Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, III: СЕРИЯ $SD(3\mathcal{K})$

Введение

Настоящая работа продолжает цикл работ [1–8], в которых были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального или полудиэдрального типа из классификации К. Эрдман [9], при этом мы будем использовать подход, развитый в [7]. Его существо составляет то, что на основе некоторых эмпирических наблюдений мы выдвигаем гипотезы о строении минимальных проективных резольвент простых модулей, и после их обоснования считываем "когомологическую информацию" с найденных резольвент, используя усовершенствования диаграммного метода Бенсона–Карлсона [10], предложенные в [1, 2, 7].

Соответствующие вычисления приводят к описанию не только алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр, но также Ext-алгебр простых модулей над ними, и потому полученные результаты могут быть применены к описанию кольца когомологий тех конечных групп, у которых главный блок Морита-эквивалентен какой-либо из алгебр серии $SD(3\mathcal{K})$.

1. Формулировка основных результатов

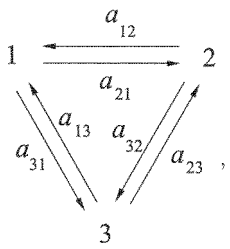
Пусть K – произвольное поле. Алгебры

$$R^{(\mathcal{K})} = R^{(\mathcal{K})}_{n_1,n_2,n_3}, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

составляющие серию $SD(3\mathcal{K})$, определяются следующим колчаном с соотношениями (композиция путей записывается справа

налево):

$Q^{(\mathcal{K})}$:



$$a_{13}a_{32} = a_{12}\,(a_{21}a_{12})^{n_3-1}, \quad a_{32}a_{21} = a_{31}\,(a_{13}a_{31})^{n_2-1},$$
$$a_{21}a_{13} = a_{23}\,(a_{32}a_{23})^{n_1-1}, \quad 0 = a_{23}a_{31} = a_{12}a_{23} = a_{31}a_{12}. \tag{1.1}$$

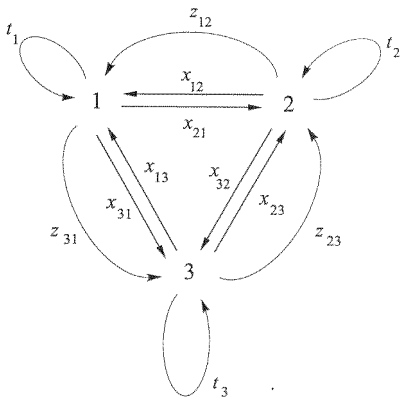
Для произвольной конечномерной K-алгебры Λ через

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \operatorname{Ext}_{\Lambda}^{m}(M, M)$$

обозначим Ext-алгебру Λ-модуля M. Если Λ – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(\Lambda)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(\Lambda/J(\Lambda))$ называется алгеброй Йонеды алгебры Λ и обозначается через $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(\mathcal{K})})$ алгебры $R^{(\mathcal{K})}$ рассмотрим колчан:

$\mathfrak{R}^{(\mathcal{K})}$:



На алгебре путей $K[\Re^{(\mathcal{K})}]$ этого колчана введем градуировку такую, что (для всех подходящих значений индексов i, j, k, l, m) имеем:

$$\deg(x_{ij}) = 1,\ \deg(z_{kl}) = 3,\ \deg(t_m) = 4.$$

Рассмотрим на колчане $\Re^{(\mathcal{K})}$ следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = x_{ij}x_{ji} \quad \text{для всех} \quad i \quad \text{и} \quad j \quad \text{таких, что} \quad i \neq j, \\ 0 = x_{13}x_{32}x_{21} = x_{21}x_{13}x_{32} = x_{32}x_{21}x_{13}, \\ 0 = z_{12}x_{21} = x_{21}z_{12} = z_{23}x_{32} = x_{32}z_{23} = z_{31}x_{13} = x_{13}z_{31}, \\ z_{31}x_{12} = -x_{31}z_{12},\ z_{23}x_{31} = -x_{23}z_{31},\ z_{12}x_{23} = -x_{12}z_{23}, \\ t_ix_{ij} = x_{ij}t_j \quad \text{для всех} \quad i \quad \text{и} \quad j \quad \text{таких, что} \quad i \neq j, \\ t_1z_{12} = z_{12}t_2,\ t_2z_{23} = z_{23}t_3,\ t_3z_{31} = z_{31}t_1, \\ x_{23}x_{31}t_1 = z_{23}z_{31},\ x_{31}x_{12}t_2 = z_{31}z_{12},\ x_{12}x_{23}t_3 = z_{12}z_{23}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим K-алгебру, определяемую колчаном $\Re^{(\mathcal{K})}$ с соотношениями (1.2). Ясно, что алгебра $\mathcal{A}$ наследует с алгебры $K[\Re^{(\mathcal{K})}]$ естественную градуировку.

