Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

С. В. Востоков, Г. К. Пак

НОРМЕННЫЕ РЯДЫ В МНОГОМЕРНОМ ЛОКАЛЬНОМ ПОЛЕ

Введение

Настоящая работа является прямым продолжением работы [1], в которой изучались норменные ряды для формальных групп Любина-Тейта в одномерном локальном поле. Здесь этот результат обобщается на многомерное локальное поле (см. ниже, теорема 3, § 4). Основой исследования являются явные формулы для символа Гильберта в таком поле. Эти формулы были получены в работе [2]. Мы уточняем эти формулы тем, что рассматриваем разложения элементов поля в ряд по локальным параметрам, начинающиеся с произвольного обратимого коэффициента из кольца векторов Витта, а не представителя системы Тейхмюллера, как это происходило в работе [2]. Кроме того, мы доказываем теорему о явной формуле для спаривания Гильберта методом, несколько отличающимся от метода работы [2], что делает доказательство более прозрачным (см. теорема 2, § 3).

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

1.1. Пусть K — *n-мерное локальное* поле, т.е. полное дискретно нормированное поле, для которого существует последовательность полей: $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)} = K$, где $K^{(0)} = \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, и для $1 \leqslant i \leqslant n$: $K^{(i)}$ — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов $K^{(i-1)}$. Все n-мерные локальные поля, рассматриваемые в статье, предполагаются нулевой характеристики, а простое число $p \neq 2$.

Для n-мерного локального поля K имеют место следующие структуры:

(1) дискретное нормирование $v : K^* \to \mathbb{Z}$ ранга 1;

Работа поддержана РФФИ, грант 01-01-00997, а также Министерством Образования, грант ПД 02-1.1-37 и Программы 2003 г. фундаментальных исследований Президиума РАН "Исследования в фундаментальных областях современной математики".

(2) дискретное нормирование $\overline{v} := (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = v) : K^* \to \mathbb{Z}^n$ ранга n.

Пусть $t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi$ — система локальных параметров поля K относительно нормирования $\overline{v}$; e — индекс ветвления поля K относительно нормирования v, т.е. $v(p) = e$, а $\overline{e}$ — соответствующий индекс ветвления нормирования $\overline{v}$.

Пусть, далее, $\mathcal{O} := W(\mathbb{F}_q)$ — кольцо векторов Витта над $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{R}$ — система представителей Тейхмюллера поля $\mathbb{F}_q$ в $\mathcal{O}$.

Произвольный элемент $\alpha \in K$ имеет единственное разложение

$$\alpha = \sum_{\overline{r} \in I} \theta_{\overline{r}} t_1^{r_1} \ldots t_{n-1}^{r_{n-1}} \Pi^{r_n}, \quad \theta_{\overline{r}} \in \mathcal{R},$$

где $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ пробегает *допустимый* набор индексов $I = I(\alpha)$ в $\mathbb{Z}^n$. При этом $I \subset \mathbb{Z}^n$ называется *допустимым*, если для заданных $i_{l+1}, \ldots, i_n$ в $\mathbb{Z}$, $l \leqslant n$, существует $i \in \mathbb{Z}$, для которого выполнено следующее свойство: если $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_l, i_{l+1}, \ldots, i_n) \in I$, то $r_l \geqslant i$ (см. [3]). Мы будем рассматривать также разложения вида

$$\alpha = \sum_{\overline{r} \in I} a_{\overline{r}} t_1^{r_1} \ldots t_{n-1}^{r_{n-1}} \Pi^{r_n}$$

с коэффициентами $a_{\overline{r}}$ из $\mathcal{O}$. Отметим, что это разложение уже не будет единственным для α.

Пусть $\zeta := \zeta_{p^N}$ — фиксированный первообразный корень степени p^N из 1. На протяжении всей статьи будем предполагать, что $\zeta \in K$ и $p > 2$.

1.2. Модуль кривых Картье для мультипликативной группы многомерного локального поля.

Пусть K — n-мерное локальное поле, $t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi$ — система локальных униформизующих и t_n — алгебраически независимая переменная. Для набора алгебраически независимых переменных $T = (t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ рассмотрим $(n+1)$-мерное локальное поле $M = M(K) := k\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}((t_n))$, в котором система $t_1, \ldots, t_{n-1}, p, t_n$ будет системой локальных униформизующих (здесь k – поле отношений кольца $\mathcal{O}$).

Обозначим

$$R_0 := \left\{ \sum_{\substack{\overline{r}\in \underline{I} \\ \overline{r}\geqslant \overline{0}}} a_{\overline{r}} T^{\overline{r}} \Big| a_{\overline{r}} \in \mathcal{O} \right\}, \tag{1}$$

$$R_1 := \left\{ \sum_{\substack{\overline{r}>\overline{0} \\ \overline{r}\in I}} a_{\overline{r}} T^{\overline{r}} \Big| a_{\overline{r}} \in \mathcal{O} \right\},$$

где I — допустимый набор в $\mathbb{Z}^n$.

Положим

$$\begin{aligned} &A := \mathcal{O}\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\},\\ &\mathcal{O}(p) := A\big((t_n)\big),\\ &U_m := 1 + R_1,\\ &\mathcal{H}_m := \langle t_1\rangle \times \cdots \times \langle t_n\rangle \times \mathcal{O}^* \times U_m \subset \mathcal{O}^*(p). \end{aligned}$$

Назовем $\mathcal{H}_m$ модулем кривых Картье группы K^*.

Имеет место следующий (неканонический) эпиморфизм:

$$\begin{gathered} \eta : \mathcal{O}(p) \to K\\ \alpha(t_n) \mapsto \alpha(\Pi), \end{gathered}$$

который индуцирует групповой эпиморфизм

$$\eta : \mathcal{H}_m \to K^*.$$

Для каждого $\alpha \in K^*$ выберем прообраз $\underline{\alpha}$ относительно эпиморфизма η:

$$\underline{\alpha} \in \mathcal{H}_m, \quad \underline{\alpha}(\Pi) = \alpha. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{E}is(X) = p + a_1X + \cdots + a_eX^e + \cdots \in A[\![x]\!]$ — ряд Эйзенштейна для Π, т.е. $a_1, \ldots, a_{e-1}$ делятся на p, a_e — единица кольца A и $\mathcal{E}is(\Pi) = 0$, т.е. $\eta\big(\mathcal{E}is(t_n)\big) = 0$.

Лемма 1.1. *Пусть $\rho(X) \in A[\![x]\!]$, $\rho(\Pi) = 0$. Тогда $\rho(X)$ делится на $\mathcal{E}is(X)$ в кольце $A[\![x]\!]$.*

(Доказательство см. [4, Лемма 4].)

