по той же формуле, что и B' на V. Наконец, определим нечетный форменный параметр кольца R'

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \times_{\mathfrak{M}} \mathfrak{L} = \{((u, v), (a, b)) \mid (u, a) \dot{-} (v, b) \in \mathfrak{M}\}.$$

Продолжим квадратичную форму на V' по формулам

$$Q'(0, u) = ((0, w), (0, a)) \dotplus \mathfrak{L}', \;\; u \in U, \;\; \tilde{Q}(u) = (w, a) \dotplus \mathfrak{M},$$
$$Q'(v, v) = ((u, u), (a, a)) \dotplus \mathfrak{L}', \;\; v \in V, \;\; Q(v) = (w, a) \dotplus \mathfrak{L}.$$

Поскольку каждый вектор (v_1, v_2) из V' можно представить в виде $(0, v_2 - v_1) + (v_1, v_1)$, форма Q' определяется этими свойствами однозначно. Несложная проверка показывает, что $q' = (B', Q')$ наделяет V' структурой нечетного $\mathfrak{L}'$-квадратичного пространства.

Элемент g из $\mathrm{U}(V', q')$ может быть отождествлен с парой элементов $g_1, g_2 \in \mathrm{U}(V, q)$ таких, что $g_1(v) - g_2(v) \in U$ и $\tilde{Q}(g_1(v)) \dot{-} \tilde{Q}(g_2(v)) = 0$ для любого $v \in V$. В частности, имеет место короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{U}(V', q') \underset{\delta}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathrm{U}(V, q) \longrightarrow 1,$$

где $\iota(g) = (e, g)$, $\pi(g_1, g_2) = g_1$ и $\delta(g) = (g, g)$.

Предложение 5. *Группа* $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$ *нормальна в* $\mathrm{U}(V, q)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$, $h \in \mathrm{U}(V, q)$. Из точной последовательности вытекает, что $\iota(\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U}))$ – нормальная подгруппа $\mathrm{U}(V', q')$. Значит, $\iota(hgh^{-1}) = \delta(h)\iota(g)\delta(h)^{-1}$ лежит в $\iota(\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U}))$, то есть hgh^{-1} лежит в $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$. □

Следствие. $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ *является подгруппой* $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$.

Теперь можно определить $\mathrm{CU}(V, q, \mathfrak{U})$ как множество, состоящее из всех g из $\mathrm{U}(V, q)$ таких, что $[g, \mathrm{U}(V, q)] \leqslant \mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$; из предложения 5 и формулы

$$[g_1 g_2, h] = {}^{g_1}[g_2, h] \cdot [g_1, h]$$

следует, что $\mathrm{CU}(V,q,\mathfrak{U})$ является группой, содержащей $\mathrm{U}(V,q,\mathfrak{U})$. Она называется *полной нечетной унитарной конгруэнц-подгруппой уровня* $\mathfrak{U}$.

Зафиксируем гиперболическую пару (e_1,e_{-1}) в (V,q). Тогда в (V',q') есть гиперболическая пара $((e_1,e_1),(e_{-1},e_{-1}))$; будем для краткости обозначать через $\mathrm{EU}(V',q')$ группу $\mathrm{EU}_{((e_1,e_1),(e_{-1},e_{-1}))}(V',q')$.

Предложение 6. *Имеет место короткая точная последовательность*

$$1 \longrightarrow \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{EU}(V',q') \underset{\delta}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Очевидно, что группа $\iota(\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U}))$ нормализуется $\delta(\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q))$, и что они пересекаются только по единичному элементу. Значит, остается доказать, что каждый элемент $\mathrm{EU}(V',q')$ представляется в виде $\iota(g)\delta(h)$ для некоторых $g\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U})$, $h\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$. Поскольку

$$\iota(h_1)\delta(g_1)\iota(h_2)\delta(g_2)=\iota(h_1g_1h_2g_1^{-1})\delta(g_1g_2),$$

достаточно проверить наличие разложения для образующих. Пусть (v_1,v_2) ортогонален к (e_1,e_1) и (e_{-1},e_{-1}), $Q'(v_1,v_2)=(0,(a_1,a_2))\dotplus\mathfrak{L}'$. Тогда v_1 и v_2 ортогональны к e_1 и e_{-1}, $Q(v_1)=(0,a)\dotplus\mathfrak{L}$ и $\tilde{Q}(v_2-v_1)=a_2-a_1-(v_2-v_1,v_1)_q$, так что $T_{(e_{\pm1},e_{\pm1}),(v_1,v_2)}(a_1,a_2)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}&T_{(e_{\pm1},e_{\pm1}),(0,v_2-v_1)}(0,a_2-a_1-(v_2-v_1,v_1)_q)T_{(e_{\pm1},e_{\pm1}),(v_1,v_1)}(a_1,a_1)\\&=\iota(T_{e_{\pm1},v_2-v_1}(a_2-a_1-(v_2-v_1,v_1)_q))\delta(T_{e_{\pm1},v_1}(a_1)).\end{aligned}$$

□

Предложение 7. *Имеет место равенство*

$$\iota(\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U}))=\mathrm{EU}(V',q')\cap\iota(\mathrm{U}(V,q)).$$

Доказательство. Очевидно, что левая часть содержится в правой. Пусть теперь элемент (g_1,g_2) лежит в правой части. Тогда, с одной стороны, $g_1=e$, а с другой стороны, по предложению 6, (g_1,g_2) представляется в виде $\iota(h)\delta(g)$, $h\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U})$, $g\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$. Но тогда $g=e$, и $g_2=h$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U})$. □