Теорема 1.1. *Пусть $R = R^{(\mathcal{K})}_{n_1,n_2,n_3}$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Из доказательства теоремы 1.1 мы получаем следующее описание Ext-алгебр простых модулей над рассматриваемыми алгебрами.

Следствие 1.2. *Пусть $R = R^{(\mathcal{K})}$, S – некоторый простой R-модуль. Тогда* Ext*-алгебра $\mathcal{E}(S)$ модуля S изоморфна как градуированная алгебра алгебре*

$$K\langle a, b, c\rangle/(ab - ba, ac + ca, bc - cb, a^2b - c^2),$$

где

$$\deg a = 3, \quad \deg b = 4, \quad \deg c = 5.$$

Мы будем использовать основные понятия и обозначения, введенные в работах [1, 3]. В частности, для любой алгебры R серии $SD(3\mathcal{K})$ через e_i, $i = 1, 2, 3$, обозначим идемпотенты, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{K})}$, а через $P_i = Re_i$ и $S_i = P_i/J(R)P_i$,

$i = 1, 2, 3$, обозначим соответствующие этим вершинам неразложимые проективные R-модули и простые R-модули соответственно. Умножение справа на элемент $x \in e_i R e_j$ индуцирует гомоморфизм, действующий из P_i в P_j, и мы будем обозначать его также через x. Все рассматриваемые модули – левые.

2. Резольвенты

Пусть $R = R^{(\mathcal{K})} = R^{(\mathcal{K})}_{n_1,n_2,n_3}$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, – алгебры, определенные в разделе 1. Напомним, что ввиду [9] эти алгебры симметрические и, следовательно, являются QF-алгебрами.

Введем сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры путей $K[Q^{(\mathcal{K})}]$ колчана $Q^{(\mathcal{K})}$ (а также для их канонических образов в алгебре R):

$$\alpha_1 = a_{21}(a_{12}a_{21})^{n_3-1}, \quad \alpha_2 = a_{32}(a_{23}a_{32})^{n_1-1},$$
$$\alpha_3 = a_{13}(a_{31}a_{13})^{n_2-1}.$$

Как легко видеть, модуль P_1 имеет следующий K-базис:

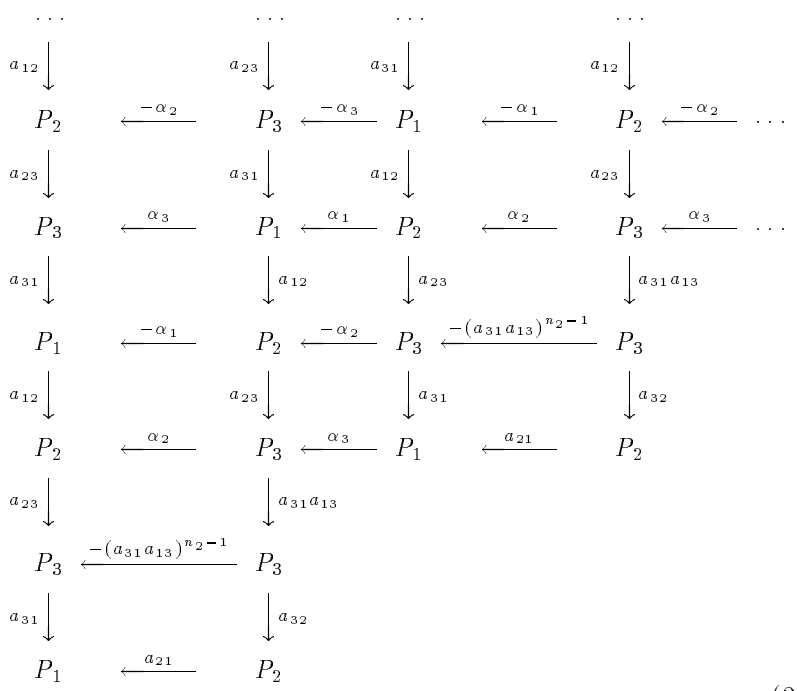
$$P_1 = {}_K\langle e_1, a_{21}, a_{12}a_{21}, a_{21}a_{12}a_{21}, \ldots, (a_{12}a_{21})^{n_3-1}, a_{21}(a_{12}a_{21})^{n_3-1},$$

$$a_{31}, a_{13}a_{31}, \ldots, a_{31}(a_{13}a_{31})^{n_2-1} (= a_{32}a_{21}), (a_{13}a_{31})^{n_2} (= (a_{12}a_{21})^{n_3})\rangle.$$