Обозначим через $U_{\mathcal{E}is}$ следующую подгруппу в $\mathcal{H}_m$:

$$U_{\mathcal{E}is} := \{1 + \mathcal{E}is(t) \cdot \varphi(t) \big| \varphi(t) \in A[\![t]\!], \deg\varphi > \overline{0}\}. \tag{3}$$

Предложение 1.1. *Имеет место точная последовательность групп*

$$1 \to U_{\mathcal{E}is} \to \mathcal{H}_m \xrightarrow{\eta} K^* \to 1$$

(Доказательство см. [4, Предложение 3].)

1.3. Многомерный символ Гильберта.

Пусть $\Psi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ — отображение взаимности à la Паршин-Като из топологической группы Милнора в группу Галуа максимального абелева расширения поля K (см. [5], [6], [7]). Многомерный символ Гильберта определяется следующим образом.

Определение 1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in K^*$, тогда

$$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_K^N : K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \to \langle\zeta\rangle$$
$$(\alpha,\beta)_K^N = \tilde{\beta}^{\Psi_K(\alpha)}/\tilde{\beta},$$

где $\tilde{\beta}^{p^N} = \beta$, а ζ — фиксированный первообразный корень степени p^N из 1, содержащийся в K.

Приведем еще одно, эквивалентное определение многомерного символа Гильберта (см. [8]).

Определение 1′. Многомерным символом Гильберта на K будем называть непрерывное отображение $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_K^N : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K) \to \langle\zeta\rangle$, нормированное соотношением $(t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi, \omega) = \chi(\omega)$, где $t_1, \ldots, t_{n-1}, \Pi$ — произвольный набор локальных параметров поля K, ω — p^N-примарный элемент в K (т.е. $K(\sqrt[p^N]{\omega})/K$ — неразветвлено), а χ — характер на группе p^N-примарных элементов.

1.4. Базис Шафаревича.

Рассмотрим оператор Фробениуса на кольце $\mathcal{O}(p)$:

$$\Delta : \alpha = \sum_{\overline{r} \in \mathbb{Z}^n} a_{\overline{r}} T^{\overline{r}} \mapsto \Delta\alpha = \sum_{\overline{r} \in \mathbb{Z}^n} (\mathrm{Frob}\, a_{\overline{r}}) T^{p\overline{r}}, \quad a_{\overline{r}} \in \mathcal{O},$$

где Frob — оператор Фробениуса на кольце $\mathcal{O}$.

Замечание 1. Иногда действие оператора Δ будем писать мультипликативно: α^{Δ}.

На модуле R_1 определим отображение Артина-Хассе

$$E\big(\alpha(T)\big) := \exp\Big(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots\Big) \quad \big(\alpha(T)\big) \in U_m.$$

На группе $\mathcal{H}_m$ определим обратную функцию

$$l\big(\alpha(T)\big) := \frac{1}{p}\log\frac{\alpha(T)^p}{\alpha(T)^\Delta} \in R_1. \tag{4}$$

Замечание 2. Функции E и l задают взаимно обратные отображения между R_1 и U_m (см. [2]).

Замечание 3. Элементы $E(aT^{\overline{r}})$, $a \in \mathcal{O}$, $\overline{r} > \overline{0}$ порождают группу U_m.

Вместе с функцией E определим на кольце степенных рядов $X\mathcal{O}[\![X]\!]$ функцию Артина-Хассе

$$\mathcal{E}\big(\varphi(X)\big) = \exp\Big(\varphi + \frac{\varphi^p}{p} + \frac{\varphi^{p^2}}{p^2} + \dots\Big), \quad \varphi \in X\mathcal{O}[\![X]\!].$$

Ясно, что для монома

$$\theta T^{\overline{r}}, \quad \theta \in \mathcal{R}, \quad T^{\overline{r}} = t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$$

обе функции совпадают, т.е.

$$E(\theta T^{\overline{r}}) = \mathcal{E}(\theta T^{\overline{r}}).$$

Определим, далее, ряды

$$\begin{aligned} &s_m(t_n) := \underline{\zeta}^{p^m} - 1 \in A[\![t_n]\!] \\ &s := s_N \end{aligned} \tag{5}$$

(здесь ζ — первообразный корень степени p^N из 1 в поле K).

Предложение 1.3. *Элемент*

$$\omega(a) := E\big(as(t_n)\big)\Big|_{t_n = \Pi}$$

является p^N-примарным (т.е. расширение $K\big(\sqrt[p^N]{\omega(a)}\big)/K$ неразветвлено). Он не зависит от способа разложения корня ζ в степенной ряд по локальным параметрам и не зависит от выбора системы локальных параметров (по модулю K^{*p^N}). Кроме того, для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K^*$ имеем $\big(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \omega(a)\big) = \zeta^{\operatorname{tr}\delta a}$, где $\delta = \det\big(v_j(\alpha_i)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ($\overline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ — n-мерное нормирование в K).

Доказательство см. [4, Предложение 6].

Предложение 1.4. *Элементы*

$$\omega(a), \quad E(\theta T^{\overline{r}})\Big|_{t=\Pi} := E(\theta t_1^{r_1} \dots t_{n-1}^{r_{n-1}} t_n^{r_n})\Big|_{t=\Pi},$$

где $a \in \mathcal{O}$, $\theta \in \mathcal{R}$, $\overline{0} < \overline{r} < \overline{e}_*$, $p \nmid \overline{r}$, $\overline{e}_* = \frac{p\overline{e}}{p-1}$, *образуют базис главных единиц поля* K^* *(базис Шафаревича). При этом*

$$\big(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi, \omega(a)\big) = \zeta^{\operatorname{tr} a},$$
$$\big(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi, E(\theta T^{\overline{r}})\Big|_{t_n=\Pi}\big) = 1.$$

Доказательство см. [2].

Замечание 4. Корректность определения всех функций была доказана в работе [9].

1.5. Примарные ряды.

Определение 2. Ряд $\mathcal{P}$ из кольца $A\big\{\{t_n\}\big\}$ назовем примарным, если существует последовательность рядов

$$\mathcal{P}^{(0)}, \mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(N)} = \mathcal{P} \tag{6}$$

из $A\big\{\{t_n\}\big\}$ такая, что

а) $\partial_i \mathcal{P}^{(s)} \equiv 0 \mod p^s$, $1 \leqslant s \leqslant N$ (здесь $\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$),
б) $\Delta\mathcal{P}^{(s-1)} - \mathcal{P}^{(s)} \equiv 0 \mod p^s$, $1 \leqslant s \leqslant N$.

Последовательность (6) при этом будем называть примарной последовательностью для ряда $\mathcal{P}$.

