Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 305, 2003 г.

С. К. Васильев

О ТОЖДЕСТВАХ И МНОГООБРАЗИЯХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР КОНЕЧНОГО ТИПА

Введение

Многообразие алгебр V над кольцом Λ называется многообразием конечного типа, если всякая конечно-порожденная относительно свободная алгебра данного многообразия является конечно определенной. Если многообразие V задано системой тождеств $\Omega = \{f_i | i \in I\}$, то мы будем называть Ω системой тождеств конечного типа тогда и только тогда, когда многообразие V – многообразие конечного типа. При этом, когда эта система состоит из одного элемента, мы будем говорить о тождестве конечного типа. Из теоремы Д. Гильберта о базисе следует, что любое многообразие коммутативных алгебр над полем является многообразие конечного типа.

В 1978 г. В. Т. Марков [1] описал многообразия алгебр с единицей конечного типа над бесконечным полем. Он доказал, что конечность типа для такого многообразия эквивалентна локальной левой нетеровости многообразия а также выполнимости тождества Энгеля.

В 1996 г. С. И. Кублановский [2] нашел условия конечности типа для многообразий алгебр (без единицы) с нормальной характеристикой, равной 1, над нетеровыми кольцами Джекобсона.

Проблема описания многообразий конечного типа в наибольшей общности, т.е. для любых алгебраических систем (для групп, колец, алгебр и т.д.) была отмечена в 1995 г. в обзоре О. Харлампович и М. Сапира [3].

Целью данной работы является описание тождеств и многообразий конечного типа и их структурных свойств для произвольных многообразий алгебр над полем.

Основные понятия, обозначения и замечания

1) Пусть A – алгебра над кольцом Λ, тогда через $A^{\#}$ будем обозначать саму A, если она содержит единицу и A с внешне при-

соединенной единицей в противном случае. Через A^* обозначим алгебру, антиизоморфную A.

2) Если X некоторое множество, то через X^+ обозначим свободную полугруппу над X, ее элементы мы будем трактовать как слова над алфавитом X. Пусть u слово над алфавитом X, тогда через $l_1(u)$ и $r_1(u)$ будем обозначать первую и последнюю букву слова u соответственно. Внутренними буквами слова u будем называть все его буквы, кроме первой и последней.

3) Многообразие алгебр над некоторым кольцом Λ называется PI-многообразием, если в нем выполнено некоторое тождество $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, где $\lambda_i \in \Lambda$, u_i – мономы, и идеал, порожденный всеми λ_i, совпадает с Λ. Соответственно, алгебра называется PI-алгеброй, если многообразие, порожденное ею, является PI-многообразием.

Алгебра, для которой существует точный неприводимый модуль, называется *примитивной*. Примитивная PI-алгебра изоморфна алгебре матриц $M_n(D)$ над некоторым телом D, конечномерным над своим центром (см. [4, 151]).

4) Будем называть тождество $f(x_1,..,x_n)$ над кольцом Λ нематричным, если для всякого кольца $\overline{\Lambda}$, – гомоморфного образа Λ, – в алгебре матриц размера $n > 1$ над $\overline{\Lambda}$ (рассматриваемой как алгебра над Λ) не выполняется данное тождество. Матричную алгебру над кольцом Λ будем обозначать через $M_n(\Lambda)$, где n – размер матриц.

5) В данной работе будут использоваться некоторые свойства нетеровых модулей: замкнутость класса нетеровых модулей относительно расширений, гомоморфных образов, подмодулей. Всякий нетеров модуль является конечно порожденным. Для модулей над нетеровыми кольцами (алгебрами) верно и обратное: каждый конечно порожденный модуль является нетеровым. Из теоремы Гильберта вытекает, что каждая конечно порожденная коммутативная алгебра над нетеровым кольцом является нетеровой (см. [5]).

6) Пусть A – алгебра над некоторым кольцом Λ, тогда для всяких $a, b \in A$ через $[a,b] = ab - ba$ обозначим коммутатор элементов a и b. Через K_A будем обозначать идеал, порожденный коммутаторами всех элементов A. Также его называют коммутаторной алгеброй. Через $\mathrm{rad}(A)$ будем обозначать радикал Джекобсона

алгебры A.

7) Если дана алгебра A над кольцом Λ, то через $D(A)$ обозначим тензорное произведение $A^{\#}$ и $A^{*\#}$: $A^{\#} \otimes_{\Lambda} A^{*\#}$. Канонически определяется структура унитарного левого модуля $[D(A), A]$:

$$\left(\sum_i (x_i \otimes y_i)\right) \circ a = \sum_i x_i a y_i$$

Подмодули модуля $[D(A), A]$ совпадают с двусторонними идеалами A, и конечная порожденность его подмодуля означает конечную порожденность соответствующего идеала.

8) Пусть дана алгебра A над некоторым кольцом Λ, и два ее идеала $J \subset I \subset A$. Тогда, если J – конечно порожденный идеал A, а I/J – конечно порожденный идеал A/J, то I – конечно порожденный идеал.

Действительно, пусть идеал $I/J = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n})$ и $J = (a_{n+1}, ..., a_m)$, где a_i, b_j - элементы A(черта обозначает каноническую проекцию A на A/J). Тогда для всякого $x \in I$ найдутся такие ϕ_i,ψ_i $(i = 1...n)$ из $A^{\#}$, что

$$\overline{x} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \phi_i a_i \psi_i}$$

Следовательно, найдется такое $b \in J$, что $x = \sum_{i=1}^{n} \phi_i a_i \psi_i + b$, а так как J конечно порожден, то найдутся ϕ_i, ψ_i $(i = n+1...m)$ такие, что $b = \sum_{i=n+1}^{m} \phi_i a_i \psi_i$. Поэтому $x = \sum_{i=1}^{m} \phi_i a_i \psi_i$, таким образом $a_1, ..., a_n, .., a_m$ образуют порождающую систему для I.

9) Через Ass будем обозначать многообразие всех ассоциативных алгебр над каким-либо фиксированным кольцом. Пусть V – многообразие алгебр над кольцом Λ. Через $F_k(V)$ обозначим относительно свободную k-порожденную алгебру, а через $\mathrm{Id}_k(V)$ идеал всех тождеств многообразия V от k переменных. Обозначим через $F_\infty(V)$ относительно свободную алгебру от счетного числа образующих и через $\mathrm{Id}(V)$ – идеал всех тождеств V. Можно считать, что $\mathrm{Id}_k(V) \subset F_k(V)$ и $\mathrm{Id}(V) \subset F_\infty(V)$. Если $V = \mathrm{Ass}$, тогда $F_k(\mathrm{Ass})$ мы будем обозначать просто F_k.

10) Если многообразие V задано системой тождеств $\Omega = \{f_i(x_1, ..., x_n) | i \in \Gamma\}$, тогда

(a) идеал тождеств $\mathrm{Id}(V)$ порожден (как идеал) системой элементов

$$\{f_i(h_1(y_1,...,y_m),...,h_n(y_1,...,y_m)|m \in N,\ h_1,...,h_n \in F_m\} \quad (*)$$

(b) идеал тождеств $\mathrm{Id}_m(V)$ порожден системой элементов

$$\{f_i(h_1(y_1,...,y_m),...,h_n(y_1,...,y_m)|h_1,...,h_n \in F_m\} \quad (**)$$

11) В данной работе будут часто использоваться свойства тождеств, идеалов, а также их связь с многообразиями. Пусть V, V_1, V_2 – многообразия над кольцом Λ, а n – любое натуральное число, тогда

a) $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow \mathrm{Id}(V_1) \supset \mathrm{Id}(V_2)$;
b) Если $F_\infty = \langle a_i|i \in N\rangle$, а $A_n = \langle a_i|1 \le i \le n\rangle$ – подалгебра F_∞, то $\mathrm{Id}_n(V) = A_n \cap \mathrm{Id}(V)$;
c) $V = V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \mathrm{Id}(V) = \mathrm{Id}(V_1) + \mathrm{Id}(V_2)$;
d) $V = V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \forall m > 0\ \mathrm{Id}_m(V_1 \cap V_2) = \mathrm{Id}_m(V_1) + \mathrm{Id}_m(V_2)$;
e) $\mathrm{Id}(\langle V_1, V_2\rangle) = \mathrm{Id}(V_1) \cap \mathrm{Id}(V_2)$;
f) $\mathrm{Id}_n(\langle V_1, V_2\rangle) = \mathrm{Id}_n(V_1) \cap \mathrm{Id}_n(V_2)$.