Модули P_2 и P_3 имеют аналогичные базисы. В частности,

$$\dim_K P_1 = 2n_2 + 2n_3, \quad \dim_K P_2 = 2n_3 + 2n_1,$$
$$\dim_K P_3 = 2n_1 + 2n_2.$$

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):



(2.1)

Предложение 2.1. *Тотализация* $\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B_{\bullet\bullet}$ *вида* (2.1) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S_1.

Доказательство. Аналогично [7] воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса:

$$E^2_{pq} = H^h_p H^v_q(B_{\bullet\bullet}) \;\Rightarrow\; H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(B_{\bullet\bullet})), \tag{2.2}$$

и докажем, что второй лист этой спектральной последовательности вырождается.

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} a_{31} &= {}_K\langle a_{23}, a_{32}a_{23}, \ldots, (a_{32}a_{23})^{n_1-1}, a_{23}(a_{32}a_{23})^{n_1-1}, (a_{32}a_{23})^{n_1}\rangle \\ &= \operatorname{Im} a_{23}.\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $\operatorname{Ker} a_{23} = \operatorname{Im} a_{12}$, $\operatorname{Ker} a_{12} = \operatorname{Im} a_{31}$, а также $\operatorname{Ker} a_{32} = \operatorname{Im}(a_{31}a_{13})$.

Поэтому ненулевые члены первого листа спектральной последовательности (2.2) находятся только в строках с четными номерами, и они таковы (за исключением строки с номером 0):

$$\operatorname{Ker}(a_{31}a_{13})/\operatorname{Im} a_{23} \xleftarrow{\overline{\alpha_3}} \operatorname{Coker} a_{31} \xleftarrow{\overline{a_{21}}} \operatorname{Coker} a_{32}, \qquad (2.3)$$

где $\overline{\alpha_3}$ и $\overline{a_{21}}$ – гомоморфизмы, индуцированные гомоморфизмами умножения на α_3 и a_{21} соответственно. Легко проверяется, что модули и гомоморфизмы в (2.3) составляют короткую точную последовательность. Поскольку $\operatorname{Ker}(a_{31}a_{13})/\operatorname{Im} a_{23} \simeq S_1$, отсюда также следует, что коядро гомоморфизма $\overline{a_{21}}$, стоящего в нулевой строке первого листа спектральной последовательности (2.2), изоморфно модулю S_1. Таким образом, доказано, что $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ является проективной резольвентой модуля S_1, а ее минимальность следует из того, что $\operatorname{Im}(d^Q_m\colon Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. □

Замечание 2.2. Исходя из симметрии в описании алгебр $R^{(\mathcal{K})}$ (см. соотношения (1.1)), можно построить бикомплексы, тотализации которых приводят к минимальным проективным резольвентам модулей S_2 и S_3. Мы не будем выписывать эти бикомплексы явно, хотя они будут использоваться в последующих вычислениях.

Следствие 2.3. *Группы расширений простых R-модулей имеют следующие размерности:*
а) *для* $i = 1, 2, 3$

$$\dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_i) = \begin{cases} 2\left[\dfrac{m}{12}\right], & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right] + 1, & \text{если } m \equiv 0, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ или } 10 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right] + 2, & \text{если } m \equiv 8, 9 \text{ или } 11 \pmod{12}; \end{cases}$$

б) $\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1,S_2) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_2,S_3) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_3,S_1)$

$$= \begin{cases} 2\left[\dfrac{m}{12}\right], & \text{если } m \equiv 0 \text{ или } 3 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right]+1, & \text{если } m \equiv 1,2,4,6 \text{ или } 7 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right]+2, & \text{если } m \equiv 5,8,9,10 \text{ или } 11 \pmod{12}; \end{cases}$$

в) $\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1,S_3) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_2,S_1) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_3,S_2)$

$$= \begin{cases} 2\left[\dfrac{m}{12}\right], & \text{если } m \equiv 0 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right]+1, & \text{если } m \equiv 1,2,3,4,5 \text{ или } 8 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right]+2, & \text{если } m \equiv 6,7,9 \text{ или } 11 \pmod{12}, \\ 2\left[\dfrac{m}{12}\right]+3, & \text{если } m \equiv 10 \pmod{12}. \end{cases}$$

Замечание 2.4. Пусть $B_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс вида (2.1) или аналогичный ему бикомплекс. В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении m-го члена минимальной проективной резольвенты $Q_m(S_k) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ простого модуля S_k по возрастанию второго индекса j (ср. [1]). Через $d_m^{(k)}\colon Q_{m+1}(S_k) \to Q_m(S_k)$ обозначаем дифференциал в резольвенте $Q_\bullet(S_k)$.