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{I} = (I, \mathfrak{M})$ *– нечетный форменный идеал,* $\mathfrak{U} = (\mathfrak{I}, U, \tilde{Q})$ *– форменный подмодуль. Предположим, что группа* $\mathrm{EU}(V', q')$ *нормальна в* $\mathrm{U}(V', q')$. *Тогда* $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$ *нормальна в* $\mathrm{U}(V, q)$, *и имеет место стандартная коммутационная формула*

$$[\mathrm{CU}(V, q, \mathfrak{U}), \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)] \leqslant \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U}).$$

Доказательство. Пусть g из $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$, h из $\mathrm{U}(V, q)$. Рассмотрим элемент $x = \delta(h)\iota(g)\delta(h)^{-1} = \iota(hgh^{-1})$. С одной стороны, hgh^{-1} лежит в $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$ по предложению 5 и следствию из него. Значит, $x \in \iota(\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U}))$. С другой стороны, $\iota(g) \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V', q')$, так что $x \in \mathrm{EU}(V', q')$. Теперь x лежит в $\iota(\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U}))$ по предложению 7, следовательно, $hgh^{-1} \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$.

Пусть теперь h из $\mathrm{CU}(V, q, \mathfrak{U})$, g из $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$. Рассмотрим элемент $x = [\delta(h), \iota(g)] = \iota([h, g])$. С одной стороны, по определению $\mathrm{CU}(V, q, \mathfrak{U})$ $[h, g]$ лежит в $\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U})$, значит, $x \in \iota(\mathrm{U}(V, q, \mathfrak{U}))$. С другой стороны, $\iota(g)$ лежит в $\mathrm{EU}(V', q')$, так что по x лежит также в $\mathrm{EU}(V', q')$. Опять по предложению 7 $x \in \iota(\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U}))$, следовательно, $[h, g] \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q, \mathfrak{U})$. □

12. Стабильные ранги

В этом разделе мы напомним определения *стабильных рангов* кольца, которые указывают, начиная с какого ранга поведение линейных групп становится стандартным.

Пусть сначала R – произвольное ассоциативное кольцо с 1. Столбец $(a_1, \ldots, a_n)^t$ из R^n называется *унимодулярным*, если левый идеал, порожденный элементами $a_1, \ldots, a_n$, совпадает с R. Говорят, что *стабильный ранг* кольца R *не превосходит* n (и пишут $\mathrm{sr}(R) \leqslant n$), если для любого унимодулярного столбца $(a_1, \ldots, a_{n+1})^t$ существуют элементы $b_1, \ldots, b_n \in R$ такие, что столбец $(a_1 + b_1 a_{n+1}, \ldots, a_n + b_n a_{n+1})^t$ унимодулярен. Свойства стабильного ранга можно найти, например, в [11].

Говорят, что *локальный стабильный ранг* кольца R *не превосходит* n (и пишут $\mathrm{lsr}(R) \leqslant n$), если существует такое подкольцо R_0 центра R, что для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R_0 существует мультипликативная система $S_{\mathfrak{m}} \subseteq R_0 \setminus \mathfrak{m}$, для которой $\mathrm{sr}(S_{\mathfrak{m}}^{-1} R) \leqslant n$.

Определим теперь аналоги этих понятий для форменных колец в смысле Бака. Пусть R – кольцо с псевдоинволюцией, Λ –

форменный параметр. Говорят, что *стабильный ранг* форменного кольца (R, Λ) *не превосходит* n (и пишут $\mathrm{sr}(R, \Lambda) \leqslant n$), если $\mathrm{sr}(R) \leqslant n$, и для любого унимодулярного столбца

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{-n-1}, \ldots, a_{-1})^t$$

из R^{2n+2} существуют элементы существуют элементы b_{ij} из R, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$ такие, что $b_{ij} = \bar{1}^{-1} \bar{b}_{ji} \bar{1}^{-1}$, $\bar{1} b_{ii} \in \Lambda$, и столбец $(a'_1, \ldots, a'_{n+1})^t$ унимодулярен, где $a'_i = a_i + \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} a_{-j}$. (См. [8], где это условие обозначалось ΛS_n, и [14], где использовалось обозначение $\Lambda\mathrm{sr}$.)

Говорят, что *локальный стабильный ранг* форменного кольца (R, Λ) *не превосходит* n (и пишут $\mathrm{lsr}(R, \Lambda) \leqslant n$), если существует подкольцо R_0 в R, любой элемент s которого централен и удовлетворяет соотношению $\bar{s} = s\bar{1}$, такое, что для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R_0 существует мультипликативная система $S_{\mathfrak{m}} \subseteq R_0 \setminus \mathfrak{m}$, для которой $\mathrm{sr}(S_{\mathfrak{m}}^{-1} R, S_{\mathfrak{m}}^{-1} \Lambda) \leqslant n$. (В [14] от элементов $s \in R_0$ требовалось еще, чтобы $s\Lambda \subseteq \Lambda$; это условие лишнее, поскольку автоматически $s^2 \Lambda \subseteq \Lambda$, и этого достаточно для всех конструкций и доказательств.)