12) Пусть дано многообразие V над кольцом Λ. Тогда оно является многообразием конечного типа тогда и только тогда, когда для любого натурального n идеал тождеств $\mathrm{Id}_n(V)$ является конечно порожденным идеалом в алгебре F_n.

Действительно, достаточно показать, что n-порожденная относительно свободная алгебра многообразия V может быть представлена как $F_n/\mathrm{Id}_n(V)$. Через $\overline{a}$, где $a \in F_n$, обозначим образ a при каноническом гомоморфизме из F_n в $\overline{F_n} = F_n/\mathrm{Id}_n(V)$. Пусть $F_n = \langle a_1,...,a_n\rangle$ и ϕ – произвольное отображение из $\{\overline{a_1},...,\overline{a_n}\}$ в некоторую алгебру $B \in V$. Тогда любой элемент $\overline{F_n}$ представляется как подстановка $\overline{a_1},...,\overline{a_n}$ в некоторый полином от некоммутирующих переменных $f(x_1,...,x_n)$. Определим ψ – продолжение ϕ так: если $u \in \overline{F_n}$ представляется подстановкой $\overline{a_1},...,\overline{a_n}$ в полином $f(x_1,...,x_n)$, то положим $\psi(u) = f(\phi(\overline{a_1}),...,\phi(\overline{a_n}))$. Докажем, что такое определение корректно: если $u = f(a_1,...,a_n)$, $v = g(a_1,...a_n)$, и $\overline{u} = \overline{v}$ то $h(a_1,...,a_n) = f(a_1,...,a_n) - g(a_1,...,a_n) \in \mathrm{Id}_n(V)$, то есть может рассматриваться как тождество, выполненное в V. Тогда для любых $b_1,...,b_n \in B \quad h(b_1,...,b_n) = 0$ и, в частности, $h(\phi(\overline{a_1}),...,\phi(\overline{a_n}))$, то есть $\phi(\overline{u}) = f(\phi(\overline{a_1}),...,\phi(\overline{a_n})) = g(\phi(\overline{a_1}),...,\phi(\overline{a_n})) = \phi(\overline{v})$. То, что данное отображение является гомоморфизмом алгебр, вытекает непосредственно из определения.

13) В работе С. И. Кублановского [6] была введена нормальная характеристика многообразия, ниже будет дано ее определение. Пусть задан некоторый алфавит $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$.

Пусть $f(x_1, .., x_n) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k(x_1, .., x_n)$ – полином с коэффициентами из кольца Λ, где $u_k(x_1, .., x_n)$ – слова над алфавитом $\{x_1, ..., x_n\}$. Если задано некоторое отношение эквивалентности γ на множестве X^+, то γ-характеристикой $f(x_1, ..., x_n)$ будем называть идеал, порожденный элементами:

$$\left\{ \mu_j = \sum_{1 \leq i \leq m; u_i \gamma u_j} \lambda_i | 1 \leq j \leq m \right\},$$

и обозначать ее $\gamma(f)$. Тогда γ-характеристикой многообразия V над кольцом Λ назовем сумму γ-характеристик всех тождеств, выполненных в данном многообразии. Аналогично, такую характеристику будем обозначать через $\gamma(V)$.

Определим три отношения эквивалентности на множестве X^+:

(a) $u \, \nu \, v$, если $l_1(u) = l_1(v)$ и $r_1(u) = r_1(v)$, и слова u и v отличаются друг от друга только некоторой перестановкой;

(b) $u \, \nu_l \, v$, если $l_1(u) = l_1(v)$, и слова u и v отличаются отличаются друг от друга некоторой перестановкой;

(c) $u \, \nu_r \, v$ если $r_1(u) = r_1(v)$, и слова u и v отличаются друг от друга некоторой перестановкой.

Нормальной, левой нормальной и правой нормальной характеристикой многообразия (тождества) называется его ν-, ν_l-, ν_r-характеристика, будем обозначать их $\nu(V)$, $\nu_l(V)$, $\nu_r(V)$ (см. [2]). Если кольцо Λ содержит единицу, то будем говорить, что какая-либо из данных характеристик многоообразия V равна единице, если характеристика совпадает со всем кольцом Λ. Можно показать, что все такие характеристики многообразия можно вычислять только по базису тождеств многообразия (т.е. рассматривать сумму характеристик только тех тождеств, которые входят в базис), результат не зависит от базиса и совпадает с характеристикой, подсчитанной по всем тождествам многообразия.

Рассмотрим многообразие алгебр V, через K_∞ обозначим коммутаторную алгебру в F_∞. Мы будем пользоваться некоторыми свойствами данных характеристик многообразия V:

(a) $\nu_l(V) + \nu_r(V) \subset \nu(V)$;

(b) $\nu_l(V) = (0) \Leftrightarrow \mathrm{Id}(V) \subset F_\infty K_\infty$;

(c) $\nu_r(V) = (0) \Leftrightarrow \mathrm{Id}(V) \subset K_\infty F_\infty$;
(d) $\nu(V) = (0) \Leftrightarrow \mathrm{Id}(V) \subset F_\infty K_\infty F_\infty$.

Они могут быть легко доказаны из определений непосредственно.

14) В этой работе мы будем использовать некоторые известные тождества:

(1) $S_n(x_1, ..., x_n) = \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)}$ – стандартное тождество степени n.
(2) $Pl_n(x, y) = [x, y]_n = [x, y, ..., y]$ – тождество Энгеля.
(3) $Pr(x_1, ..., x_n) = [x_1, x_2, ..., x_n]$ – тождество Лиевой нильпотентности.
(4) $P(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_{n-1}) = [x_1, y_1] z_1 [x_2, y_2] z_2 ... z_{n-1} [x_n, y_n]$ – тождество n-нильпотентности коммутаторной алгебры.
(5) $P_\sigma(x_1, ..., x_n) = x_1 ... x_n - x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} ... x_{\sigma(n)}$ – тождество перестановочности,

где σ — некоторая перестановка, а $\mathrm{sign}(\sigma)$ – ее знак.

2. Теоремы Маркова и Кублановского

В работе [1] В. Т. Марков доказал следующую теорему:

Теорема (Марков, 1978). *Если V – многообразие алгебр с единицей над бесконечным полем, то следующие условия эквивалентны:*

а) *Идеал $\mathrm{Id}_k(V)$ конечно порожден при всех $k \geq 2$;*
б) *Идеал $\mathrm{Id}_2(V)$ конечно порожден;*
в) *Многообразие V локально лево-нетерово;*
г) *В алгебрах многообразия V выполнено тождество Энгеля $[x, y]_n = 0$;*

В доказательстве данного критерия существенно используются свойства алгебр с единицей над бесконечным полем, в частности во многих случаях степень тождества может быть понижена с помощью замены $x \to x + 1$ и выделения однородных компонент меньшей степени. В общем случае даже над бесконечным полем это невозможно.

Критерий В. Т. Маркова показывает, что для алгебры конечного типа в классе алгебр с единицей над бесконечным полем обладают свойством наследственности: если какое-либо многообразие является многообразием конечного типа, то таковым же является и любое его подмногообразие. В общем случае это не так, что будет показано в разделе 6.

Кроме этого в общем случае локальная левая нетеровость многообразия является достаточным условием конечности типа, однако не является необходимым.

В статье С. И. Кублановского [2] было доказано следующее утверждение:

Теорема (Кублановский, 1996). *Пусть Λ – нетерово кольцо Джекобсона. Для того, чтобы в многообразии Λ-алгебр V каждая конечно порожденная алгебра была конечно определенной (в абсолютном смысле), необходимо и достаточно, чтобы $\nu_l(V)+\nu_r(V) = 1$, т.е. сумма левой и правой нормальных характеристик совпадала со всем кольцом операторов Λ.*

Очевидно, что если многообразие V удовлетворяет условию данного утверждения, то оно обладает свойством конечности типа. Однако обратное неверно: существуют такие многообразия алгебр, нормальная левая и правая характеристики которых равны нулю, а само многообразие обладает свойством конечности типа. Примером такого тождества может служить тождество перестановочности: $a[x,y]b = 0$. То, что оно является тождеством конечного типа, может быть доказано непосредственно (также это следует из результатов пункта 3 данной работы).