3. Доказательство теоремы 1.1

В этом разделе для алгебр из рассматриваемой серии мы укажем (конечные) множества образующих соответствующих алгебр Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \bigoplus_{i,j=1}^{3} \operatorname{Ext}_R^m(S_i,S_j),$$

а также соотношения, которым удовлетворяют эти образующие, и затем убедимся, что алгебры $\mathcal{Y}(R)$ описываются с помощью выделенных образующих и соотношений.

Аналогично [1, 2, 7] элементы групп расширений

$$\psi \in \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$$

мы будем задавать с помощью некоторых коммутативных квадратов.

Введем в рассмотрение следующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:
степени 1 –

$$x_{21} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_2), \quad x_{31} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_1, S_3),$$
$$x_{32} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_2, S_3), \quad x_{12} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_2, S_1),$$
$$x_{13} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_3, S_1), \quad x_{23} \in \operatorname{Ext}_R^1(S_3, S_2);$$

степени 3 –

$$z_{31} \in \operatorname{Ext}_R^3(S_1, S_3), \quad z_{12} \in \operatorname{Ext}_R^3(S_2, S_1), \quad z_{23} \in \operatorname{Ext}_R^3(S_3, S_2);$$

степени 4 –

$$t_1 \in \operatorname{Ext}_R^4(S_1, S_1), \quad t_2 \in \operatorname{Ext}_R^4(S_2, S_2), \quad t_3 \in \operatorname{Ext}_R^4(S_3, S_3),$$

которые кратко (ср. [7]) описываются следующими квадратами:

$$\widehat{x}_{21} = \operatorname{sq}(Q_1(S_1) \xrightarrow{(1,0)} P_2), \quad \widehat{x}_{31} = \operatorname{sq}(Q_1(S_1) \xrightarrow{(0,1)} P_3),$$
$$\widehat{x}_{32} = \operatorname{sq}(Q_1(S_2) \xrightarrow{(1,0)} P_3), \quad \widehat{x}_{12} = \operatorname{sq}(Q_1(S_2) \xrightarrow{(0,1)} P_1),$$
$$\widehat{x}_{13} = \operatorname{sq}(Q_1(S_3) \xrightarrow{(1,0)} P_1), \quad \widehat{x}_{23} = \operatorname{sq}(Q_1(S_3) \xrightarrow{(0,1)} P_2),$$
$$\widehat{z}_{31} = \operatorname{sq}(Q_3(S_1) \xrightarrow{(1,0)} P_3), \quad \widehat{z}_{12} = \operatorname{sq}(Q_3(S_2) \xrightarrow{(1,0)} P_1),$$
$$\widehat{z}_{23} = \operatorname{sq}(Q_3(S_3) \xrightarrow{(1,0)} P_2), \quad \widehat{t}_1 = \operatorname{sq}(Q_4(S_1) \xrightarrow{(1,0,0)} P_1),$$
$$\widehat{t}_2 = \operatorname{sq}(Q_4(S_2) \xrightarrow{(1,0,0)} P_2), \quad \widehat{t}_3 = \operatorname{sq}(Q_4(S_3) \xrightarrow{(1,0,0)} P_3).$$

Например, более подробное описание отображения

$$\widehat{x}_{21} \colon \Omega^1(S_1) \to S_2$$

состоит в задании коммутативного квадрата (ср. [1])

$$\begin{array}{ccc} Q_1(S_1) = P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & Q_0(S_0) = P_1 \\ \downarrow{\scriptstyle (1,0)} & & \downarrow{\scriptstyle a_{13}a_{32}} \\ Q_0(S_2) = P_2 & \xrightarrow{(a_{21}a_{12})^{n_1}} & P_2. \end{array}$$

Предложение 3.1. *Для множества элементов алгебры* $\mathcal{Y}(R)$

$$\mathcal{X} = \{x_{ij} \mid i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j\} \cup \{z_{12}, z_{23}, z_{31}\} \cup \{t_m \mid m = 1,2,3\} \quad (3.1)$$

выполняются соотношения (1.2).