Очевидно, выполнены неравенства $\mathrm{lsr}(R) \leqslant \mathrm{sr}(R) \leqslant \mathrm{sr}(R, \Lambda)$ и $\mathrm{lsr}(R) \leqslant \mathrm{lsr}(R, \Lambda) \leqslant \mathrm{sr}(R, \Lambda)$. Если $\Gamma \geqslant \Lambda$, ясно, что $\mathrm{sr}(R, \Gamma) \leqslant \mathrm{sr}(R, \Lambda)$ и $\mathrm{lsr}(R, \Gamma) \leqslant \mathrm{lsr}(R, \Lambda)$.

Полезно еще понятие *абсолютного стабильного ранга* $\mathrm{asr}(R)$. Его определение и свойства можно найти в [20] и [15]. Для нас важно, что $\mathrm{asr}(R) \leqslant 1$ для полулокальных колец. В [8] доказано неравенство $\mathrm{sr}(R, \Lambda) \leqslant \mathrm{asr}(R)$ для любого форменного кольца (R, Λ).

Алгебра с псевдоинволюцией – пара (A, R), где R – кольцо с псевдоинволюцией, A – центральное подкольцо R такое, что если $a \in A$, то $\bar{a}\bar{1}^{-1} \in A$. Алгебра с псевдоинволюцией называется *конечной*, если R конечно как модуль над A, и *квазиконечной*, если R можно представить в виде фильтрующегося прямого предела колец R_α таких, что (A, R_α) конечны.

Очевидно, что если R – почти коммутативное кольцо (то есть конечнопорожденное как модуль над своим центром), то $(\mathrm{Cent}(R), R)$ – конечная алгебра. Но использование квазиконечных алгебр технически удобнее: например, если (A, R) квазиконечна, то $(A \times_I A, R \times_I R)$ квазиконечна для любого идеала I, см. [6].

Предложение 8. *Если (A, R) – квазиконечная алгебра с псевдоинволюцией, то* $\operatorname{lsr}(R, \Lambda) \leqslant 1$ *для любого форменного параметра* Λ.

Доказательство. Возьмем в качестве R_0 подкольцо A, порожденное всеми элементами вида $\bar{a}\bar{1}^{-1}a$, где $a \in A$, а в качестве $S_\mathfrak{m}$ – $R_0 \setminus \mathfrak{m}$. Тогда кольцо $S_\mathfrak{m}^{-1}R_\alpha$ полулокально для любого α (см. [23, Лемма 1.4]), значит, $\operatorname{sr}(S_\mathfrak{m}^{-1}R_\alpha, S_\mathfrak{m}^{-1}\Lambda_\alpha) \leqslant \operatorname{asr}(S_\mathfrak{m}^{-1}R_\alpha) \leqslant 1$ (здесь Λ_α – минимальный форменный параметр R_α). Теперь если у нас есть унимодулярный столбец, то существует α, для которого все элементы этого столбца лежат в R_α, и он унимодулярен в R_α, так что можно воспользоваться определением стабильного ранга для $(R_\alpha, \Lambda_\alpha)$; отсюда ясно, что $\operatorname{sr}(R, \Lambda) \leqslant 1$. □

Наконец, мы будем писать $\operatorname{l-ind}(V, q) \geqslant m, \operatorname{lsr}(R, \mathfrak{L}_{ev}) + n$, если для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R_0 существует мультипликативная система $S_\mathfrak{m} \subseteq R_0 \setminus \mathfrak{m}$, для которой $\operatorname{ind}(S_\mathfrak{m}^{-1}V, S_\mathfrak{m}^{-1}q) \geqslant m$ и $\operatorname{sr}(S_\mathfrak{m}^{-1}R, S_\mathfrak{m}^{-1}\Lambda) \leqslant \operatorname{ind}(S_\mathfrak{m}^{-1}V, S_\mathfrak{m}^{-1}q) - n$.

Мы будем обычно пользоваться $\operatorname{sr}(R, \mathfrak{L}_{ev})$ для описания эффектов “на стабильном уровне” а для “общих результатов” (таких, как нормальность элементарной подгруппы) формулировать условие на кольцо в терминах $\operatorname{lsr}(R, \mathfrak{L}_{ev})$. В частности, “общие результаты” справедливы для квазиконечных форменных алгебр.

13. Четная теорема Витта и стабилизация KU_1

Лемма 3. *Пусть (V, q) – нечетное $\mathfrak{L}$-квадратичное пространство, в котором есть n взаимно ортогональных гиперболических пар (e_i, e_{-i}), $i = 1, \ldots n$, $\{v_i\}_{i=1,\ldots m}$ – семейство векторов таких, что существуют векторы $\{v_i'\}_{i=1,\ldots m}$ из V_{ev}, удовлетворяющие условию $(v_i', v_j)_q = \delta_{ij}$, $\operatorname{sr}(R, \mathfrak{L}_{ev}) \leqslant n - m$. Тогда существует элемент $g \in \mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$ такой, что $gv_i = e_i + u_i$, где $u_i \in \langle e_{-i}, \ldots, e_{-1}\rangle \oplus V'$, где V' – подмодуль, состоящий из векторов, ортогональных ко всем e_i.*

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по m; база $m = 0$ тривиальна.

Шаг 0. Положим для краткости $v = v_m$. По индукционному предположению, существует g_0 из $\mathrm{U}(V, q)$ такой, что $gv_i = e_i + u_i$, где u_i лежит в $\langle e_{-i}, \ldots, e_{-1}\rangle \oplus V'$. Имеем $(g_0v_j', g_0v_i)_q = \delta_{ij}$ и g_0v_i' лежит в V_{ev}. Следовательно, домножая на g_0, мы можем с самого начала предположить, что $v_i = e_i + u_i$, и что существует v' такой, что $(v', v_i)_q = 0$ при $i \leqslant m - 1$ и $(v', v)_q = 1$.