Однако для многообразий нормальной характеристики 1, данное условие оказывается и достаточным, а именно верно следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть V – многообразие нормальной характеристики 1 над нетеровым кольцом Джекобсона Λ с 1. Тогда V является многообразием конечного типа тогда и только тогда, когда $\nu_l(V)+\nu_r(V) = 1$, т.е. сумма левой и правой нормальных характеристик V совпадает с Λ.*

Доказательство. Достаточность следует из предыдущей теоремы Кублановского. Необходимость: по теореме 1 статьи [1] многообразие нормальной характеристики 1 обладает свойством, что каждая конечно порожденная алгебра является конечно определенной в данном многообразии. Таким образом, она представляется как фактор-алгебра относительно свободной алгебры данного многообразия $F_k(V)$ по некоторому ее конечно порожденному идеалу J. Однако, так как V является многообразием конечного типа, то $F_k(V) = F_k/I$, где I – конечно порожденный идеал. Обозначим через π каноническую проекцию F_k на F_k/I, а через

J_0 – прообраз J при гомоморфизме π. Тогда $J = J_0/I$ и так как I, J – конечно порождены, то J_0 также конечно порожден (см. 1.8). Следовательно, исходная алгебра изоморфна F_k/J_0, а значит, абсолютно конечно определена. Тогда воспользовавшись предыдущей теоремой Кублановского, получим что $\nu_l(V) + \nu_r(V) = 1$. Теорема доказана.

Следует отметить, что из того, что сумма левой и правой нормальной характеристики равна 1, следует, что нормальная характеристика всего многообразия равна 1 (см. 1.12).

Следствие 1. *Тождество Энгеля и тождество Лиевой нильпотентности над нетеровым кольцом Джекобсона с 1 являются тождествами конечного типа.*

Однако, данный критерий не позволяет сказать что-либо про многообразия (тождества) нормальной характеристики, отличной от 1.

3. Достаточные условия конечности типа

Легко показать, что умножение тождества конечного типа на константу из кольца, над которым рассматривается данное тождество, дает также тождество конечного типа. Следующее утверждение позволяет умножать тождества конечного типа на независимую переменную.

Предложение 1. *Пусть V – многообразие алгебр над кольцом Λ, заданное тождеством $f(X)$, где $X = (x_1, ..., x_n)$. Если V – многообразие конечного типа, тогда для всякого $y \notin X$*

(l) *многообразие, заданное тождеством $y \cdot f(X)$ является многообразием конечного типа;*

(r) *многообразие, заданное тождеством $f(X) \cdot y$ является многообразием конечного типа.*

Доказательство. Обозначим через V_0 многообразие, порожденное $f(X)$, а через V – многообразие порожденное $g(y, x_1, ..., x_n) = y \cdot f(X)$. Докажем, что $\mathrm{Id}_m(V)$ – конечно порожденный идеал. Пусть $F_m = \langle x_1, ..., x_m \rangle$, а $\mathrm{Id}_m(V_0) = (\psi_1, ..., \psi_k)$. По замечанию 1.10, не умаляя общности можно считать, что все $\psi_i(x_1, ..., x_m)$ имеют вид: $f(h_{1i}(x_1, ..., x_m), ..., h_{ni}(x_1, ..., x_m))$. Докажем, что тогда $\mathrm{Id}_m(V)$ порождается множеством $M = \{x_j \cdot \psi_i(x_1, ..., x_m) | 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq k\}$. Также по замечанию

1.10 $\mathrm{Id}_m(V)$ порождается всеми элементами из множества $N = \{g(h_0(x_1,...,x_m),...,h_n(x_1,...,x_m))|h_i \in F_m\}$. Для того, чтобы показать конечную порожденность $\mathrm{Id}_m(V)$ достаточно показать, что любой элемент множества N линейно выражается через элементы множества M. Пусть $g(h_0,...,h_n) = h_0 \cdot f(h_1,...,h_n)$, где $h_i \in F_m$. Так как $f(h_1,...,h_n) \in \mathrm{Id}_m(V_0)$, то существуют такие $a_i, b_i \in F_m^{\#}$, что $f(h_1,...,h_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i \psi_i b_i$. Тогда

$$g(h_0,...,h_n) = h_0 \cdot f(h_1,...,h_n) = \sum_{i=1}^{r}(h_0 a_i)\psi_i b_i,$$

причем $h_0 \cdot a_i \in F_m$, а значит, найдутся такие $c_{ij} \in F_m^{\#}$, что $h_0 \cdot a_i = \sum_{j=1}^{q_i} c_{ij} x_j$. Следовательно,

$$g(h_0,...,h_n) = \sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{q_i} c_{ij} x_j)\psi_i b_i = \sum_{1 \le i \le r; 1 \le j \le q_i} c_{ij}(x_j \psi_i) b_i.$$

Таким образом, $g(h_0,...,h_n)$ принадлежит идеалу, порожденному M, и значит, $\mathrm{Id}(V)$ конечно порожден. Точно так же (с точностью до симметрии) доказывается конечность типа для $f(X) \cdot y$.

Следствие 2. *Над любым коммутативным кольцом с 1 всякое перестановочное тождество P_σ (см. 1.14) является тождеством конечного типа.*

Доказательство. Пусть $P_\sigma(x_1,...,x_n) = x_1...x_n - x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}$ для некоторой нетривиальной перестановки σ. Тогда найдется такое минимальное j, что $x_j \ne x_{\sigma(j)}$. Если $j = 1$, то $\nu_l(P_\sigma) = 1$ и по теореме 1 данное тождество является тождеством конечного типа. В противном случае это тождество можно представить так:

$$P_\sigma(x_1,...,x_n) = x_1...x_{j-1}(x_j...x_n - x_{\sigma(j)}...x_{\sigma(n)}).$$

Так как $x_j \ne x_{\sigma(j)}$, то тождество $x_j...x_n - x_{\sigma(j)}...x_{\sigma(n)}$ подпадает под уже рассмотренный случай и обладает конечностью типа. Последовательно применяя к нему предложение 1 для переменных $x_1,...x_n$, получим требуемое.

Лемма 1. *Тождество вида*

$$f(a,b,c,x,y) = ab^n[x,y]c - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i ab^i[x,y]cb^{n-i}$$

является нематричным тождеством над всяким коммутативным кольцом Λ с 1.

Доказательство. Рассмотрим $M_2(\overline{\Lambda})$ – алгебру матриц размера 2 над кольцом $\overline{\Lambda}$ – гомоморфным образом Λ. Произведем следующую подстановку:

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; c \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; y \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда a – единичная матрица, b – идемпотентная, $[x,y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $cb = 0$, $b[x,y]c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c$. Итого $ab^n[x,y]c = c$, а все остальные мономы тождества обращаются в нуль, так как содержат $cb = 0$.

Лемма 2. *Пусть P – бесконечное поле, а Q – его расширение. Если тождество $f(x_1,..,x_n)$ выполнено в алгебре A над P, то оно выполняется и в $Q \otimes_P A$.*

Доказательство. Заметим, что при любой подстановке элементов $1 \otimes A$ в тождество f мы получаем в результате нуль. Действительно, рассмотрим произвольную подстановку в тождество f: $x_i \to d_i \in Q \otimes_P A$. Тогда $d_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij} \otimes a_{ij}$, где $b_{ij} \in Q$ и $a_{ij} \in A$. Так как всего различных a_{ij} конечное число, то занумеруем все различные a_{ij} через u_r $1 \leq r \leq k$, и сгруппировав элементы с одинаковыми a_{ij} в один, получим, что такую подстановку можно записать так:

$$d_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \otimes u_j,$$

где c_{ij} – некоторые (возможно, нулевые) элементы Q. При такой подстановке каждый моном f заменяется суммой произведений элементов вида $c_{ij} \otimes u_j$, а произведение таких элементов имеет вид:

$$(c_{i_1j_1} \otimes u_{j_1})(c_{i_2j_2} \otimes u_{j_2})...(c_{i_rj_r} \otimes u_{j_s}) = (c_{i_1j_1}...c_{i_rj_r}) \otimes (u_{j_1}...u_{j_r})$$

Однако различных произведений $u_{j_1}...u_{j_r}$ при такой подстановке будет конечное число, занумеруем их как $v_1,...,v_q$, где $v_s \in A$. Тогда результат подстановки можно записать так:

$$f(d_1,..,d_n) = \sum_{s=1}^{q} g_s(c_{ij}) \otimes v_s, \quad (*)$$

где g_s – полином от kn переменных с подставленными $c_{11},..,c_{1k}$, $...,c_{n1},..,c_{nk}$. Очевидно, что из v_s можно выделить минимальную линейно независимую (над P) подсистему, не умаляя общности, будем считать, что это $v_1,..,v_{q_0}$. Тогда остальные элементы суммы $(*)$ можно выразить через элементы такого же вида, но с использованием только $v_1,...v_{q_0}$, поэтому

$$f(d_1,...,d_n)=\sum_{s=1}^{q_0} h_s(c_{ij})\otimes v_s, \quad (**)$$

где h_s – полиномы от kn переменных с подставленными c_{ij} для всех i,j. Соотношение $(**)$ верно, если взять любые $c_{ij}\in Q$. Если же все $c_{ij}\in P$, то $d_i\in 1\otimes A$, такая подстановка дает нуль и по известному свойству тензорного произведения, $h_s(c_{ij})=0$. Таким образом, h_s обращается в нуль на бесконечном поле P. Известно, что каноническое соответствие между полиномами и полиномиальными функциями над полем является изоморфизмом (см. [7, с.37]), поэтому все h_s являются нулевыми полиномами. Таким образом, и для исходной подстановки $f(d_1,...,d_n)$ обращается в нуль.