Доказательство. Мы докажем только соотношение

$$x_{12}x_{23}t_3 = z_{12}z_{23}.$$

Остальные соотношения проверяются аналогично, и мы предоставляем читателю проделать соответствующие вычисления.

Поскольку

$$(x_{12}x_{23}t_3)\widehat{\ } = \widehat{x}_{12} \cdot \Omega^1(\widehat{x}_{23}) \cdot \Omega^2(\widehat{t}_3), \quad (3.2)$$

$$(z_{12}z_{23})\widehat{\ } = \widehat{z}_{12} \cdot \Omega^3(\widehat{z}_{23}), \quad (3.3)$$

то нам необходимо вычислить Ω-сдвиги указанных выше отображений. Последовательный подъём этих отображений вдоль найденных ранее минимальных проективных резольвент простых R-модулей (см. предложение 2.1 и замечание 2.2) даёт

$$\Omega^1(\widehat{x}_{23}) = \begin{pmatrix} -a_{23}(a_{32}a_{23})^{n_1-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Q_2(S_3) \to Q_1(S_2),$$

$$\Omega^2(\widehat{t}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : Q_6(S_3) \to Q_2(S_3),$$

$$\Omega^3(z_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : Q_6(S_3) \to Q_3(S_2);$$

напомним, что мы описываем приведенные выше отображения с помощью матриц, соответствующих фиксированным прямым разложениям модулей $Q_m(S_i)$ (см. замечание 2.4). Отсюда получаем, что композиции из (3.2) и (3.3) описываются одной и той же матрицей $(0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0)$. □

Предложение 3.2. *Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы:*

$$\operatorname{Ext}{}^1_R(S_1,S_2)=\langle x_{21}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^1_R(S_1,S_3)=\langle x_{31}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^1_R(S_2,S_3)=\langle x_{32}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^1_R(S_2,S_1)=\langle x_{12}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^1_R(S_3,S_1)=\langle x_{13}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^1_R(S_3,S_1)=\langle x_{23}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^2_R(S_1,S_3)=\langle x_{32}x_{21}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^2_R(S_1,S_2)=\langle x_{23}x_{31}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^2_R(S_2,S_1)=\langle x_{13}x_{32}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^2_R(S_2,S_3)=\langle x_{31}x_{12}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^2_R(S_3,S_2)=\langle x_{21}x_{13}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^2_R(S_3,S_1)=\langle x_{12}x_{23}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^3_R(S_1,S_1)=\langle x_{12}x_{23}x_{31}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^3_R(S_2,S_2)=\langle x_{23}x_{31}x_{12}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^3_R(S_3,S_3)=\langle x_{31}x_{12}x_{23}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^3_R(S_1,S_3)=\langle z_{31}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^3_R(S_2,S_1)=\langle z_{12}\rangle,\qquad \operatorname{Ext}{}^3_R(S_3,S_2)=\langle z_{23}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^4_R(S_1,S_2)=\langle x_{23}z_{31}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^4_R(S_1,S_1)=\langle t_1\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^4_R(S_2,S_3)=\langle x_{31}z_{12}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^4_R(S_2,S_2)=\langle t_2\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^4_R(S_3,S_1)=\langle x_{12}z_{23}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^4_R(S_3,S_3)=\langle t_3\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^4_R(S_1,S_3)=\langle x_{31}x_{12}x_{23}x_{31}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^4_R(S_2,S_1)=\langle x_{12}x_{23}x_{31}x_{12}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^4_R(S_3,S_2)=\langle x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^5_R(S_2,S_1)=\langle x_{12}t_2\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^5_R(S_3,S_2)=\langle x_{23}t_3\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^5_R(S_1,S_3)=\langle x_{31}t_1\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^5_R(S_1,S_2)=\langle x_{21}t_1, x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}x_{31}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^5_R(S_2,S_3)=\langle x_{32}t_2, x_{31}x_{12}x_{23}x_{31}x_{12}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^5_R(S_3,S_1)=\langle x_{13}t_3, x_{12}x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}\rangle,\ \operatorname{Ext}{}^5_R(S_1,S_1)=\langle x_{12}x_{23}z_{31}\rangle,$$

$$\operatorname{Ext}{}^5_R(S_2,S_2)=\langle x_{23}x_{31}z_{12}\rangle,\quad \operatorname{Ext}{}^5_R(S_3,S_3)=\langle x_{31}x_{12}z_{23}\rangle.$$

Доказательство. В тех случаях, когда $\dim_K \operatorname{Ext}{}^m_R(S_i,S_j)=1$, достаточно проверить, что указанные элементы отличны от нуля. В некоторых случаях (например, для $m=1$) это следует непосредственно из определения элементов x_{ij}, z_{ij} и t_i; в других случаях это делается с помощью вычислений, использующих подходящие

Ω-сдвиги отображений, участвующих в соответствующих композициях, аналогично доказательству предложения 3.1. Детали таких вычислений мы предоставляем провести читателю.