Шаг 1. Положим $a_i = -\varepsilon_i(e_{-i}, v)_q$. Тогда $v = \sum_{|i|\leqslant n} e_i a_i + w$, где $w \in V'$. Далее, $(v', v)_q = 1$, значит

$$R\Big(\sum_{|i|\leqslant m-1} (v', e_i)_q a_i + (v', w)_q\Big) + \sum_{m\leqslant|j|\leqslant n} Ra_j = R.$$

Поскольку $\mathrm{sr}(R) \leqslant \mathrm{sr}(R, \mathfrak{L}_{ev}) \leqslant n - m$, существуют b_j из R такие, что

$$\sum_{-n\leqslant i\leqslant -m} Ra_i + \sum_{m\leqslant j\leqslant n} R\Big(a_j + b_j\Big(\sum_{|i|\leqslant m-1} (v', e_i)_q a_i + (v', w)_q\Big)\Big) = R.$$

Пусть $v'' = v' + \sum_{m\leqslant|j|\leqslant n} e_j \varepsilon_j (e_{-j}, v')_q$. Заметим, что $(v'', w)_q = (v', w)_q$, $(v'', e_i)_q = (v', e_i)_q$ и $(v'', v_i)_q = (v', v_i)_q = 0$ для $i \leqslant m - 1$. Кроме того, v'' лежит в V_{ev}, поэтому существует $c \in R$ такой, что $|v''|_q = (0, c) \dotplus \mathfrak{L}$. Положим

$$g_1 = \prod_{m\leqslant j\leqslant n} T_{e_j, v''\bar{1}^{-1}\bar{b}_j\bar{1}^{-1}}(\bar{1} b_j c \bar{1}^{-1} \bar{b}_j \bar{1}^{-1}).$$

Тогда $g_1 v_i = v_i$ для $i \leqslant m-1$, и $g_1 v = \sum_{|i|\leqslant n} e_i a'_i + w'$, где $(e_j, w')_q = 0$ для всех j, и

$$\begin{aligned} &a'_j = a_j, \ -n \leqslant j \leqslant -m, \\ &a'_j = a_j + b_j\Big(\sum_{|i|\leqslant m-1} (v', e_i)_q a_i + (v', w)_q\Big) + r_j a_{-j}, \ m \leqslant j \leqslant n \end{aligned}$$

для некоторых r_j из R. Значит, $\sum_{m\leqslant|j|\leqslant n} Ra'_j = R$, и, домножая на g_1, можно с самого начала предположить, что $\sum_{m\leqslant|j|\leqslant n} Ra_j = R$.

Шаг 2. Поскольку $\mathrm{sr}(R, \mathfrak{L}_{ev}) \leqslant n - m$, существуют элементы b_{ij} из R, $m \leqslant i, j \leqslant n$ такие, что $b_{ij} = \bar{1}^{-1}\bar{b}_{ji}\bar{1}^{-1}$, $\bar{1} b_{ii} \in \mathfrak{L}_{ev}$, и столбец $(a'_m, \dots, a'_n)^t$ унимодулярен, где $a'_i = a_i + \sum_j b_{ij} a_{-j}$. Положим

$$g_2 = \prod_{i=m}^{n} T_{e_i 0}(\bar{1} b_{ii}) \cdot \prod_{m\leqslant i<j\leqslant n} T_{e_i, e_j b_{ji}}(0).$$

Тогда $g_2 v_i = v_i$ при $i \leqslant m - 1$, и $g_2 v = \sum_{m\leqslant|i|\leqslant n} e_i a'_i + \sum_{|i|\leqslant m} e_i a_i + w$. Значит, домножая на g_2, мы можем предположить, что $\sum_{m\leqslant j\leqslant n} Ra_j = R$.

Шаг 3. Если взять $g_3 = T_{e_i, e_{-j}\bar{1}^{-1}\bar{b}\bar{1}^{-1}}(0)$, $m \leqslant i, j \leqslant n$, то $g_3 v_k = 0$ при $k \leqslant m-1$, а $g_3 v = \sum_{m\leqslant|k|\leqslant n} e_k a'_k + w$, где $a'_i = a_i + b a_j$ и $a'_k = a_k$

для $m \leqslant k \leqslant n$, $k \neq i$. Поскольку $\mathrm{sr}(R) \leqslant n - m$, выполнив серию таких операций, мы можем добиться того, что a_m станет равным 1.

Шаг 4. Положим $g_4 = \prod_{m+1 \leqslant |i| \leqslant n} T_{e_i, -e_{-m}\bar{1}^{-1}\bar{a}_i\bar{1}^{-1}}(0)$. Тогда $g_4 v_i = v_i$ для $i \leqslant m-1$, и $g_4 v = \sum_{|i| \leqslant m} e_i a'_i + w$ с $a'_m = 1$. Значит, мы с самого начала можем считать, что v имеет вид $\sum_{|i| \leqslant m} e_i a_i + e_m + w$, $a_m = 1$, $w \in V'$.