Лемма 3. *Пусть в конечно порожденной алгебре A над комммутативным нетеровым кольцом Джекобсона Λ выполнено некоторое нематричное* PI-*тождество $f(x_1,...,x_n)$. Тогда коммутаторная алгебра K_A является нильпотентной.*

Доказательство. Ввиду [4, теорема 2.2.1] $A/\operatorname{rad}(A)$ разлагается в подпрямое произведение примитивных алгебр $(P_i)_{i\in I}$. Пусть $\varphi: A/\operatorname{rad}(A)\to \Pi_{i\in I}P_i$ – каноническое вложение, $\pi_i: A/\operatorname{rad}(A)\to P_i$ – канонические проекции и $\theta: A\to A/\operatorname{rad}(A)$ – канонический эпиморфизм. Отметим, что все алгебры P_i являются гомоморфными образами A, значит, в них выполняется тождество $f(x_1,...,x_n)$. По теореме Капланского всякая примитивная PI-алгебра изоморфна матричной алгебре над телом. В частности $P_i=M_{n_i}(D_i)$, где D_i – тело, конечномерное над своим центром F_i. В работе С. И. Кублановского ([2, лемма 1]) доказано, что всякая конечно порожденная примитивная PI-алгебра над нетеровым кольцом Джекобсона с 1 является конечной, поэтому P_i – конечная алгебра над Λ.

Обозначим через e_i единицу поля F_i, а через ϕ_i – отображение из Λ в F_i, заданное так: $\phi_i(\lambda)=\lambda\cdot e_i$. Непосредственно проверяется, что ϕ_i является гомоморфизмом колец, пусть $\Lambda_i = \phi_i(\Lambda)$ – подкольцо F_i. Тогда $M_{n_i}(\Lambda_i)$ – подалгебра P_i, в ней выполнено нематричное тождество f, тогда $n_i = 1$ и $P_i = D_i$.

Далее доказательство разбито на два случая:

(I) Случай $\Lambda = P$ – бесконечное поле.

Рассмотрим Q – алгебраическое замыкание поля P, и $B = Q \otimes A$ – алгебра над Q. Поскольку $K_A \subset K_B$ (если считать A канонически вложенным в B), то достаточно показать нильпотентность K_B. По лемме 2, любое однородное тождество выполненное в A, выполняется и в B, поэтому $f(x_1, ..., x_n)$ выполняется в B. Так, не умаляя общности, можно считать, что поле P алгебраически замкнуто.

Поскольку Λ_i является гомоморфным образом P, то либо $\Lambda_i = (0)$, что невозможно, либо ϕ_i – изоморфизм, и Λ_i – вкладывается в F_i. Так как P_i – конечная алгебра над Λ, то D_i – конечномерно над Λ_i. Любое конечномерное тело над алгебраически замкнутым полем совпадает с этим полем, поэтому $D_i = F_i = P$, следовательно, $P_i = P$ – поле. Подпрямое произведение полей коммутативно, поэтому $A/\operatorname{rad}(A)$ – коммутативна, значит $K_A \subset \operatorname{rad}(A)$. В работе [2] (см. Лемма 1) доказано, что радикал Джекобсона конечно порожденной PI-алгебры над нетеровым кольцом Джекобсона с 1 является ниль-идеалом, тогда K_A – ниль-идеал, и по теореме Брауна K_A – нильпотентный идеал.

(II) Общий случай.

Алгебру P_i можно рассматривать как Λ_i-алгебру, при этом Λ_i – область целостности. Если $\alpha = \lambda e_i \in \Lambda_i \setminus 0$ и $a \in P_i$, то $\alpha a = (\lambda e_i)a \neq 0$, так как умножение на λe_i сводится к умножению всех элементов матрицы a на некоторый элемент поля F_i. Отсюда следует, что P_i – алгебра без кручения. Отметим также, что как и любая матричная алгебра P_i – простая алгебра.

1) Рассмотрим случай, когда Λ_i – бесконечное кольцо. Нетрудно показать, что всякое тождество, выполненное в алгебре без кручения над бесконечным кольцом целостности, выполняется также и в тензорном произведении этого кольца на поле частных кольца скаляров. Следовательно, тождество $f(x_1, ..., x_n)$ выполнено в $\overline{\Lambda}_i \otimes_\Lambda P_i$, где $\overline{\Lambda}_i$ – поле частных Λ_i. Тогда, используя случай I получим, что коммутаторная алгебра $\overline{\Lambda}_i \otimes P_i$ нильпотентна, а следовательно и K_{P_i} – коммутаторная алгебра P_i. Если

алгебра P_i некоммутативна, то $K_{P_i} \neq 0$, а так как P_i – простая алгебра, то $K_{P_i} = P_i$ и $(K_{P_i})^n = P_i$ для всех n. Поскольку мы пришли к противоречию, алгебра P_i является коммутативной, а значит, P_i – бесконечное поле.

2) Пусть теперь Λ_i – конечное кольцо. Так как P_i – конечная алгебра над Λ_i, а Λ_i – конечное кольцо, то P_i конечно как множество. Следовательно, P_i – конечное тело, и по теореме Веддербарна ([4], теорема 3.1.1), P_i – конечное поле.

Итого $A/\operatorname{rad}(A)$ является подпрямым произведением полей, значит $K_A \subset \operatorname{rad}(A)$. По теореме Брауна $\operatorname{rad}(A)$ является нильпотентным, следовательно, K_A также нильпотентен.

Лемма 4. *Пусть A – конечно порожденная алгебра над нетеровым кольцом Λ. Если $\{B_i\}_{i=0}^n$ – подмодули $[D(A), A]$ такие, что*
(1) $B_i \supset B_i + 1$;
(2) $B_n = (0)$;
(3) B_i/B_{i+1} – *конечно-порожденный модуль;*
(4) $K_A B_i + B_i K_A \subset B_{i+1}$. *Тогда $[D(A), B_0]$ – нетеров модуль.*

Доказательство. Так как расширение нетерова модуля при помощи нетерова модуля является нетеровым модулем, то достаточно показать, что каждый из модулей B_i/B_{i+1} нетеров. Обозначим через K_D коммутаторную алгебру $D(A)$. Легко видеть, что $K_D \subset A^{\#} \otimes K_A + K_A \otimes A^{*\#}$, поэтому K_D содержится в аннуляторе модуля $[D(A), B_i/B_{i+1}]$. Тогда подмодули модулей $[D(A)/K_D, B_i/B_{i+1}]$ и $[D(A), B_i/B_{i+1}]$ совпадают, поэтому достаточно показать нетеровость первого из них. Однако алгебра $D(A)/K_D$ является конечно порожденной коммутативной, а значит, и нетеровой. Поэтому $[D(A)/K_D, B_i/B_{i+1}]$ является конечно порожденным модулем над нетеровой алгеброй, поэтому и сам является нетеровым. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть V – многообразие нормальной характеристики 0 над Λ, где Λ – нетерово кольцо Джекобсона с 1. Если тождества вида*

$$ab^m[x,y]c = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i ab^i[x,y]cb^{m-i}, \tag{I}$$

$$a[x,y]b^n c = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j b^{n-j} a[x,y]b^j c \tag{II}$$

(где a,b,c,x,y – буквы, а α_i,β_j – элементы Λ) выполнены в многообразии V, тогда V – многообразие конечного типа.

Доказательство. Поскольку степени m, n можно уравнять подстановкой вида $b \to b^l$, то не умаляя общности будем считать $n = m$.