Замечание 5. Ряды $s := s_N$ и $1/s$ (см. (5)) являются примарными для последовательностей

$$s_0, s_1, \dots, s_N = s; \quad \text{и} \quad 1/s_0, 1/s_1, \dots, 1/s_n = 1/s.$$

(доказательство см. [4], § 3).

Замечание 6. Примарность ряда $\mathcal{P}$ не изменится, если добавить к нему (и ко всем рядам из примарной последовательности) константу из кольца $\mathcal{O}$.

2. Спаривание на рядах

2.1. Отображение $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathcal{P}}$.

Пусть $\mathcal{P}$ — примарный ряд. Определим отображение

$$[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathcal{P}}:\mathcal{H}_m^{n+1}\to\mathcal{O}\mod p^N,$$
$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}]_{\mathcal{P}}=\operatorname{res}_T\Phi_N(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})\mathcal{P}\mod p^N,$$

где $T=(t_1,\ldots,t_n)$,

$$\Phi_N=l(\alpha_{n+1})\alpha_1^{-1}d\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n^{-1}d\alpha_n-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}l(\alpha_i)\alpha_1^{-1}d\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{i-1}^{-1}d\alpha_{i-1}\wedge$$
$$\wedge\frac{1}{p}\alpha_{i+1}^{-\Delta}d\alpha_{i+1}^{\Delta}\wedge\cdots\wedge\frac{1}{p}\alpha_n^{-\Delta}d\alpha_n^{\Delta}$$

и $l(\alpha):=\frac{1}{p}\log\alpha^p/\alpha^{\Delta}$ (см. (4)). Запишем ряд Φ_N для удобства вычислений с помощью определителей:

$$\Phi_N=l(\alpha_{n+1})D_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}l(\alpha_i)D_i \tag{7}$$
$$D_{n+1}=\det(\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$
$$D_i=\det(\beta_{kj})_{1\leqslant k,j\leqslant n},$$
$$\beta_{kj}=\begin{cases}\alpha_k^{-1}\partial_j\alpha_k, & k\leqslant i-1;\\ \frac{1}{p}\alpha_{n+1}^{-\Delta}\partial_j\alpha_{n+1}^{\Delta}, & k=i;\\ \frac{1}{p}\alpha_k^{-\Delta}\partial_j\alpha_k^{\Delta}, & k\geqslant i+1.\end{cases}$$

Отображение $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathcal{P}}$ обладает следующими свойствами:

1) Мультилинейность:

$$[\ldots,\alpha_i\alpha_i',\ldots]_{\mathcal{P}}=[\ldots,\alpha_i,\ldots]_{\mathcal{P}}+[\ldots,\alpha_i',\ldots]_{\mathcal{P}}.$$

2) Гиперболичность:

$$[\ldots,\alpha_i,\ldots,-\alpha_i,\ldots]_{\mathcal{P}}\equiv 0\mod p^N.$$

3) Соотношение Стейнберга:

$$[\ldots,\alpha_i,\ldots,1-\alpha_i,\ldots]_{\mathcal{P}}=0.$$

для $\alpha_i, 1-\alpha_i \in \mathcal{H}_m$.

4) Кососимметричность:

$$[\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots]_{\mathcal{P}} = -[\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots]_{\mathcal{P}}.$$

Пусть $K_{n+1}(\mathcal{H}_m)$ обозначает милноровскую K-группу (т.е. $n+1$-кратное тензорное произведение $\mathbb{Z}$-модулей $\mathcal{H}_m$, факторизованное по подмодулю, порожденному тензорами вида $\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_i\otimes\cdots\otimes 1-\alpha_i\otimes\cdots\otimes\alpha_{n+1}$, где $1-\alpha_i\in\mathcal{H}_m$).

Предложение 2.1. *Отображение $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathcal{P}}$ определяет гомоморфизм, который мы будем обозначать тем же способом:*

$$[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathcal{P}} : K_{n+1}(\mathcal{H}_m) \to \mathcal{O} \mod p^N.$$

Доказательство см. [4, Предложение 9].

2.2. Возьмем теперь в качестве примарного ряда $\mathcal{P}$ ряд $V=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}$ и на основе гомоморфизма $[\cdot,\ldots,\cdot]_V$ определим гомоморфизм:

$$\begin{gathered}\langle\cdot,\ldots,\cdot\rangle : K_{n+1}(\mathcal{H}_m) \to \langle\zeta\rangle,\\ \langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}\rangle := \zeta^{\operatorname{tr}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}]_V},\end{gathered} \tag{8}$$

где tr — оператор следа из $\mathcal{O}$ в $\mathbb{Z}_p$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 2.2. *Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathcal{H}_m$, а $\alpha_{n+1} := \omega(a)(T) = E\big(as(t)\big)$. Тогда*

$$\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}\rangle = \zeta^{\operatorname{tr}\delta a},$$

где $\delta = \det\big(v_j(\alpha_i)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ ($\overline{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ — n-мерное нормирование в поле K).

Доказательство. Имеет место легко проверяемое равенство

$$\partial_j h^{\Delta} = p t_j^{-1}(t_j\partial_j h)^{\Delta}, \tag{9}$$

верное для любого ряда $h\in A((t_n))$, из которого следует

$$\frac{1}{p}h^{-\Delta}\partial_j h^{\Delta} = t_j^{-1}(t_j h^{-1}\partial_j h)^{\Delta}. \tag{10}$$

Поэтому, из определения элемента α_{n+1} и функции E получаем

$$\frac{1}{p}\alpha_{n+1}^{-\Delta}\partial_j\alpha_{n+1}^{\Delta} = t_j^{-1}(t_j\alpha_{n+1}^{-1}\partial_j\alpha_{n+1})^{\Delta} = t_j^{-1}\left(t_j\partial_j\sum_{k\geqslant 0}\frac{\big(as(t_n)\big)^{\Delta^k}}{p^k}\right).$$

Применяя (9), имеем

$$\partial_j\frac{\big(as(t_n)\big)^{\Delta^k}}{p^k} = t_j^{-1}\big(t_j a\partial_j s(t_n)\big)^{\Delta^k}.$$

Осталось заметить, что

$$\partial_j s(t_n) = \partial_j(\underline{\zeta}^{p^N} - 1) \equiv 0 \mod p^N$$

и, значит, в итоге все определители

$$D_i \equiv 0 \mod p^N, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Далее, по определению функции l имеем $l(\alpha_{n+1}) = l\big(E(as(t_n))\big) = as(t_n)$. Поэтому

$$\Phi_N \cdot V \equiv aD_{n+1} \mod (p^N, \deg\overline{0}).$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{res}_T\, D_{n+1} = \delta$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{E}is}$ — подгруппа в $K_{n+1}(\mathcal{H}_m)$, порожденная символами $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$, в которых хоть один элемент лежит в $U_{\mathcal{E}is}$ (см. (3)).