Шаг 5. Положим $g_5 = \prod_{i=1}^{m-1} T_{e_i, -e_{-m}\bar{1}^{-1}\bar{a}_i\bar{1}^{-1}}(0)$. Тогда $g_5 v$ имеет нужный вид $e_m + u'$, где $u' \in \langle e_{-m}, \dots, e_{-1}\rangle \oplus V'$. Но $g_5 v_i = v_i + e_{-m} b_i$ для некоторых $b_i \in R$, $i \leqslant m-1$. Возьмем теперь $g_6 = \prod_{i=1}^{m-1} T_{e_m, -e_{-i}\bar{1}^{-1}\bar{b}_m\bar{1}^{-1}}(0)$. Тогда $g_6 g_5 v_i = v_i$ для $i \leqslant m-1$, и $g_6 g_5 v = e_m + u$, где $u \in \langle e_{-m}, \dots, e_{-1}\rangle \oplus V'$, что и завершает доказательство. $\square$

Пусть U – подпространство нечетного квадратичного пространства V. Назовем его *относительно невырожденным четного типа*, если для любого R-линейного отображения $\varphi : U \to R$ существует вектор $v \in V_{ev}$ такой, что $(v, u)_q = \varphi(u)$ для всех $u \in U$.

Теорема 2. *Пусть V_1 и V_2 – изометричные свободные подпространства нечетного $\mathfrak{L}$-квадратичного пространства V, относительно невырожденные четного типа, причем $\mathrm{ind}(V, q) \geqslant \mathrm{sr}(R, \mathfrak{L}_{ev})$ $+ \dim(V_1)$. Тогда существует элемент $\mathrm{EU}_{(e_1, e_{-1})}(V, q)$, переводящий V_1 в V_2 и продолжающий данную изометрию между ними (где (e_1, e_{-1}) – любая гиперболическая пара из определения индекса).*

Ср. [14, Теорема 1] для случая квадратичных групп.

Доказательство. Пусть дана изометрия $f : V_1 \to V_2$, $\{v_i\}_{i=1,\dots,m}$ – базис V_1 (где $m = \dim(V_1)$). Тогда $\{f(v_i)\}_{i=1,\dots,m}$ – базис V_2. В силу относительной невырожденности V_1, существуют векторы $v'_1, \dots, v'_m$ такие, что $(v'_i, v_j)_q = \delta_{ij}$. Пусть в V содержится гиперболическое подпространство $\langle e_1, \dots, e_l, e_{-l}, \dots, e_{-1}\rangle \oplus V'$ (где V', как и раньше – ортогональное дополнение к $\langle e_1, \dots e_{-1}\rangle$). Применяя лемму 3, находим g из $\mathrm{U}(V, q)$ такой, что $g v_i = e_i + \sum_{j=1}^{i} e_{-j} a_{ij} + u_i$, $u_i \in V'$. Аналогично, существует h из $\mathrm{U}(V, q)$ такой, что $h f(v_i) = e_i + \sum_{j=1}^{i} e_{-j} b_{ij} + w_i$, $w_i \in V'$.

Заметим, что

$$|u_i|_q \dotplus (0, a_{ii}) \dotplus \mathfrak{L} = |g v_i|_q = |h f(v_i)|_q = |w_i|_q \dotplus (0, b_{ii}) \dotplus \mathfrak{L}.$$

Теперь, домножая h слева на $T_{e_{-i},(u_i-w_i)\bar{1}^{-1}}(\bar{1}(b_{ii}-a_{ii}-(u_i-w_i,u_i)_q)\bar{1}^{-1})$, мы можем считать, что $b_{ii}=a_{ii}$ и $w_i=u_i$.

Теперь при $j<i$

$$a_{ij}=(gv_j,gv_i)_q-(u_j,u_i)_q=(hf(v_j),hf(v_i))_q-(u_j,u_i)_q=b_{ij},$$

значит, $gv_i=hf(v_i)$ для всех i, и $h^{-1}g$ – искомая изометрия. □

Из теоремы 2 следует транзитивность действия элементарной унитарной группы на гиперболических парах при условии $\operatorname{ind}(V,q)\geqslant\operatorname{sr}(R,\mathfrak{L}_{ev})+2$; следующая теорема показывает, что оценку можно слегка улучшить.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{ind}(V,q)\geqslant\operatorname{sr}(R,\mathfrak{L}_{ev})+1$. *Тогда группа* $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ *транзитивно действует на гиперболических парах (где* (e_1,e_{-1}) *– любая гиперболическая пара из определения индекса).*

Ср. [20, Теорема 8.1 и доказательство Следствия 8.3] для случая квадратичных групп.

Доказательство. Надо доказать, что любую гиперболическую пару (u,v) можно перевести в (e_1,e_{-1}). Очевидно, что прямая, натянутая на u, является относительно невырожденным подпространством четного типа. Тогда по теореме 2 существует $g\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ такой, что $gu=e_1$. Заменяя (u,v) на (gu,gv), мы можем считать, что $u=e_1$; мы хотим найти $h\in\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ такой, что $he_1=e_1$ и $hv=e_{-1}$. Пусть $v=\sum_i e_ia_i+w$, w ортогонален всем e_i. Заметим, что $a_{-1}=(e_1,v)_q=1$. Положим $h_1=\prod_{i\neq\pm1}T_{e_1,-e_ia_i}(0)$. Тогда $h_1e_1=e_1$ и $h_1v=e_1a+e_{-1}+w$ для некоторого $a\in R$. Заметим, что $(w,\bar{a}\bar{1}^{-1})\dotplus\mathfrak{L}=|h_1v|_q=0$. Положим теперь $h=T_{e_1,-w}(\bar{1}a+(w,w)_q)\cdot h_1$. Тогда $he_1=e_1$ и $hv=e_{-1}$, и нужный h найден. □

Из транзитивности действия элементарной подгруппы на гиперболических парах немедленно следуют важные теоремы о инвариантности элементарной группы и о сюръективной стабилизации KU_1.