Рассмотрим k-порожденную относительно свободную алгебру данного многообразия $A_V = F_k/\mathrm{Id}_k(V)$. Так как нормальная характеристика многообразия равна нулю, то $\mathrm{Id}_k(V) \subset F_k K_{F_k} F_k$. Для доказательства конечной определенности A_V построим алгебру $B = F_k/I$, где $I \subset \mathrm{Id}_k(V)$ – некоторый конечно порожденный идеал F_k, а алгебра B обладает свойством: $[D(B), BK_B B]$ – нетеров модуль.

Действительно, если такая алгебра найдется, то $\mathrm{Id}_k(V)/I \subset BK_B B$ и является его конечно порожденным подмодулем. Тогда $\mathrm{Id}_k(V)/I$, I – конечно порожденные идеалы и по замечанию 1.8 идеал $\mathrm{Id}_k(V)$ является конечно порожденным.

Построим такой идеал I. По лемме 1 данное многообразие является нематричным, и по лемме 3 существует такое q, что $K^q_{A_V} = (0)$ откуда $K^q_{F_n} \subset \mathrm{Id}_k(V)$. Пусть $X = \{x_1, ..., x_k\}$ – образующие F_k, построим идеал I, порожденный следующими элементами:

(1) $x_r[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1[x_{i_2}, x_{j_2}]u_2 ... u_{q-1}[x_{i_q}, x_{j_q}]x_s$, где $1 \le r, s, i_t, j_t \le k$, u_i – слова над X такие, что $\deg_y(u_i) \le n$ для всякого $y \in X$;

(2) подстановки в тождества (I), (II) следующего вида: $a \to u_0[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1[x_{i_2}, x_{j_2}]u_2 ... u_{p-1}[x_{i_p}, x_{j_p}]u_p$, $b \to x_{r_1}$, $x \to x_{r_2}$, $y \to x_{r_3}$, $c \to u_{p+1}[x_{i_p}, x_{j_p}]u_{p+2}[x_{i_{p+1}}, x_{j_{p+1}}] ... u_{t+1}[x_{i_t}, x_{j_t}]$. Здесь $0 \le t \le q$, u_s слова над X(возможно пустые) такие, что $deg_y(u_s) \le n$ для $y \in X$, $1 \le i_s, j_s, r_1, r_2, r_3, r_4 \le k$, $t \le q + 2$.

Элементы вида (1) лежат в $K^q_{F_k} \subset \mathrm{Id}_k(V)$, а элементы вида (2) вытекают из тождеств (I) и (II), поэтому $I \subset \mathrm{Id}_k(V)$.

Пусть некоторый элемент какой-либо фактор-алгебры F_k имеет вид: $u_0[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1 ... u_{r-1}[x_{i_r}, x_{j_r}]u_r$, где u_s – слова над алфавитом X, тогда r-степенью такого представления элемента будем называть сумму полных степеней u_1, ..., u_{r-1}. Если $1 < t < r$, то t-степенью такого элемента будем называть минимум r-степеней следующих элементов: $[x_{i_s}, x_{j_s}]u_s ... u_{s+r-1}[x_{i_{s+t}}, x_{j_{s+t}}]u_{s+t}$, где $1 \le s \le r - t$. Фактически, это минимальная r-степень его “подслова” содержащего ровно r коммутаторов.

Так как I – конечно порожденный идеал, покажем, что B обладает следующими свойствами:

a) $K_B^{q+2} = (0)$.

Достаточно показать, что $BK_B^q B = (0)$. Действительно, такой идеал порожден элементами вида

$$x_r[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1[x_{i_2}, x_{j_2}]u_2 \dots u_{q-1}[x_{i_q}, x_{j_q}]x_s, \qquad \text{(III)}$$

где $1 \leq r, s, i_t, j_t \leq k$, u_i – слова над X. Если все степени u_i по всем переменным меньше или равны n, то такие элементы входят в порождающее множество I. Если нет, то достаточно показать, что элемент вида III, в котором степень одного из u_i больше n, выражается через такие же элементы со строго меньшей q-степенью. Если это так, то путем многократного применения такой редукции можно свести элемент к порождающей системе I.

Обозначим через R элемент вида III. Заметим, что если между коммутаторами в R заменить произведение переменных a, b следующим образом $ab = ba + [a, b]$, то исходный элемент разложится в линейную комбинацию двух элементов такого же вида, причем тот, в котором участвует $[a, b]$, будет иметь строго меньшую q-степень. Пусть l – наименьший номер такой, что $\deg_z(u_l) > n$. Тогда путем коммутирования переменных можно свести элемент R к сумме: $R = R_0 + \sum_{s=1}^{t} a_s R_s b_s$, где мономы R_s имеют q-степень меньше q-степени R_0, а моном u_l в R_0 имеет вид: $u_l = z^n v$. Тогда можно воспользоваться соотношением (2) для тождества II, где $a = x_r[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1 \dots [x_{i_{l-1}}, x_{j_{l-1}}]u_{l-1}$, $x = x_{i_l}$, $y = x_{j_l}$, $b = z$, $c = l_1(v)$, если v непусто, и $c = [x_{i_{l+1}}, x_{j_{l+1}}]$ в противном случае. При использовании такого соотношения элемент R_0 заменяется на сумму элементов вида:

$$\beta_s z^{n-s} x_r[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1 \dots [x_{i_{l-1}}, x_{j_{l-1}}]u_{l-1}[x_{i_l}, x_{j_l}]z^s v[x_{i_{l+1}}, x_{j_{l+1}}] \dots [x_{i_q}, x_{j_q}]x_t.$$

При этом q-степень таких элементов по сравнению со степенью R_0 уменьшается хотя бы на единицу, так как $s < n$.

b) $[D(A), BK_B B / BK_B^2 + K_B^2 B]$ – конечно порожденный модуль.

Модуль $[D(A), BK_B B]$ порожден элементами вида: $x_r[x_i, x_j]x_s$, поэтому и его фактор-модуль будет конечно порожден.

c) $[D(A), BK_B^2 + K_B^2 B / K_B^3]$ – конечно порожденный модуль.

Модуль $[D(A), BK_B^2 + K_B^2 B]$ порожден элементами вида:

$$x_r[x_{i1}, x_{j1}]u[x_{i2}, x_{j2}], \ [x_{i1}, x_{j1}]u[x_{i2}, x_{j2}]x_r \qquad \text{(IV)}$$

где u – любое слово над алфавитом X. Покажем, что фактор-модуль порожден элементами вида (IV) при $\deg_z(u) \le n$ для любого $z \in X$. Для этого достаточно показать, что элемент вида (IV) с 2-степенью u большей n линейно выражается через элементы такого же вида со строго меньшими 2-степенями u. Если в элементе вида (IV) в слове u заменить произведение букв a,b на $ab + [a, b]$, то элемент содержащий $[a, b]$ обратится в нуль, так как он содержит три коммутатора. Поэтому можно считать, что u имеет вид $z^n v$ для BK_B^2 (vz^n для $K_B^2 B$). Тогда применим соотношение (2) для тожества (I) (или (II) для $K_B^2 B$):

$$x_r[x_{i1}, x_{j1}]z^n v[x_{i2}, x_{j2}] = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s z^{n-s} x_r[x_{i1}, x_{j1}]z^s v[x_{i2}, x_{j2}],$$

$$[x_{i1}, x_{j1}]vz^n[x_{i2}, x_{j2}]x_r = \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s[x_{i1}, x_{j1}]vz^s[x_{i2}, x_{j2}]x_r z^{n-s}.$$

Так элемент сводится к линейной комбинации элементов со строго меньшими 2-степенями, поэтому такой фактор модуль конечно порожден.

d) Модули $[D(A), K_B^r/K_B^{r+1}]$, $3 \le r \le q+2$, конечно порождены.

Такой модуль порождается системой элементов

$$[x_{i_1}, x_{j_1}]u_1 ... u_{r-1}[x_{i_r}, x_{j_r}], \tag{V}$$

где u_s – слова над алфавитом X. Докажем, что он порождается ее подсистемой, состоящей из элементов таких, что $\deg_y(u_s) < n$ для всякого $y \in X$ и любого $1 \le s < r$. Достаточно показать, что элемент, имеющий моном u_{s_0} такой, что $\deg_{z_0}(u_{s_0}) \ge n$ для некоторого $z_0 \in X$, можно свести к сумме элементов из системы (V) имеющих строго меньшую r-степень.