Теорема 1. *Гомоморфизм* (8) *определяет гомоморфизм на фактор-группе*

$$\langle\cdot, \dots, \cdot\rangle : K_{n+1}(\mathcal{H}_m)/\big(\mathcal{H}_{\mathcal{E}is} + p^N K_{n+1}(\mathcal{H}_m)\big) \to \langle\zeta\rangle, \tag{11}$$

который не зависит от выбора системы локальных параметров $T = (t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)$.

Замечание 7. Гомоморфизм (11) задает спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s}$ на множестве $K_r^{\mathrm{top}}(K) \times K_s^{\mathrm{top}}(K)$, $r + s = n + 1$. Именно, если $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \in K_r^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_s\} \in K_s^{\mathrm{top}}(K)$ и $\underline{\alpha}_i$, $\underline{\beta}_j$ — прообразы α_i и β_j в $\mathcal{H}_m$ (см. (2)), то положим

$$\begin{aligned}&\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s} : K_r^{\mathrm{top}}(K) \times K_s^{\mathrm{top}}(K) \to \langle\zeta\rangle,\\ &\langle\alpha,\beta\rangle_{r,s} = \langle\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_r; \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_s\rangle.\end{aligned} \tag{12}$$

Замечание 8. Утверждение теоремы означает независимость спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s}$ от способа разложения элементов в ряды по локальным униформизующим, и инвариантность этого спаривания относительно выбора системы локальных параметров $t_1,\ldots,t_{n-1},\Pi$.

Проверка независимости спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s}$.

Мы должны проверить, что подгруппы $\mathcal{H}_{\mathcal{E}is}$ и $p^N K_{n+1}(\mathcal{H}_m)$ содержатся в ядре гомоморфизма (8). Вторая подгруппа очевидно лежит в ядре этого гомоморфизма.

Пусть теперь в наборе $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ какой-то из элементов содержится в $U_{\mathcal{E}is}$. По свойству кососимметричности отображения $[\cdot,\cdot]_V$ (см. Предл. 2.1) мы можем считать, что $\beta := \alpha_{n+1} \in U_{\mathcal{E}is}$. Таким образом, $\beta = 1 + u(t_n)\tilde{\beta}(t_n)$, где $u(t_n) := \mathcal{E}is(t_n) = s/s_{N-1}$ — ряд Эйзенштейна, а $\tilde{\beta} \in A[\![t_n]\!]$ (см. (3)).

Предложение 2.3. *Если $\beta \in U_{\mathcal{E}is}$, то для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathcal{H}_m$ имеем:*

$$\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta\rangle = 1.$$

Для доказательства мы будем использовать следующие леммы.

Лемма 2.4. *Для любого ряда $h \in A[\![t_n]\!]$ имеет место сравнение*

$$\operatorname{res}_T h\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\partial_k V \equiv 0 \mod p^N$$

где $\beta = 1 + u\cdot\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} \in A[\![t_n]\!]$, $\deg\tilde{\beta} > \overline{0}$.

Доказательство. Из определения ряда Эйзенштейна (см. п. 1.2) следует сравнение

$$u(t_n) \equiv ct_n^e \mod p,$$

где $c \in A$ (см. п. 1.2). Поэтому

$$\frac{\Delta}{p}\log\beta = b_0 + b_1\frac{t_n^{pe}}{p} + b_2\frac{t_n^{2pe}}{p^2} + \ldots,$$

где $b_i \in A$. Далее,

$$\partial_k V = \partial_k\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}\partial_k s,$$

при этом, из определения ряда s (см. (5)) следует

$$\frac{1}{s^2} \in t_n^{-\frac{2pe}{p-1}} A[\![pt_n^{-e}]\!],$$

т.е.

$$\partial_k V = p^N \left(a_0 t_n^{-\frac{2pe}{p-1}} + p a_1 t_n^{-\frac{2pe}{p-1} - e} + p^2 a_2 t_n^{-\frac{2pe}{p-1} - 2e} + \dots \right), \quad a_i \in A.$$

Заметим, что при $p > 2$, $m \geqslant 1$ имеем: $mpe > \frac{2pe}{p-1} + me$, откуда следует

$$\left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot \partial_k V \equiv 0 \mod (p^N, \deg \overline{0}).$$

(Сравнение означает, что все коэффициенты ряда левой части при степенях, меньших $\overline{0} = (0, \dots, 0)$, делятся на p^N). Из этого сравнения немедленно вытекает сравнение леммы.

Из доказанной леммы и равенства $\operatorname{res}_T f(t_n) \cdot g(t_n) h(t_n) = 0$ получаем

Следствие.

$$\operatorname{res}_T h \partial_k \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot V \equiv -\operatorname{res}_T (\partial_k h) \cdot \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) V \mod p^N.$$

Лемма 2.5. *Имеет место сравнение*

$$\operatorname{res}_T l(\alpha_i) D_i \cdot V \equiv -\operatorname{res}_T \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot D_i' \cdot V \mod p^N,$$

где D_i *взят из* (7), *а*

$$D_i' = \det(\beta_{kj}')_{1 \leqslant k,j \leqslant n}, \quad \beta_{kj}' = \begin{cases} \alpha_k^{-1} \partial_j \alpha_k, & k \leqslant i-1; \\ t_j^{-1} (t_j \beta^{-1} \partial_j \beta), & k = i; \\ t_j^{-1} (t_j \alpha_k^{-1} \partial_j \alpha_k)^{\Delta}, & k \geqslant i+1. \end{cases}$$

Доказательство. Разложим определитель D_i по i-ой строке:

$$l(\alpha_i) D_i \cdot V = \sum_{k=1}^{n} l(\alpha_i) \partial_k \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot V \cdot \Delta_k,$$

где Δ_k — алгебраическое дополнение элемента β_{ik}. Заметим, что

$$\partial_k \frac{\Delta}{p} \log \beta = \frac{1}{p} \beta^{-\Delta} \partial_k \beta^{\Delta},$$

т.к. $\beta = 1 + u\tilde{\beta}$, и, используя (10), пишем

$$\partial_k \frac{\Delta}{p} \log \beta = t_k^{-1} (t_k \beta^{-1} \partial_k \beta)^{\Delta}.$$

Ясно, что $\Delta_k \in R_0$. Используя, далее, следствие к лемме 2.4, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_T l(\alpha_i) D_i \cdot V &\equiv -\operatorname{res}_T \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \partial_k l(\alpha_i) V \cdot \Delta_k = \\ &= -\operatorname{res}_T \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot D_i' \cdot V \mod p^N, \end{aligned}$$

т.к. алгебраические дополнения элементов i-ой строки определителей D_i и D_i' одинаковы.