Если же $\dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j) > 1$, то требуется проводить более подробные вычисления. Мы проиллюстрируем это на примере группы $\operatorname{Ext}^5_R(S_1, S_2)$. Поскольку

$$(x_{21}t_1)\widehat{\ } = \widehat{x}_{21} \cdot \Omega^1(\widehat{t}_1),$$

$$(x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}x_{31})\widehat{\ } = \widehat{x}_{23} \cdot \Omega^1(\widehat{x}_{31}) \cdot \Omega^2(\widehat{x}_{12}) \cdot \Omega^3(\widehat{x}_{23}) \cdot \Omega^4(\widehat{x}_{31}),$$

то нам необходимо вычислить Ω-сдвиги отображений, участвующих в приведенных выше композициях. Выполняя последовательные подъёмы этих отображений вдоль резольвент простых R-модулей, получаем, что указанные Ω-сдвиги представляются следующими матрицами:

$$\Omega^1(\widehat{t}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^1(\widehat{x}_{31}) = \begin{pmatrix} -a_{31}(a_{13}a_{31})^{n_2-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^2(\widehat{x}_{12}) = \begin{pmatrix} -a_{13} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega^3(\widehat{x}_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^4(\widehat{x}_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(x_{21}t_1)\widehat{\ } = (\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,), \quad (x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}x_{31})\widehat{\ } = (\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,).$$

Таким образом, элементы

$$x_{21}t_1 \quad \text{и} \quad x_{23}x_{31}x_{12}x_{23}x_{31}$$

линейно независимы, а так как $\dim_K \operatorname{Ext}^5_R(S_1, S_2) = 2$ (см. следствие 2.3), то они составляют базис этой Ext-группы.

Остальные Ext-группы рассматриваются аналогично. □

Ключевым для доказательства теоремы 1.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Множество $\mathcal{X}$ из (3.1) порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой гомоморфизм $f\colon \Omega^m(S_i) \to S_j$, $i,j \in \{1,2,3\}$. Ввиду предложения 3.2 можно считать, что $m > 5$. Докажем индукцией по m, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней. Поскольку описание алгебр $R^{(\mathcal{K})}$ симметрично относительно циклических сдвигов вершин колчана $Q^{(\mathcal{K})}$ (см. (1.1)), можно считать, что $i = 1$, и в этом случае мы упростим обозначения, полагая $Q_m = Q_m(S_1), d_m = d_m^{(1)}$. Из строения бикомплекса (2.1) получаем, что для $n > 0$ $Q_n = Q_{n-4} \oplus W_n$, где

$$W_n = \begin{cases} P_3 \oplus P_1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 3, \\ P_2 \oplus P_3, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 3, \\ P_1 \oplus P_2, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Пусть $p = f\pi_m$, где $\pi_m\colon Q_m \to \Omega^m(S_1)$ – проективное накрытие. Достаточно рассмотреть случай, когда $p(B_{n,m-n}) \neq 0$ ровно для одного значения n.

В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса (2.1), в которую включается модуль $B_{n,m-n}$, мы будем строить коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccccc} Q_{m+1} & \xrightarrow{d_m} & Q_m & \xrightarrow{\pi_m} & \Omega^m(S_1) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \\ Q_{l+1} & \xrightarrow{d_l} & Q_l & \xrightarrow{\pi_l} & \Omega^l(S_1) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.4}$$

такие, что $l < m$ и $\operatorname{Ker}\varphi_0 \subset \operatorname{Ker} p$. Тогда найдется гомоморфизм $p'\colon \Omega^l(S_1) \longrightarrow S_1$, для которого $p'\varphi = f$, и так как $\varphi = \Omega^l(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\tilde{\varphi}\colon \Omega^{m-l}(S_1) \longrightarrow S_1$, то по индукции получаем требуемое утверждение.

Случай 1. Если гомоморфизм p отличен от нуля на неразложимом прямом слагаемом, содержащемся в Q_{m-4} (т.е. $p(B_{i,m-i}) \neq 0$ для некоторого $i \geqslant 2$), то можно построить коммутативную диаграмму вида (3.4), в которой $l = m-4$, а φ_0 (соответственно φ_1) – проекция на прямое слагаемое Q_{m-4} (соответственно Q_{m-3}) модуля Q_m (соответственно модуля Q_{m+1}). Ясно, что

$\operatorname{Ker}\varphi_0 = W_m \subset \operatorname{Ker} p$, и, как объяснено выше, требуемое утверждение получается по индукции.