Пусть R – элемент вида (V) и для некоторого $z \in X$ найдется s такое, что $\deg_z(u_s) \ge n$, тогда через s_0 обозначим наименьшее среди таких s. Поскольку элементы u_{s_0} можно переставлять, не меняя R, то можно считать, что u_{s_0} имеет вид: $z^n v$, где v – некоторое слово над X, возможно, пустое. Тогда применим соотношение (2) для тождества (II): $a = [x_{i_1}, x_{j_1}]u_1 ... [x_{i_{s_0-1}}, x_{j_{s_0-1}}]u_{s_0-1}$, $x = x_{i_{s_0}}$, $y = x_{j_{s_0}}$, $b = z$, $c = l_1(v)$, если v непусто, и $c = [x_{i_{s_0+1}}, x_{j_{s_0+1}}]$ в противном случае. Тогда элемент R будет представлен следующим образом:

$$R=\sum_{t=1}^{n-1}\beta_t z^{n-t}[x_{i_1},x_{j_1}]u_1...[x_{i_{s_0}},x_{j_{s_0}}]z^t v[x_{i_{s_0+1}},x_{j_{s_0+1}}]...[x_{i_r},x_{j_r}]$$

Так как $t<n$, то r-степень всех элементов правой части строго меньше r-степени R, ч.т.д.

Теперь покажем, что из этих свойств B следует, что модуль $[D(B),BK_BB]$ нетеров. Действительно, такой модуль может быть представлен следующей башней модулей: $BK_BB\supset BK_B^2+K_B^2B\supset K_B^3\supset...\supset K_B^{q+2}=0$. Свойства a), b), c), d) показывают, что каждый фактор-модуль данной башни является конечно-порожденным модулем. С другой стороны, следующие включения показывают, что K_B содержится в аннуляторе каждого из фактор-модулей:

$$K_B\cdot BK_BB\subset K_B^2B;BK_BB\cdot K_B\subset BK_B^2$$

$$K_B\cdot(BK_B^2+K_B^2B)\subset K_BBK_B^2+K_B^3B\subset K_B^3;$$

$$(BK_B^2+K_B^2B)\cdot K_B\subset BK_B^3+K_B^2BK_B\subset K_B^3$$

$$K_B\cdot K_B^r=K_B^r\cdot K_B\subset K_B^{r+1}.$$

Тогда по лемме 4 модуль $[D(B),BK_BB]$ является нетеровым. Этим теорема доказана.

5. Необходимые условия конечности типа

Лемма 5. *Пусть V – нетривиальное многообразие (т.е. отличное от* Ass*), тогда* $\mathrm{Id}_2(V)\neq 0$.

Доказательство. Поскольку V – нетривиальное многообразие, существует какое-либо нетривиальное тождество $f(x_1,...,x_r)$ выполняющееся в V. Выберем такое $L\geq 1$, что $2^L\geq r$, и тогда различных слов от переменных x,y длины L будет больше r. Занумеруем произвольные r таких различных слов: $u_1(x,y),...,u_r(x,y)$. Осуществим подстановку в $f: x_i\rightarrow u_i(x,y)$, она и даст искомое тождество $g(x,y)$ от двух переменных. Для того, чтобы показать, что это тождество нетривиально, достаточно проверить следующее: если два монома $v(x_1,...,x_r)=x_{i_1}...x_{i_s}$ и $w(x_1,..,x_r)=x_{j_1}...x_{j_t}$ были неподобны в f, то они останутся неподобными в g. Если бы длины мономов были различны, то и после подстановки они не могут совпасть, так как длина каждого монома увеличивается в L раз. Если длины были одинаковы, то найдется такое минимальное n, что $x_{i_n} \neq x_{j_n}$. Тогда после подстановки первые $(n-1) * L$ букв мономов совпадут, а подслова соответствующие x_{i_n} и x_{j_n} не совпадут, то есть мономы не будут подобны. Лемма доказана.

Многообразие всех ассоциативных алгебр Ass обладает свойством, что в нем не выполняется ни одного нетривиального тождества и все его идеалы тождеств $\mathrm{Id}_k(V)$ равны нулевому идеалу. Поэтому оно является многообразием конечного типа. В случае, если многообразие конечного типа отлично от привиального, то оказывается, что в нем выполняются некоторые тождества специального вида.

Предложение 2. *Если V – многообразие конечного типа над кольцом Λ, отличное от* Ass*, то в многообразии V выполняется тождество вида:*

$$\lambda x^m y^n + \sum_{i=1}^{s} u_i(x,y) = 0,$$

где $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, а $u_i(x,y)$ – мономы, неподобные $x^m y^n$.

Доказательство. По условию $\mathrm{Id}_2(V)$ – конечно порожденный идеал $F_2 = \langle x, y \rangle$. Поскольку $V \neq \mathrm{Ass}$, то идеал $\mathrm{Id}(V_2) \neq 0$ по лемме 5. Пусть $\mathrm{Id}_2(V) = (\psi_1, ..., \psi_k)$, где ψ_k – полиномы от некоммутирующих переменных. Обозначим через d наибольшее целое число такое, что x^d или y^d входит в один из мономов какого-либо из ψ_i. Рассмотрим нетривиальное тождество $\psi_1(x,y)$, и произведем в нем подстановку $x \to x^{d+1}$, $y \to y^{d+1}$, обозначим полученное тождество $f(x,y)$. Если взять любой моном $f(x,y)$, то любое его подслово вида $xy^q x$ или $yx^q y$ имеет степень $q > d$. Так как $\mathrm{Id}_2(V)$ конечно порожден и $f(x,y) \in V$, то

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{r} a_i(x,y)\psi_{m_i}(x,y)b_i(x,y), \tag{1}$$

причем не умаляя общности можно считать, что $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$ – мономы или пустые слова. Пусть $u(x,y)$ – некоторый моном $f(x,y)$. Тогда используя соотношение (1), можно утверждать, что существуют такие мономы $u_j(x,y)$, принадлежащие $\psi_{i_j}(x,y)$, или равные нулю, такие, что

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{r}a_i(x,y)u_i(x,y)b_i(x,y).$$

Однако, если моном $u_i(x,y)$ содержит xy^qx или yx^qy в качестве подслова, то и $u(x,y)$ содержит это же подслово. По выбору d, степень любого такого подслова в любом из мономов u_i не превышает d, следовательно, и $u(x,y)$ содержит подслово xy^qx или yx^qy степени q не выше d, что невозможно. Таким образом, ни один из мономов $u_i(x,y)$ не содержит подслова такого вида, следовательно, каждый из них имеет вид: $\lambda x^m y^n$ или $\lambda y^n x^m$ для некоторых $m,n\geq 0$, $m+n>0$. Поскольку все такие мономы не могут равняться нулю (тогда $u(x,u)=0$), то найдется такой $\psi_i(x,y)$, который содержит моном требуемого вида. По определению он принадлежит $\mathrm{Id}_2(V)$ и значит, выполняется в V как тождество.

Предложение 3. *Пусть V – многообразие конечного типа над кольцом Λ, отличное от* Ass. *Обозначим через $K_\infty=[F_\infty,F_\infty]$ коммутаторную алгебру. Если идеал тождеств $\mathrm{Id}(V)$ содержится в K_∞^2, то V не является многообразием конечного типа.*

Доказательство. Предположим противное: V – многообразие конечного типа. Тогда по предложению 2 в многообразии V должно быть выполнено нетривиальное тождество $f(x,y)=\lambda x^m y^n+\sum_{i=1}^{s}u_i(x,y)\in \mathrm{Id}(V)\subset K_\infty^2$. Пусть $F_\infty=\langle x_1,...,x_n,...\rangle$, тогда идеал K_∞^2 порождается элементами $[x_{i_1},x_{j_1}]u[x_{i_2},x_{j_2}]$, где u – произвольное слово от переменных $X=\{x_i|i\geq 1\}$. Тогда

$$f(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{r}a_k[x_{i_k},x_{j_k}]b_k[x_{p_k},x_{q_k}]c_k,$$

где a_k,b_k,c_k – мономы от переменных X. Не умаляя общности, можно считать, что в правой части участвуют только переменные x_1 и x_2 : для этого достаточно сделать подстановку $x_i\to 0$ при $i>2$. Тогда мы получим соотношение:

$$f(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{r}a_k(x_1,x_2)[x_1,x_2]b_k(x_1,x_2)[x_1,x_2]c_k(x_1,x_2).$$

Тогда существует такое k, что среди мономов, порожденных полиномом

$$a_k(x_1,x_2)[x_1,x_2]b_k(x_1,x_2)[x_1,x_2]c_k(x_1,x_2),$$

есть моном, подобный $\lambda {x_1}^m {x_2}^n$. Выпишем все мономы, получающиеся в результате раскрытия скобок в этом выражении:

$$\begin{array}{l} a_k(x_1,x_2)x_1x_2b_k(x_1,x_2)x_1x_2c_k(x_1,x_2), \\ a_k(x_1,x_2)x_1x_2b_k(x_1,x_2)x_2x_1c_k(x_1,x_2), \\ a_k(x_1,x_2)x_2x_1b_k(x_1,x_2)x_1x_2c_k(x_1,x_2), \\ a_k(x_1,x_2)x_2x_1b_k(x_1,x_2)x_2x_1c_k(x_1,x_2). \end{array}$$

Каждый из этих мономов содержит подслово вида $x_1ux_2vx_1$ или $x_2ux_1vx_2$, где u, v – какие-то слова от переменных x_1,x_2. Однако моном $\lambda {x_1}^m {x_2}^n$ не может содержать подслово такого вида. Тем самым получено противоречие, и теорема доказана.