Доказательство предложения 2.3. Рассмотрим первое слагаемое в ряде $\Phi_N \cdot V$ (см. (7)) и перепишем его в виде:

$$l(\beta) D_{n+1} \cdot V = t_1^{-1} \dots t_n^{-1} \log \beta \cdot D \cdot V - \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot D_{n+1} \cdot V,$$

где

$$D = \det(t_j \alpha_i^{-1} \partial_j \alpha_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}. \tag{13}$$

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_T \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot D_{n+1} \cdot V + \sum_{i=1}^{n} l(\alpha_i) D_i V \equiv \\ &\equiv \operatorname{res}_T t_1^{-1} \dots t_n^{-1} (\log \beta \cdot D \cdot V)^{\Delta} \mod p^N. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя лемму 2.5, мы можем написать

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_T \sum_{i=1}^{n} l(\alpha_i) \cdot D_i \cdot V \equiv \\ &\equiv -\operatorname{res}_T \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta}{p} \log \beta \right) \cdot D_i' \cdot V \mod p^N. \end{aligned}$$

Обозначим

$$D_{n+1}^{(r)} = \det(\beta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad D_{n+1}^{(n)} := D_{n+1};$$
$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i, & 1\leqslant i\leqslant r-1,\\ t_j^{-1}(t_j\alpha_i^{-1}\partial_j\alpha_i)^{\Delta}, & i\leqslant r\leqslant n.\end{cases}$$

Используя равенство

$$\alpha^{-1}\partial_j\alpha - \partial_k l(\alpha) = t_k^{-1}(t_k\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^{\Delta},$$

получаем

$$\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}\cdot V - \left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_n'\cdot V = \left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}^{(n-1)}\cdot V.$$

Действуя так же, получаем далее:

$$\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}^{(n-1)}\cdot V - \left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n-1}'\cdot V = \left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}^{(n-2)}\cdot V.$$

В итоге приходим к равенству

$$\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}\cdot V - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_i'\cdot V = \left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}^{(1)}\cdot V.$$

Но, по определению, $D_{n+1}^{(1)} = t_1^{-1}t_n^{-1}D^{\Delta}$, поэтому

$$\operatorname{res}_T\left(\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D_{n+1}\cdot V + \sum_{i=1}^{n} l(\alpha_i)\cdot D_i\cdot V\right) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{res}_T t_1^{-1}\dots t_n^{-1}\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot D^{\Delta}\cdot V \mod p^N.$$

Так же, как и в одномерном случае (см. [11, Предложение 6.3]), доказывается сравнение

$$\left(\frac{\Delta}{p}\log\beta\right)\cdot V \equiv (\log\beta\cdot V)^{\Delta} \mod (p^N, \deg\overline{0}),$$

откуда следует (14).

Из (14) получаем

$$\operatorname{res}_T \Phi_N\cdot V = \operatorname{res}_T\left(l(\beta)D_{n+1}\cdot V - \sum_{i=1}^{n} l(\alpha_i)D_iV\right) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{res}_T t_1^{-1}\dots t_n^{-1}\big(\log\beta\cdot D\cdot V - (\log\beta\cdot D\cdot V)^{\Delta}\big) \mod p^N.$$

Откуда следует

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_T \Phi_N \cdot V \equiv 0 \mod p^N.$$

Заметим при этом, что ряд D (см. (13)) имеет целые коэффициенты, а ряд $\log\beta\cdot V$ имеет целые коэффициенты при отрицательных степенях, т.к.

$$\log\beta = c_0 + c_1\frac{t_n^{pe}}{p} + c_2\frac{t_n^{2pe}}{p^2} + \dots$$

$$\frac{1}{s} = d_0 t_n^{-e_*} + p d_1 t_n^{-e_*-e} + p^2 d_2 t_n^{-e_*-2e} + \dots,$$

где c_i, $d_j \in A$, $e_* = \frac{pe}{p-1}$. Кроме того, $p^m e > e_* + me$ при $p > 2$. Поэтому корректно определен $\operatorname{res}_T \log\beta\cdot D\cdot V$.

2.4. Проверка инвариантности спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s}$.

Предложение 2.5. *Пусть $t_1,\dots,t_n$; $t'_1,\dots,t'_n$ – два набора переменных;*

$$t_i = g_i(T') \in R_1,$$

причем $g_i(T') = \varepsilon t'_i + \dots$; $\varepsilon \in \mathcal{O}^*$. Тогда для любых $\alpha_i \in \mathcal{H}_m$ имеем

$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\rangle_T = \langle\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\rangle_{T'}, \tag{15}$$

где $T' = (t'_1,\dots,t'_n)$.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha_1 = t_1,\dots,\alpha_n = t_n$. Проверим сперва равенство (15), выбирая в качестве α_{n+1} элементы базиса Шафаревича (см. Предложение 1.4).

а) $\alpha_{n+1} = \omega(a)(T) = E\big(as(T)\big)$. Из предложения 1.3 и леммы 2.2 получаем

$$\langle t_1,\dots,t_n,\omega(a)(T)\rangle_T = \zeta^{\operatorname{tr} a},$$

$$\langle g_1,\dots,g_n,\omega(a)(T')\rangle_{T'} = \zeta^{\operatorname{tr}\delta a} = \zeta^{\operatorname{tr} a},$$

т.к. $\delta = \det v_j(g_i) = 1$. Отсюда следует (15).

б) $\alpha_{n+1}\beta(\theta t_1^{i_1}\dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^{i_n})$, $p \nmid \overline{i} = (i_1,\dots,i_n)$, $\theta \in \mathcal{R}$. Тогда, по формуле (7) имеем

$$\langle t_1,\dots,t_n,\alpha_{n+1}\rangle_T = 1.$$

С другой стороны, согласно символьному свойству,

$$\langle g_1(T'),\dots,g_n(T'),\beta(\theta g_1^{i_1}\dots g_n^{i_n})\rangle_{T'}=1,$$

т.к. $p\nmid\bar{i}$, и мы доказали (15) для образующих Шафаревича.

в) Если α_{n+1} — произвольный элемент из $\mathcal{H}_m$, то, используя независимость спаривания, мы можем разложить α_{n+1} по образующим Шафаревича и далее применить п. а) и б).

г) Общий случай. Символ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ как элемент K-группы можно представить в виде конечной суммы по наборам локальных униформизующих $Z=(z_1,\dots,z_n)$:

$$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}=\sum_Z a_Z\{z_1,\dots,z_n\},\quad a_Z\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\alpha_{n+1}\rangle_T=\prod_Z\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_T^{a_Z},$$
$$\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\},\alpha_{n+1}\rangle_{T'}=\prod_Z\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_{T'}^{a_Z}$$

(наборы Z одинаковы). По вышесказанному в п. 1) имеем

$$\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_T=\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_Z,$$
$$\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_{T'}=\langle z_1,\dots,z_n,\alpha_{n+1}\rangle_Z;$$

откуда следует (15) в общем случае.