Теорема 4. *При* $\operatorname{ind}(V,q)\geqslant\operatorname{sr}(R,\mathfrak{L}_{ev})+1$ *элементарная группа* $\mathrm{EU}(V,q)$ *не зависит от выбора гиперболической пары. В частности, она нормальна в* $\mathrm{U}(V,q)$.

Доказательство. Пусть (e_1,e_{-1}) – гиперболическая пара из определения индекса, (e'_1,e'_{-1}) – любая гиперболическая пара.

По теореме 3, существует $g \in \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ такой, что $ge_1 = e'_1$ и $ge_{-1} = e'_{-1}$. Если (e_i, e_{-i}), $i = 2, \ldots, \mathrm{ind}(V,q)$ – гиперболические пары, взаимно ортогональные и ортогональные к (e_1, e_{-1}), то (ge_i, ge_{-i}) обладают таким же свойством по отношению к (e'_1, e'_{-1}). Так что (e_1, e_{-1}) и (e'_1, e'_{-1}) равноправны, и достаточно доказать включение $\mathrm{EU}_{(e'_1,e'_{-1})}(V,q) \leqslant \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$. Это просто: если $(e'_1, v)_q = (e'_{-1}, v)_q = 0$ и $|v|_q = (0,a) \dotplus \mathfrak{L}$, то $T_{e'_{\pm 1}v}(a) = gT_{e_{\pm 1},g^{-1}v}(a)g^{-1}$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$. □

В частности, в формулировках теорем 2 и 3 можно опустить заключенную в скобки оговорку.

Теорема 5. *Пусть* $\mathrm{ind}(V,q) \geqslant \mathrm{sr}(R,\mathfrak{L}_{ev}) + 1$. *Тогда имеет место разложение*

$$\mathrm{U}(V,q) = \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)\mathrm{U}_{(e_1,e_{-1})}(V,q).$$

Ср. [14, Предложение 7] для случая квадратичных групп.

Доказательство. Заметим, что по предложению 2 в правой части разложения стоит группа.

Пусть g – элемент $\mathrm{U}(V,q)$. Очевидно, что (ge_l, ge_{-l}) является гиперболической парой. По теореме 3, существует элемент h из $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ такой, что $hge_l = e_l$ и $hge_{-l} = e_{-l}$. Но тогда hg лежит в $\mathrm{U}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$, что и дает искомое разложение. □

Следствие. *Пусть* $l \geqslant \mathrm{sr}(R,\mathfrak{L}_{ev}) + 1$. *Тогда каноническое отображение*

$$\mathrm{KU}_{1,2l-2}(R,\mathfrak{L}) \to \mathrm{KU}_{1,2l}(R,\mathfrak{L})$$

сюрьективно.

Ср. [14, Теорема 2] и [7, Теорема 1.1] для случая квадратичных групп, [8, Теорема 1.1] для случая эрмитовых групп.

14. Нормальность элементарной подгруппы

Рассмотрим нечетное форменное кольцо $(R[X], \mathfrak{L}[X])$. Пусть для неотрицательного целого N $\mathfrak{L}[X] \leftharpoonup X^N$ обозначает множество всех элементов вида (uX^N, aX^{2N}), где $(u,a) \in \mathfrak{L}[X]$. Легко видеть, что $\mathfrak{I}_N = (R[X]X^N, \mathfrak{L}[X] \leftharpoonup X^N)$ – нечетный форменный идеал, и $\mathfrak{U}_N = (\mathfrak{I}_N, V[X]X^N, \tilde{Q})$ – форменный подмодуль $V[X]$ (где $\tilde{Q}$ – естественное поднятие Q на $V[X]X^N$).

Лемма 4. *Пусть* (e_1, e_{-1}) *и* (e_2, e_{-2}) *– взаимно ортогональные гиперболические пары,* N *– целое неотрицательное. Тогда*

$$\mathrm{FU}_{(e_2,e_{-2})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_{2N}) \leqslant \mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_N).$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично предложению 3. Обозначим правую часть через F. По свойству ESD-трансвекций, $T_{e_{\pm 2}, e_1 bX^N}(0)$ и $T_{e_{\pm 2}, e_{-1} cX^N}(0)$ лежат в F. Надо показать, что $T_{e_{\pm 2}, vX^{2N}}(aX^{4N})$ лежит в F при $(e_2, v)_q = (e_{-2}, v)_q = 0$ и $|v|_q = a \dotplus \mathfrak{L}$. Представим v в виде $e_1 b + e_{-1} c + w$, где $(e_1, w)_q = (e_{-1}, w)_q = 0$. Тогда $T_{e_{\pm 2}, vX^{2N}}(a)$ можно записать как

$$T_{e_{\pm 2}, e_1 bX^{2N}}(0) T_{e_{\pm 2}, e_{-1} cX^{2N}}(0) [T_{e_1, wX^N}(-\bar{a}X^{2N}), T_{e_{\pm 2}, e_{-1} X^N}(0)],$$

и все сомножители лежат в F. □

Лемма 5. *Пусть* (V, q) *содержит взаимно ортогональные гиперболические пары* (e_1, e_{-1}), (e_2, e_{-2}), (e_3, e_{-3}). *Тогда для любого* $g \in \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ *и целого неотрицательного* M *существует целое неотрицательное* N *такое, что*

$$g\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_N) g^{-1} \leqslant \mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_M).$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для всех образующих $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$; после этого лемма доказывается очевидной индукцией по длине представления g в виде произведения образующих. В доказательстве предложения 4 показано, что $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ порождается элементами $T_{e_{\pm 1} v}(a)$, где v ортогонален к (e_1, e_{-1}) и либо к (e_2, e_{-2}), либо к (e_3, e_{-3}). Можно считать, что v ортогонален к (e_2, e_{-2}). Положим $N = 4M$. Тогда

$$g\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_{4M}) g^{-1} \leqslant g\mathrm{FU}_{(e_2,e_{-2})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_{2M}) g^{-1} \leqslant \mathrm{FU}_{(e_2,e_{-2})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_{2M}) \leqslant \mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_M).$$

□

Следующая простая лемма верна и для колец без псевдоинволюции.