Следствие 3. *Над любым коммутативным кольцом с единицей, стандартное тождество степени выше двух и тождество n-нильпотентности для $n \geq 2$ не являются тождествами конечного типа.*

Доказательство. Отметим, что идеал K^2_∞ является тождественным, то есть если какое-либо тождество содержится в нем, то там же содержатся и все его следствия.

1) Стандартное тождество S_n. То, что оно не является тождеством конечного типа при $n = 3$, вытекает из теоремы 1. Можно непосредственно проверить, что $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ выражается следующей формулой:

$$[x_1,x_2][x_3,x_4] - [x_1,x_3][x_2,x_4] + [x_1,x_4][x_2,x_3]$$

$$+[x_2,x_3][x_1,x_4] - [x_2,x_4][x_1,x_3] + [x_3,x_4][x_1,x_2].$$

Поэтому $S_4 \in K^2_\infty$, и значит, идеал тождеств, порожденный S_4, также содержится в K^2_∞. При $n \geq 4$ все мономы S_4 распадаются на непересекающиеся классы по следующему отношению эквивалентности: $u_1\sigma u_2$ если $l_{n-4}(u_1) = l_{n-4}(u_2)$, то есть первые $n-4$ буквы данных слов совпадают. Поскольку последние 4 буквы в одном классе пробегают все перестановки из четырех букв, то сумма элементов одного класса может быть представлена как: $vS_4(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$, где v – моном из $n-4$ букв, а x_{ij} различные буквы из $x_1, ..., x_n$. Так как $S_4 \in K^2_\infty$, то и $S_n \in K^2_\infty$.

Итак, идеал тождеств многообразия заданного S_n содержится в K^2_∞, и по предложению 3 данное тождество не является тождеством конечного типа.

2) Тождество

$$P(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_{n-1}) = [x_1,y_1]z_1[x_2,y_2]z_2...z_{n-1}[x_n,y_n]$$

лежит в K^2_∞ при $n \geq 2$, поэтому там же лежит и идеал тождеств многообразия, заданного тождеством P. Согласно предложению 3 такое многообразие не является многообразием конечного типа.

Следствие 4. *Многообразие, порожденное алгеброй матриц $M_n(\Lambda)$ над бесконечной областью целостности Λ с 1, не является многообразием конечного типа.*

Доказательство. Предположим, что это не так, тогда по предложению 1 в данном многообразии, а следовательно, и в алгебре $M_n(\Lambda)$ выполняется тождество вида $f(x,y) = \lambda x^m y^n + \sum_{i=1}^k u_i(x,y)$. Достаточно показать, что выполнимость такого тождества в $M_2(\Lambda)$ ведет к противоречию.

Так как Λ – область целостности, то $M_2(\Lambda)$ является алгеброй без кручения (над Λ). Хорошо известно, что идеал тождеств алгебры без кручения над бесконечным полем является однородным. Рассмотрим однородную компоненту тождества $f(x,y)$ по степени m по x и степени n по y, обозначим ее $f_0(x,y)$. Тогда $f_0(x,y) = \lambda x^m y^n + \sum_{i=1}^k v_i(x,y)$, где все мономы v_i содержат подслово yx (в противном случае моном должен иметь вид $\gamma x^k y^l$, что невозможно). Произведем подстановку:

$$x \to a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y \to b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

Непосредственным подсчетом проверяется, что a, b – идемпотенты и $ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $ba = 0$. Таким образом все мономы v_i обращаются в нуль и

$$f_0(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, такое тождество не может выполняться в $M_2(\Lambda)$, – противоречие получено.

Предложение 4. *Если V – нетривиальное многообразие конечного типа над бесконечным полем P, тогда в многообразии V выполняется нетривиальное тождество вида:*

$$\sum y^{m_i} x y^{n_i} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{Id}_2(V)$ как идеал $F_2 = \langle x, y\rangle$. По условию он порожден некоторыми элементами $\psi_1, ..., \psi_k$. Так как V нетривиально, то $\psi_i \neq 0$ для всякого i. Обозначим через d наибольшее целое k такое, что некоторый из ψ_i содержит моном вида uxy^dxv, где u,v – слова от x, y. Если такого k не существует, то будем считать $d = 0$. Докажем, что в многообразии V выполняется тождество $f(x, y)$ такое, что $\deg_x f(x, y) \leq 1$. Если степень ψ_1 по x больше 1, то произведем замену $x \to y^{d+1}xy^{d+1}$, обозначим результат через $g(x, y)$. Тогда все мономы $g(x, y)$ имеют такую же степень по x, как и соответствующие им мономы ψ_1, и значит, в $g(x, y)$ найдется моном степени выше 1 по x, обозначим его через $u(x, y)$. Тогда $u(x, y) = y^{n_1}xy^{n_2}x...xy^{n_s}$, где степени $n_i > d$. По условию

$$g(x, y) = \sum a_i(x, y)\psi_{m_i}(x, y)b_i(x, y),$$

где $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$ – мономы от x,y. Тогда существует такое i и моном $u_i(x, y)$ из $\psi_{m_i}(x, y)$, что моном $a_i(x, y)u_i(x, y)b_i(x, y)$ подобен $u(x, y)$. Если моном $u_i(x, y)$ содержит подслово вида xy^kx, то $k \geq d$, а $u(x, y)$ содержит подслова такого вида только при $k > d$, поэтому это невозможно. Таким образом, моном $u_i(x, y)$ должен иметь первую степень по x. Поскольку в бесконечном поле можно выделить любую однородную компоненту верного тождества и получить также верное тождество (в данном многообразии), то выделим однородную компоненту полинома ψ_{m_i} (или ψ_1) по x, в результате получим тождество требуемого вида. Оно является нетривиальным, так как нашелся хотя бы один ненулевой моном степени 1 по переменной x.

6. Структурные свойства многообразий конечного типа

Предложение 5. *Пусть V_1, V_2 – многообразия конечного типа над кольцом Λ, тогда $V_1 \cap V_2$ также является многообразием конечного типа.*

Доказательство. По замечанию 1.12 достаточно показать, что для всякого натурального n $\mathrm{Id}_n(V_1 \cap V_2)$ является конечно порожденным идеалом в F_n. Из пункта 1.11 следует, что $\mathrm{Id}_n(V_1 \cap V_2) = \mathrm{Id}_n(V_1) + \mathrm{Id}_n(V_2)$, и так как V_1, V_2 – многообразия конечного типа, то $\mathrm{Id}_n(V_1)$, $\mathrm{Id}_n(V_2)$ – конечно порожденные идеалы. Сумма конечно порожденных идеалов является конечно порожденным идеалом, поэтому $\mathrm{Id}_n(V_1 \cap V_2)$ конечно порожден.

Следствие 5. *Пусть* $X = (x_1, ..., x_m)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$, $X \cap Y = \emptyset$. *Если* $f(X)$, $g(Y)$ *– тождества конечного типа над кольцом* Λ, *тогда тождество* $f(X) + g(Y)$ *– тождество конечного типа.*

Доказательство. Доказывается непосредственно из предложения 5, используя свойства идеалов тождеств (1.11).