3. Явная формула обобщенного символа Гильберта

Теорема 2. *Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_{n,1}$ (см. (12)) совпадает с символом Гильберта $(\cdot,\cdot)$ (см. п. 1.3).*

Доказательство. Оба спаривания заданы на одном и том же множестве $K_n^{\mathrm{top}}(K)\times K^*$ со значениями в группе $\langle\zeta\rangle$.

1) Пусть $t_1,\dots,t_{n-1},\Pi$ — набор локальных параметров поля K. Проверим, что для любого $\beta\in K^*$:

$$\langle\{t_1,\dots,t_{n-1},\Pi\},\beta\rangle=(\{t_1,\dots,t_{n-1},\Pi\},\beta).\tag{16}$$

а) Пусть $\beta = \omega(a) := E\big(as(t_n)\big)\Big|_{t_n=\Pi}$ — примарный элемент и $\underline{\beta} = E\big(as(t_n)\big)$ его прообраз в $\mathcal{H}_m$, t_n — прообраз Π в $\mathcal{H}_m$. Тогда, с одной стороны,

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, \beta) = \zeta^{\operatorname{tr} a}$$

(см. предложение 1.3), а с другой:

$$\langle t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, \underline{\beta}\rangle = \zeta^{\operatorname{tr} a}$$

(см. лемму 2.2), откуда следует (16) (см. замечание 7 к теореме 1).

б) Пусть $\beta = E(\theta T^{\overline{r}})\Big|_{t_n=\Pi}$, $\theta \in \mathcal{R}$ и $\underline{\beta} = E(\theta T^{\overline{r}})$ — его прообраз в $\mathcal{H}_m$ (здесь $p \nmid \overline{r}$). Тогда, согласно предложению 1.4,

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, E(\theta T^{\overline{r}})\Big|_{t=\Pi}) = 1,$$

а по формулам (7) и (8)

$$\langle t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, E(\theta T^{\overline{r}})\rangle = 1,$$

откуда получаем (16).

в) Если β — произвольный элемент, то (16) следует из п.п. а) и б) и разложения β по базису Шафаревича.

г) Общий случай следует из разложения произвольного элемента $\alpha \in K^*$ в произведение локальных параметров и п. 1).

4. Норменные ряды

4.1. В этом параграфе мы дадим определение норменного ряда для многомерного локального поля и найдем необходимые и достаточные условия норменности заданного ряда. Напомним, что впервые такие ряды были рассмотрены в работе [12]. В работе [1] они изучались для формальных групп Любина–Тейта.

Определение 2. Ряд $f_N(X) \in 1 + X\mathcal{O}[\![X]\!]$ назовем норменным степени N, если для любого многомерного локального поля K, содержащего все корни степени p^N из 1, найдутся элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K^*$ такие, что для всех $\alpha \in \mathfrak{M}_K$ выполнено условие:

$$\big(\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}, f_N(\alpha)\big) = 1.$$

(Здесь $\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал кольца целых поля K относительного n-мерного нормирования.)

Определение 3. Ряд $f(X) \in 1+X\mathcal{O}[\![X]\!]$ назовем абсолютно норменным (или просто норменным), если он является норменным степени N для любого $N \geqslant 1$.

Замечание 8. Если $f(X)$ — норменный ряд, то символ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$ является нормой из $K_n\big(K\big(\sqrt[p^N]{f(\alpha)}\big)\big)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{M}_K$.

Теорема 3. *Ряд $f(X) \in 1+X\mathcal{O}[\![X]\!]$ является норменным тогда и только тогда, когда*

$$\int X^{-1}(l \circ f)(X)\,dX \in \mathcal{O}[\![X]\!], \tag{17}$$

где l — функция из (4).

4.2. Прежде чем доказывать теорему 3, проверим аналогичный результат для норменного ряда степени N.

Предложение 4.1. *Ряд $f_N(X) \in 1+X\mathcal{O}[\![X]\!]$ является норменным степени N тогда и только тогда, когда ряд*

$$(l \circ f_N)(X) = \sum_{m \geqslant 1} d_m X^m, \quad d_m \in \mathcal{O} \tag{18}$$

удовлетворяет условию:

$$v_p(d_m) \geqslant \min\big(N, v_p(m)\big) \tag{18$'$}$$

для всех $m \geqslant 1$ (здесь v_p — p-адическое нормирование).

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Обозначение. *Если ряд $\varphi(T) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ представим в виде*

$$\varphi = \partial_1\varphi_1 + \dots + \partial_n\varphi_n, \qquad \text{где } \partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i},$$

и ряды φ_i имеют целые коэффициенты из кольца $\mathcal{O}$, то будем писать

$$\varphi \equiv 0 \mod \partial$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\varphi \equiv 0 \mod \partial$ *и* ψ *— ряд с целыми коэффициентами. Тогда*

$$\mathrm{res}_T\, \varphi \cdot V^{(s)}(\psi) \equiv 0 \mod p^s, \quad 0 \leqslant s \leqslant p^N.$$

В частности, $\mathrm{res}_T\, \varphi \cdot V^{(s)}(\psi) \equiv 0 \mod p^N$.

Доказательство. Из определения примарных рядов (см. п. 1.5) следует

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_T\, \varphi \cdot V^{(s)}(\psi) \equiv \mathrm{res}_T\, \varphi \cdot (\Delta V^{(s-1)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_T(\partial_i \varphi_i) \cdot (\Delta V^{(s-1)}) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_T\, \varphi_i \cdot \partial_i(\Delta V^{(s-1)}) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_T\, \varphi_i \cdot \bigl(p t_i^{-1} \bigl(t_i \partial_i V^{(s-1)}(\psi)\bigr)^{\Delta}\bigr) \equiv 0 \mod p^s.\end{aligned}$$

(Мы использовали равенство (9)).

Лемма 4.3. *Пусть* $f_{k,l}(t_1, \ldots, t_n)$, $1 \leqslant k, l \leqslant n$ *— ряды из* $A((t_n))$, *для которых выполнены условия*

$$\partial_m f_{k,l} = \partial_l f_{k,m}. \tag{19}$$

Пусть Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *— определитель матрицы, которая получается из матрицы* $(f_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$ *вычеркиванием* i*-го столбца и* n*-ой строки. Тогда для любого ряда* $\varphi \in A((t_n))$ *выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Delta_i \cdot \partial_i \varphi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial_i (\Delta_i \varphi).$$

Доказательство. Утверждение леммы равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \partial_i \Delta_i = 0,$$

которое легко проверить, используя равенство (19).