Лемма 6. *Пусть* $g(X)$ *– элемент* $\mathrm{GL}(V[X], R[X]X)$, S *– центральная мультипликативная система* R, $F_S(g(X)) = e$ *в* $\mathrm{GL}(S^{-1}V[X])$. *Тогда существует* $s \in S$ *такой, что* $g(sX) = e$.

Доказательство. По условию, g можно представить в виде $g(X) = e + Xh(X)$. При этом $F_S(h(X)) = 0$, значит, найдется $s \in S$ такой, что $sh(X) = 0$. Но тогда $sh(sX) = 0$, значит, $g(sX) = e + sXh(sX) = e$. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $g(X)$ *– элемент* $\mathrm{GL}(V[X], R[X]X)$, S *– мультипликативная система* R, $F_S(g(X)) \in \mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(S^{-1}V[X], S^{-1}q[X], S^{-1}\mathfrak{U}_1)$. *Тогда существует* $s \in S$ *такой, что* $g(sX) \in \mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_1)$.

Доказательство. По условию, $F_S(g(X))$ можно представить как произведение элементов вида $T_{e_{\pm 1}, v_m X/s_m}(a_m X^2/s_m^2)$, $a_m \in R[X]$, $s_m \in S$, $v_m \in V[X]$, $(e_1, v_m)_{q[X]} = (e_{-1}, v_m)_{q[X]} = 0$, $|v_m|_{q[X]} = (0, a_m) \dotplus \mathfrak{L}[X]$. Обозначим через s' произведение всех s_m. Тогда $F_S(g(s'X))$ представляется в виде произведения $T_{e_{\pm 1}, v'_m X}(a'_m X^2/1)$, $a'_m \in R[X]$, $v'_m \in V[X]$, $(e_1, v'_m)_{q[X]} = (e_{-1}, v'_m)_{q[X]} = 0$, $|v'_m|_{q[X]} = (0, a'_m) \dotplus \mathfrak{L}[X]$. Пусть теперь $h(X)$ – произведение элементов $T_{e_{\pm 1}, v'_m X}(a'_m X^2)$ в том же порядке. Тогда $F_S(g(s'X)h(X)^{-1}) = e$. С другой стороны, $g(s'X)$ и $h(X)$ содержатся в $\mathrm{GL}(V[X], R[X]X)$. Значит, по лемме 6, существует $s'' \in S$ такой, что $g(s's''X)h(s''X)^{-1} = e$. Тогда при $s = s's''$ $g(sX) = h(s''X)$ лежит в $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_1)$. $\square$

Теорема 6. *Пусть* $\text{l-ind}(V) \geqslant 3, \mathrm{lsr}(R, \mathfrak{L}_{ev}) + 1$. *Тогда* $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ *– нормальная подгруппа в* $\mathrm{U}(V, q)$.

Доказательство. Пусть g – элемент $\mathrm{U}(V, q)$; надо доказать, что g нормализует $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$. Пусть R_0 – подкольцо из определения lsr. Пусть I – множество всех таких элементов $x \in R_0$, что $gT_{e_{\pm 1}, vx}(ax^2)g^{-1}$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ для всех $v \in V$, $a \in R$ таких, что $(e_1, v)_q = (e_{-1}, v)_q = 0$, $|v|_q = (0, a) \dotplus \mathfrak{L}$, а также $gT_{e_{\pm 1} 0}((a + \bar{a})x)g^{-1}$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$ для всех $a \in R$. Тогда I – идеал R_0: очевидно, что он устойчив относительно умножения на элементы R_0; проверим, что если $x_1, x_2 \in I$, то $x_1 + x_2 \in I$. Действительно,

$$gT_{e_{\pm 1} 0}((a + \bar{a})(x_1 + x_2))g^{-1} = gT_{e_{\pm 1} 0}((a + \bar{a})x_1)g^{-1} gT_{e_{\pm 1} 0}((a + \bar{a})x_2)g^{-1}$$

лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V, q)$, и

$$gT_{e_{\pm 1}, v(x_1+x_2)}(a(x_1 + x_2)^2)g^{-1} =$$
$$gT_{e_{\pm 1}, vx_1}(ax_1^2)g^{-1} gT_{e_{\pm 1}, vx_2}(ax_2^2)g^{-1} gT_{e_{\pm 1}, 0}((a + \bar{a})x_1x_2)g^{-1}$$

лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$, поскольку x_1, x_2 и x_1x_2 лежат в I.

Покажем теперь, что I не содержится ни в одном максимальном идеале; тогда $1 \in I$, и $gT_{e_{\pm 1}v}(a)g^{-1}$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ для всех v и a.

Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал R_0. Возьмем мультипликативную систему S такую, что $\mathrm{ind}(S^{-1}V, S^{-1}q) \geqslant \mathrm{sr}(S^{-1}R, S^{-1}\mathfrak{L}_{ev}) + 1$. Как и в теореме 4, легко доказать, что существуют гиперболические пары (e_2, e_{-2}) и (e_3, e_{-3}), ортогональные друг к другу и к (e_1, e_{-1}). В силу теоремы 5, $F_S(g) = g_1g_2$, где $g_1 \in \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(S^{-1}V, S^{-1}q)$ и $g_2 \in \mathrm{U}_{(e_1,e_{-1})}(S^{-1}V, S^{-1}q)$.

Положим $h(X) = gT_{e_1, vX^N}(aX^{2N})g^{-1}$, где N взято из леммы 5 с $g = g_1$ и $M = 1$. Тогда

$$F_S(h(X)) = g_1 T_{e_1, g_2 v X^N}(aX^{2N}) g_1^{-1}$$

лежит в $\mathrm{FU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X], \mathfrak{U}_1)$.

С другой стороны, ясно, что $h(X)$ лежит в $\mathrm{GL}(V[X], R[X]X)$ в силу нормальности этой группы. Значит, по лемме 7 существует $s \in S$ такой, что $h(sX)$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V[X], q[X])$. Рассмотрим теперь морфизм нечетных форменных колец $(R[X], \mathfrak{L}[X]) \to (R, \mathfrak{L})$, переводящий X в 1, и воспользуемся функториальностью EU. Получим, что $gT_{e_1, vs^N}(as^{2N})g^{-1}$ лежит в $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)$ для всех v и a. Итак, $s^N \in I$; с другой стороны, $s^N \in S \leqslant R_0 \setminus \mathfrak{m}$. Значит, I не содержится в $\mathfrak{m}$, и теорема доказана. □

Следствие. *Пусть (A, R) – квазиконечная алгебра с псевдоинволюцией, $\mathfrak{L}$ – нечетный форменный параметр, $\mathfrak{U}$ – форменный подмодуль,* $\mathrm{ind}(V,q) \geqslant 3$. *Тогда* $\mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U})$ *нормальна в* $\mathrm{U}(V,q)$, *и выполнена стандартная коммутационная формула*

$$[\mathrm{CU}(V,q,\mathfrak{U}), \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q)] = \mathrm{EU}_{(e_1,e_{-1})}(V,q,\mathfrak{U}).$$

Ср. [21, Теорема 3] для случая ортогональных групп, [22] для случая симплектических групп, [18] для случая групп Шевалле, [9, Теорема 1.1], [11, Теорема 4.4] и [23, Теорема 1.1] для случая квадратичных групп. Наша теорема также позволяет снять неудобные ограничения на кольцо в [17] для случая (односвязной) скрученной группы Шевалле типа $^2A_{2l}$.

Доказательство. Скомбинировать предложение 4, предложение 8, теорему 6 и теорему 1. □

Литература

1. Л. Н. Васерштейн, *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств.* — Функц. Анализ и его приложения **5** (1971), 102–110.
2. E. Abe, *Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **21** (1969), 474–494.
3. E. Abe, *Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings.* — Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A **13** (1977), No. 371, 194–218.
4. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* Thesis, Columbia University (1969).
5. A. Bak, *K-theory of forms.* — Ann. of Math. Stud., Vol. 98, Princeton Univ. Press, Princeton (1981).
6. A. Bak, *Nonabelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
7. A. Bak, V. Petrov, and G. Tang, *Stability for quadratic K_1* (в печати).
8. A. Bak and G. Tang, *Stability for Hermitian K_1.* — J. Pure Appl. Algebra **150** (2000), 107–121.
9. A. Bak and N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I*: Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7** (2000), No. 2, 159–196.
10. A. J. Hahn and O. T. O'Meara, *The Classical Groups and K-Theory.* Springer-Verlag, Berlin (1989).
11. R. Hazrat, *Dimension theory and non-stable K_1 of quadratic modules.* — K-Theory **27** (2002), 293–327.
12. R. Hazrat and N. Vavilov, *K_1 of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
13. M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings.* Springer-Verlag, Berlin (1991).
14. V. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory **29** (2003), No. 3 (в печати).
15. J. T. Stafford, *Absolute stable rank and quadratic forms over noncommutative rings.* — K-Theory **4** (1990), 121–130.
16. M. R. Stein, *Relativizing functors on rings and algebraic K-theory.* — J. Algebra **19** (1971), No. 1, 140–152.
17. K. Suzuki, *Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings.* — J. Algebra **175** (1995), 526–536.
18. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55** (1986), No. 2, 693–710.
19. G. Tang, *Hermitian groups and K-theory.* — K-Theory **13** (1998), 209–267.
20. W. van der Kallen, B. Magurn, and L. N. Vaserstein, *Absolute stable rank and Witt cancellation for non-commutative rings.* — Invent. Math. **91** (1988), 525–542.
21. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of orthogonal groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **110** (1988), No. 5, 955–973.
22. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of symplectic groups over rings.* — K-Theory **2** (1989), No. 5, 647–673.

23. L. N. Vaserstein and Hong You, *Normal subgroups of classical groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra **105** (1995), No. 1, 93–106.

Petrov V. Odd unitary groups.

In the present paper we introduce a new type of classical-like groups, so called odd unitary groups. This notion covers the cases of Bak's quadratic groups and Hermitian groups. The normality of the elementary subgroup and the surjective stability of K_1-functor are proved in this context.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 18 ноября 2003