Случай 2. Теперь предположим, что $p(B_{i,m-i}) \neq 0$ для $i \leqslant 1$.

а) Предположим, что $m \equiv 0 \pmod 3$. Тогда построим коммутативную диаграмму вида (3.4), в которой в качестве φ_0 берем композицию проекции на последние два прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_m и отображения из $B_{1,m-1} \oplus B_{0,m} \simeq P_3 \oplus P_1$ в $Q_3 \simeq P_3 \oplus P_1$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве φ_1 аналогичную композицию проекции на последние три слагаемых модуля Q_{m+1} и отображения из $B_{2,m-1} \oplus B_{1,m} \oplus B_{0,m+1} \simeq P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ в $Q_4 \simeq P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $m \equiv 1 \pmod 3$. В этом случае строим диаграмму вида (3.4), в которой в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем композицию проекции на последние три (соответственно четыре) прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_m (соответственно Q_{m+1}) и отображения из $B_{2,m-2} \oplus B_{1,m-1} \oplus B_{0,m} \simeq P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ в Q_4 (соответственно отображения из $B_{3,m-2} \oplus B_{2,m-1} \oplus B_{1,m} \oplus B_{0,m+1} \simeq P_2 \oplus P_3 \oplus P_1 \oplus P_2$ в Q_5), определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(соответственно матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m (a_{21}a_{12})^{n_3-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

в) Пусть $m \equiv 2 \pmod 3$. В этом случае рассматриваем диаграмму вида (3.4), в которой в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берем композицию проекции на последние четыре прямых слагаемых из канонического разложения модуля Q_m (соответственно

Q_{m+1}) и отображения из $B_{3,m-3} \oplus B_{2,m-2} \oplus B_{1,m-1} \oplus B_{0,m}$ в Q_5 (соответственно отображения из $B_{3,m-2} \oplus B_{2,m-1} \oplus B_{1,m} \oplus B_{0,m+1}$ в Q_6), определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m(a_{21}a_{12})^{n_3-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(соответственно матрицей

$$\begin{pmatrix} (-1)^m a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

□

Пусть $\mathcal{A} = K[\Re^{(\mathcal{K})}]/I$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где I – идеал алгебры путей колчана $\Re^{(\mathcal{K})}$, соответствующий соотношениям (1.2). Через ε_i, $i = 1, 2, 3$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\Re^{(\mathcal{K})}]$, соответствующие вершинам колчана $\Re^{(\mathcal{K})}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{A}$. Из предложений 3.2 и 3.3 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{A}$, соответствующие стрелкам колчана $\Re^{(\mathcal{K})}$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале раздела 3. Пусть $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.

Предложение 3.4. *Для любых* $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *и* $m \geqslant 0$

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{A}^m \varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S_j, S_i). \tag{3.5}$$

Доказательство. Для $m \leqslant 3$ соотношение (3.5) проверяется непосредственно, и потому далее предполагаем, что $m > 3$. Кроме того, ввиду симметрии в описании алгебр $R^{(\mathcal{K})}$ и $\mathcal{A}$ относительно циклических сдвигов вершин колчанов $Q^{(\mathcal{K})}$ и $\Re^{(\mathcal{K})}$ можно считать, что $j = 1$.

а) Предположим сначала, что и $i = 1$. Ввиду соотношений (1.2) легко получаем, что $\varepsilon_1\mathcal{A}\varepsilon_1$ – K-алгебра, порожденная элементами

$$\tilde{a} = x_{12}x_{23}x_{31}, \quad \tilde{b} = t_1, \quad \tilde{c} = x_{12}x_{23}z_{31},$$

при этом они удовлетворяют соотношениям:

$$\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a}, \quad \tilde{b}\tilde{c} = \tilde{c}\tilde{b}, \quad \tilde{a}\tilde{c} = -\tilde{c}\tilde{a}, \quad \tilde{a}^2\tilde{b} = \tilde{c}^2.$$

Рассмотрим вспомогательную градуированную K-алгебру

$$\mathcal{B} = K\langle a, b, c\rangle/(ab - ba, bc - cb, ac + ca, a^2b - c^2),$$