Доказательство предложения 4.1. 1) Пусть выполнено условие (18). Для проверки того, что ряд $f_N(X)$ является норменным степени N рядом, достаточно доказать, согласно теореме 2, следующее равенство для спаривания $\langle\cdot,\dots,\cdot\rangle$:

$$\langle\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1};\alpha\}, f_N(\alpha)\rangle = 1 \tag{20}$$

для любых $\alpha_i \in \mathcal{H}_m$, $\alpha \in R_1$.

Докажем сперва, что в ряде Φ_N (см. (7)) для элементов $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha\}$, $f_N(\alpha)$ определители D_i равны 0 при $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Действительно,

$$\frac{1}{p}\alpha^{-\Delta}\partial_k\alpha^{\Delta} = t_k^{-1}(t_k\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^{\Delta} \tag{21}$$

(см. (10)). Далее, из условия на ряд f_N получаем

$$(\log\circ f_N)(X) = \sum c_m X^m \tag{22}$$

и $mc_m \in \mathcal{O}$, т.к. $\frac{d}{dX}\log\big(f(X)\big) \in \mathcal{O}[\![X]\!]$.

Значит,

$$\partial_k(\log\circ f_N)(\alpha) = \partial\bigg(\sum_{m\geqslant 1} c_m\alpha^m\bigg) = (\alpha^{-1}\partial_k\alpha)\sum_{m\geqslant 1} mc_m\alpha^m,$$

откуда, используя (9), следует

$$\partial_k\frac{\Delta}{p}\log\big(f_N(\alpha)\big) = t_k^{-1}(t_k\alpha^{-1}\partial_k\alpha)^{\Delta}\cdot\sum_{m\geqslant 1} mc_m\alpha^{m\Delta}. \tag{23}$$

Сравнивая (21) с (23), видим, что в определителе D_i строки с номерами n и i пропорциональны, т.е. $D_i = 0$.

Тем самым

$$\Phi_N = l\big(f_N(\alpha)\big)D_{n+1} - l(\alpha)D_n = \begin{vmatrix} \alpha_1^{-1}\partial_1\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{-1}\partial_n\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-2}^{-1}\partial_1\alpha_{n-2} & \dots & \alpha_{n-2}^{-1}\partial_n\alpha_{n-2} \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \alpha^{-1}\partial_1\alpha & \dots & \alpha^{-1}\partial_n\alpha \end{vmatrix},$$

где $\varphi_k = l\big(f_N(\alpha)\big)\alpha^{-1}\partial_k\alpha - l(\alpha)\partial_k\frac{\Delta}{p}\log f_N'(\alpha)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Разложим определитель по $(n-1)$-ой строке:

$$(-1)^n\Phi_N = \varphi_1\Delta_1 - \varphi_2\Delta_2 + \dots + (-1)^{n-1}\varphi_n\Delta_n,$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — соответствующие миноры матрицы. Для ряда φ_k так же, как в предложении 2.1 работы [1] (см. также, предложение 2, стр. 1295, работы [10]), получаем выражение

$$\varphi_k = \sum_{m \geqslant 1} \partial_k \left(d_m \frac{\alpha^m}{m} \right) + \sum_{m \geqslant 1} \partial_k \left(\frac{c_m}{p} \left(\frac{\alpha^{mp} - \alpha^{m\Delta}}{mp} - l(\alpha)\alpha^{m\Delta} \right) \right),$$

при этом по условию: $v_p(d_m) \geqslant \min\big(N, v_p(m)\big)$ и $mc_m \in \mathcal{O}$ (см. (22)).

Обозначим

$$g_m := d_m \frac{\alpha^m}{m},$$
$$h_m := \frac{c_m}{p} \left(\frac{\alpha^{mp} - \alpha^{m\Delta}}{mp} - l(\alpha)\alpha^{m\Delta} \right).$$

Тогда, согласно лемме 4.3

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \Delta_k \cdot \partial_k h_m = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (\Delta_k h_m).$$

Миноры Δ_k являются рядами с целыми коэффициентами из кольца $\mathcal{O}$, т.к. ряды $\alpha_i^{-1} \partial_k \alpha_i$ имеют целые коэффициенты. Ряд h_m имеет также целые коэффициенты (см. предложение 2, [10]). Поэтому, согласно лемме 4.2,

$$\operatorname{res}_T \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (\Delta_k h_m) \right) \cdot V \equiv 0 \mod p^N$$

и, значит,

$$\operatorname{res}_T \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{m \geqslant 1} (-1)^{k-1} \partial_k (\Delta_k h_m) \cdot V \right) \equiv 0 \mod p^N. \tag{24}$$

Проверим теперь, что

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \partial_k (\Delta_k g_m) \cdot V \equiv 0 \mod p^N.$$

Пусть $r = v_p(m)$. Если $r \geqslant N$, тогда ряд $\partial_k g_m = d_m \partial_k \frac{\alpha^m}{m}$ имеет коэффициенты, делящиеся на p^N, т.е. $v_p(d_m) \geqslant \min(N, r) = N$, и значит,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m\cdot V\equiv 0 \mod p^N, \qquad (25)$$

если $v_p(m)\geqslant N$.

Пусть теперь $0\leqslant r<N$. Ряд V является p^N-примарным, а ряд $(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m$ имеет, очевидно, коэффициенты, делящиеся на p^r, т.к. $v_p(d_m)\geqslant r$ по условию. Поэтому мы можем заменить ряд V по модулю p^N на ряд $\Delta^{r+1}V^{(N-r-1)}$ (см. определение 2, п. 1.5). Используя, кроме того, лемму 4.3, получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m\cdot V &\equiv \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m\cdot\Delta^{r+1}V^{(N-r-1)}=\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\partial_k(\Delta_k\cdot g_m)\cdot\Delta^{r+1}V^{(N-r-1)}=\\ &=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\Delta_k\cdot g_m)\partial_k\left(\Delta^{r+1}V^{(N-r-1)}\right)=\\ &=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\Delta_k\cdot g_m)\cdot t_k^{-1}\left(p^{r+1}t_k\partial_k V^{(N-r-1)}\right)^{\Delta^{r+1}} \mod p^N.\end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали равенство (9). Осталось заметить, что ряд g_m имеет целые коэффициенты, т.к. $d_m/m\in\mathcal{O}$ по условию, и кроме того, по определению примарного ряда: $\partial_k V^{(N-r-1)}\equiv 0 \mod p^{N-r-1}$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m\cdot V\equiv 0 \mod p^N, \qquad (26)$$

если $0\leqslant v_p(m)<N$. Из (25) и (26) следует

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m\geqslant 1}(-1)^{k-1}\Delta_k\cdot\partial_k g_m\cdot V\equiv 0 \mod p^N,$$

откуда, учитывая полученное ранее сравнение (24), имеем в итоге

$$\operatorname{res}_T(-1)^n \Phi_N V = \operatorname{res}_T(-1)^n \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\varphi_k \Delta_k \cdot V =$$
$$= (-1)^n \operatorname{res}_T \sum_{k=1}^{n}\sum_{m\geqslant 1}\Big(\Delta_k(\partial_k g_m + \partial_k h_m)\cdot V\Big) \equiv 0 \mod p^N,$$

и равенство (20) доказано.