где $\deg a = 3$, $\deg b = 4$, $\deg c = 5$. Тогда имеется сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{B} \to \varepsilon_1\mathcal{A}\varepsilon_1$. Пусть $\mathcal{B} = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathcal{B}^m$ – разложение алгебры $\mathcal{B}$ в прямую сумму однородных слагаемых. Поскольку

$$\dim_K \mathcal{B}^m \geqslant \dim_K(\varepsilon_1\mathcal{A}^m\varepsilon_1) \geqslant \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1),$$

то достаточно доказать, что

$$\dim_K \mathcal{B}^m = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1). \tag{3.6}$$

Ясно, что элементы

$$a^r b^t c^\alpha, \quad \text{где} \quad r, t \geqslant 0, \alpha \in \{0, 1\}, 3r + 4t + 5\alpha = m, \tag{3.7}$$

образуют K-базис пространства $\mathcal{B}^m$. Пусть $d_m = \dim_K \mathcal{B}^m$. Заметим, что элементы вида (3.7), у которых $t > 0$, находятся в биективном соответствии с аналогичным базисом пространства $\mathcal{B}^{m-4}$ (достаточно опустить один множитель b). Следовательно, $d_m - d_{m-4}$ – это число элементов вида (3.7), для которых $t = 0$. Таким образом, получаем, что

$$d_m - d_{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Из следствия 2.3 вытекает, что последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (3.8). Теперь соотношение (3.6) получается с помощью индукции по m, поскольку для $m \leqslant 4$ оно проверяется непосредственно.

б) Пусть теперь $i = 2$. Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_2\mathcal{A}^m\varepsilon_1$. Так как $m \geqslant 4$, то любой ненулевой "одночлен" из $\varepsilon_2\mathcal{A}^m\varepsilon_1$ (т.е. образ пути

в колчане $\Re^{(\mathcal{K})}$) представляется в виде $x_{23}x_{31}\cdot u$, где $u \in \varepsilon_1\mathcal{A}^{m-2}\varepsilon_1$ – также одночлен, и легко видеть, что такое представление единственно. Следовательно, при $m \geqslant 6$

$$d_m - d_{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } m-2 \equiv 1 \pmod 3, \\ 1, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Остается заметить, что ввиду следствия 2.3 последовательность

$$\{\dim_K \operatorname{Ext}{}^m_R(S_1, S_2)\}$$

удовлетворяет аналогичному рекуррентному соотношению, а при $m < 6$ равенство $d_m = \dim_K \operatorname{Ext}{}^m_R(S_1, S_2)$ проверяется непосредственно.

в) Если $i = 3$, то рассуждаем аналогично части б) доказательства. В этом случае любой ненулевой одночлен из $\varepsilon_3\mathcal{A}^m\varepsilon_1$ однозначно представляется в виде $x_{31}\cdot u$ для некоторого одночлена $u \in \varepsilon_1\mathcal{A}^{m-1}\varepsilon_1$. Полагая $d_m = \dim_K \varepsilon_3\mathcal{A}^m\varepsilon_1$, отсюда получаем, что при $m \geqslant 5$

$$d_m - d_{m-4} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 2 \pmod 3, \\ 1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и доказательство соотношения (3.5) для рассматриваемого случая завершается индукцией по m. □

Доказательство следствия 1.2. Для $S = S_1$ требуемое утверждение следует из части а) доказательства предложения 3.4. Остальные случаи получаются отсюда ввиду симметрии относительно циклических сдвигов вершин колчана $Q^{(\mathcal{K})}$. □

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр*. Вестник СПб. ун-та сер. 1, вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, II. — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), 3–25.
4. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, III: *серия* $D(2\mathcal{A})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.

5. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, IV: *серия* $D(2\mathcal{B})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.
6. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* — В кн.: Международн. алг. конф., посв. памяти З. И. Боревича. СПб., 17–23 сент. (2002), сс. 115–116.
7. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* I. — Алгебра и анализ **13**, No. 4 (2001), 54–85.
8. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.
9. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math. Vol. 1428. Berlin; Heidelberg (1990).
10. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology.* — Commun. in Algebra **15**, No. 1/2 (1987), 53–121.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of semidihedral type, III: the family $SD(3\mathcal{K})$.

The present paper continues the cycle of papers of the author (some among them – in collaboration), in which the Yoneda algebras are calculated for several families of algebras of dihedral and semidihedral type (in K. Erdmann's classification). In the paper, the Yoneda algebras are described (in terms of quivers with relations) for algebras of semidihedral type that form the family $SD(3\mathcal{K})$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 ноября 2003 г.