2) Пусть теперь $f_N(X)$ — норменный ряд степени N, но при этом не для всех $m \geqslant 1$ выполнено условие (18′). Выберем среди всех таких m наименьший индекс r с минимальным значением $v_p(d_r)$.

Таким образом,

$$\begin{cases} v_p(d_r) < N \\ v_p(d_r) < v_p(d_m), \quad m < r \\ v_p(d_r) \leqslant v_p(d_m), \quad m \geqslant r. \end{cases}$$

Пусть $k = v_p(r)$. Рассмотрим круговое расширение $\mathbb{Q}_p(\zeta)$, где $\zeta := \zeta_{p^k}$, и над ним вполне разветвленное расширение K степени r_0, где $r = p^k \cdot r_0$, $(p, r_0) = 1$. Пусть $L = K\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$ — n-мерное локальное поле. В поле K можно выбрать простой элемент Π так, что $\zeta - 1 = \Pi^{r_0} + b_1\Pi^{r_0+1} + \dots$, $b_i \in \mathbb{Z}_p$, и, значит, прообразом элемента $\zeta - 1$ при гомоморфизме (2) будет ряд $\zeta - 1 = t_n^{r_0} + b_1 t_n^{r_0+1} + \dots$. Поэтому $s(t_n) = \underline{\zeta}^{p^k} - 1 = (\underline{\zeta} - 1)^{p^k} + pg(\underline{\zeta} - 1)$, где $g(X) \in X\mathbb{Z}_p[\![X]\!]$, откуда

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\underline{\zeta}^{p^k} - 1} \equiv t_n^{-p^k r_0} = t_n^{-r} \mod (p, t_n^{-r+1}). \tag{28}$$

Вычислим символ Гильберта $(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi\}, f_N(\Pi))$ в поле L. По определению ряда $\Phi_k := \Phi_k\big(t_1, \dots, t_{n-1}, \Pi, f_N(\Pi)\big)$ (см. (7)) имеем:

$$\Phi_k \cdot V = l\big(f_N(t)\big) t_1^{-1} \dots t_n^{-1} \cdot V =$$
$$= t_1^{-1} \dots t_{n-1}^{-1} \left(\sum_{m\neq r} d_m t_n^{m-1} \cdot V + d_r t_n^{r-1} \cdot V\right).$$

Из (28) следует, что

$$\operatorname{res}_T t_1^{-1} \dots t_n^{-1}(d_r \cdot t_n^r \cdot V) \equiv d_r \mod (d_r p)$$

(напомним, что $V = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}$). Далее, из (27) и (28) получаем:

$$\operatorname{res}_T t_1^{-1} \dots t_n^{-1} d_m \cdot t_n^m \cdot V \equiv 0 \mod (d_r p), \quad m \neq r.$$

Откуда $\operatorname{res}_T \Phi_k \cdot V \equiv d_r \mod (d_r p)$, значит,

$$\operatorname{tr} \operatorname{res}_T \Phi_k \cdot V = \operatorname{res}_T \Phi_k \cdot V \equiv d_r \not\equiv 0 \mod p^k,$$

т.к. $K/\mathbb{Q}_p$ — вполне разветвлено, и $v_p(d_r) < k$. Это означает, что для $\alpha = \Pi$:

$$\left(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \alpha\}, f_N(\alpha)\right)_{L,k} = \zeta^{\operatorname{tr} \operatorname{res} \Phi_k \cdot V} \neq 1,$$

т.е. ряд $f_N(X)$ не является норменным, что противоречит условию. Предложение доказано.

4.3 Доказательство теоремы 3.

1. Если ряд $f(X)$ удовлетворяет условию (17) теоремы, то он удовлетворяет условию (18) предложения 4.1 для любого N. Значит, ряд $f(X)$ является абсолютно норменным по определению.

2. Пусть для ряда $f(X) \in 1 + X\mathcal{O}[\![X]\!]$ условие (17) не выполнено. Докажем, что тогда $f(X)$ не будет норменным степени N для какого-то N.

Если условие (17) не выполняется, то для некоторых m: $d_m/m \notin \mathcal{O}$. Среди всех таких m выберем наименьший индекс r с минимальным значением $v_p(d_r)$. Если при этом $r = p^N r_0$, $p \nmid r_0$, то

$$\begin{aligned} &v_p(d_r) < N, \\ &v_p(d_r) < v_p(d_m), \quad m < r, \\ &v_p(d_r) \leqslant v_p(d_m), \quad m \geqslant r. \end{aligned}$$

Далее, действуя так же, как в доказательстве п. 2 предложения 4.1, показываем, что ряд f не является норменным степени N, и тем самым, не будет абсолютно норменным. Теорема доказана.

Литература

1. С. В. Востоков, Р. Перлис, *Норменные ряды для формальных групп Любина-Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 105–127.

2. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов для многомерных локальных полей.* — Изв. АН СССР. Сер. матем **49**, вып. **2** (1985), 283–308.
3. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, *К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции.* — Алгебра и анализ **2**, вып. 4 (1990), 91–118.
4. F. Lorenz, S. Vostokov, *Honda Groups and Explicit Pairings on the Modules of Cartier Curves.* — Contemporary Mathematics, **300** (2002), 143–170.
5. K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups* I. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **26** (1979), 303-376; II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **27** (1980), 603–683.
6. А.Н. Паршин, *Теория полей классов и алгебраическая K-теория.* — УМН **30** (1975), 253–254.
7. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов.* — Труды МИ АН СССР **165** (1984), 143–170.
8. Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в полном многомерном поле.* И. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 5–34.
9. А. И. Мадунц, *О сходимости рядов над локальными полями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **198** (1991), 28–30.
10. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **42**, вып. **6** (1978), 1287–1320.
11. G. Henniart, *Sur les lois de reciprocité explicites.* I. — J. reine und angew. Math. **329** (1981), 172-203.
12. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43** (1979), 1064–1120.

Vostokov S. V., Pak G. K. Norm series in multidimensional local fields.
In the present paper, the notion of norm series with respect to the norm residue symbol is generalized to a multidimensional local field. Necessary and sufficient conditions for the existence of norm series are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 16 мая 2003 г.