Предложение 6. *Пусть* V_1, V_2 *– многообразия над кольцом* Λ. *Если* $V_1 \cap V_2$ *и* $\langle V_1, V_2 \rangle$ *– многообразия конечного типа, то* V_1, V_2 *также многообразия конечного типа.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $m \geq 1$ и покажем, что $I_1 = \mathrm{Id}_m(V_1)$ и $I_2 = \mathrm{Id}_m(V_2)$ – конечно порожденные идеалы алгебры F_m. Обозначим $J = I_1 \cap I_2$, тогда по замечаниям 1.11, 1.12 $J = \mathrm{Id}_m(\langle V_1, V_2 \rangle)$, $I_1 + I_2 = \mathrm{Id}_m(V_1 \cap V_2)$ – конечно порожденные идеалы. Пусть $I_1 + I_2 = (\phi_1 + \psi_1, ..., \phi_s + \psi_s)$, где $\phi_i \in I_1$ и $\psi_i \in I_2$. Докажем, что образы ϕ_i при каноническом гомоморфизме $\pi : F_m \to F_m/J$ порождают I_1/J. Пусть $x \in I_1$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{s} a_i \phi_i b_i + \sum_{i=1}^{s} c_i \psi_i d_i,$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i \in F_m^{\#}$. Тогда $\sum_{i=1}^{s} a_i \phi_i b_i \in I_1$, откуда $\sum_{i=1}^{s} c_i \psi_i d_i = x - \sum_{i=1}^{s} a_i \phi_i b_i \in I_1$. С другой стороны, $\psi_i \in I_2$ и значит,

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \psi_i d_i \in I_1 \cap I_2 = J.$$

Таким образом, в алгебре F_m/J выполнено: $\overline{x} = \sum \sum_{i=1}^{s} \overline{a_i}\overline{\phi_i b_i}$, и $\overline{\phi_i}$ порождают I_1/J. Аналогично I_2/J конечно порожден, и по замечанию 1.8 получим, что I_1 и I_2 конечно порождены.

Предложение 7. *Пусть* Λ *– нетерово кольцо Джекобсона с 1. Тогда существуют многообразия* V_1, V_2, V_3 *над* Λ *такие, что* $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ *и* V_1, V_3 *– многообразия конечного типа, а* V_2 *– не конечного типа.*

Доказательство. Рассмотрим многообразия алгебр, заданные следующими системами тождеств:

$$V_1 = \{[x, y] = 0\}, \quad V_2 = \begin{cases} [a, b][c, d] = 0 \\ a[x, y]b = 0, \end{cases} \quad V_3 = \{a[x, y]c = 0\}.$$

То, что многообразие V_1 является многообразием конечного типа, следует из теоремы 1. Конечность типа многообразия V_3 вытекает из предложения 1. Многообразие V_2 имеет левую и правую нормальную характеристику равную нулю, а его нормальная характеристика равна 1, поэтому по теореме 1 оно не является многообразием конечного типа. То, что $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, проверяется непосредственно, так как базис тождеств V_i следует из базиса тождеств V_{i+1}.

Предложение 8. *Пусть Λ – нетерово кольцо Джекобсона с 1. Тогда существуют многообразия V_1, V_2, V_3 над Λ такие, что $V_1 \subset V_2 \subset V_3$ и V_1, V_3 – многообразия не конечного типа, а V_2 – конечного типа.*

Доказательство. Рассмотрим многообразия алгебр, заданные следующими системами тождеств:

$$V_1 = \{[a,b][x,y][c,d] = 0\}, \quad V_2 = \begin{cases} [a,b][x,y][c,d] = 0 \\ ab[x,y]c = 0 \\ a[x,y]bc = 0, \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{cases} [a,b][c,d] = 0 \\ a[x,y]b = 0 \end{cases}.$$

Непосредственно из определений проверяется, что $V_1 \subset V_2 \subset V_3$, так как базис тождеств V_i следует из базиса тождеств V_{i+1}. Из предложения 3 вытекает, что V_1 не является многообразием конечного типа. Из теоремы 2 следует, что V_2 является многообразием конечного типа. Многообразие V_3 имеет левую и правую нормальную характеристику равную нулю, а его нормальная характеристика равна 1, поэтому по теореме 1 оно не является многообразием конечного типа.

Предложение 9. *Если Λ – нетерово кольцо Джекобсона с 1, то существуют такие многообразия конечного типа V_1, V_2 над Λ, что многообразие, порожденное V_1 и V_2, не является многообразием конечного типа.*

Доказательство. Определим V_1 и V_2 как многообразия, заданные тождествами $a[x,y] = 0$ и $[x,y]a = 0$ соответственно. Тогда по теореме 1 оба многообразия обладают свойством конечности типа. Обозначим через K_∞ коммутаторную алгебру F_∞. Непосредственно проверяется, что $\nu_l(V_1) = 0$ и $\nu_r(V_2) = 0$, откуда следует, что $\mathrm{Id}(V_1) \subset F_\infty K_\infty$ и $\mathrm{Id}(V_2) \subset K_\infty F_\infty$(см. п. 1.13). Обозначим через V многообразие, порожденное V_1 и V_2, тогда $\mathrm{Id}(V) = \mathrm{Id}(V_1) \cap \mathrm{Id}(V_2)$ (см. п. 1.11). Следовательно, $\mathrm{Id}(V) \subset F_\infty K_\infty \cap K_\infty F_\infty$, а значит, $\nu_l(V) = \nu_r(V) = 0$. Однако, тождество $f(a,b,c) = a[b,c] - b[a,c] + c[a,b]$ выполняется в V. Действительно, очевидно, что оно является следствием тождества $a[x,y] = 0$ и значит, выполнено в V_1. С другой стороны, записав цепочку равенств:

$$\begin{aligned} f(a,b,c) = a[b,c] - b[a,c] + c[a,b] &= abc - acb - bac + bca + cab - cba \\ &= [a,b]c - [a,c]b + [b,c]a, \end{aligned}$$

получим, что оно также является следствием тождества $[x,y]a = 0$, то есть выполняется в V_2. Тогда, по определению V тождество $f(a,b,c)$ выполняется в V. Однако $\nu(f(a,b,c)) = 1$, а значит, и $\nu(V) = 1$, и по теореме 1 данное многообразие не является многообразием конечного типа.

7. Классификация

Полученные результаты позволят провести некоторую классификацию многообразий алгебр над произвольным полем P. Пусть дано некоторое многообразие алгебр V над P. Через K_∞ обозначим коммутаторную алгебру F_∞. Разбиение по случаям будет осуществляться на основе идеала тождеств многообразия V:

(1) $\mathrm{Id}(V) \not\subset F_\infty K_\infty \cap K_\infty F_\infty$ – V конечного типа;

(2) $\mathrm{Id}(V) \subset F_\infty K_\infty \cap K_\infty F_\infty$; $\mathrm{Id}(V) \not\subset F_\infty K_\infty F_\infty$ – V не конечного типа;

(3) $\mathrm{Id}(V) \subset F_\infty K_\infty F_\infty$;
   - (3.1) $\mathrm{Id}(V) \subset K_\infty^2$ – V не конечного типа;
   - (3.2) $\mathrm{Id}(V) \not\subset K_\infty^2$ – неизвестно.

Далее, опишем каждый из случаев более подробно:

(1) Данное условие на идеал тождеств равносильно тому, что $\nu_l(V)+\nu_r(V) \neq 0$ (см. 1.12), а в случае поля это равносильно тому, что $\nu_l(V) + \nu_r(V) = 1$. Тогда по теореме Кублановского многообразие является многообразием конечного типа.

(2) Условие $\mathrm{Id}(V) \not\subset F_\infty K_\infty F_\infty$ эквивалентно тому, что $\nu(V) \neq 0$ (см. 1.12), и так как многообразие над полем, то это равносильно $\nu(V) = 1$. С другой стороны, условие $\mathrm{Id}(V) \subset$

$F_\infty K_\infty \cap K_\infty F_\infty$ влечет $\nu_l(V)+\nu_r(V)=0$, тогда по критерию Кублановского многообразие V не является многообразием конечного типа.

(3.1) Предложение 3 показывает, что данное многообразие не является многообразием конечного типа.

(3.2) О таких многообразиях пока нет информации, кроме того, что среди многообразий, подпадающих под данный случай, есть как многообразия конечного типа, так и не конечного типа. Так, примером многообразия конечного типа является многообразие, заданное тождеством $a[x,y]b=0$ (см. следствие 2). Тождество не конечного типа, подходящее под данный случай приведено в доказательстве предложения 9 : $a[b,c]-b[a,c]+c[a,b]$. Его левая и правая нормальная характеристики равны нулю, а нормальная равна 1, следовательно, по теореме 1 данное тождество не является тождеством конечного типа.

Литература

1. В. Т. Марков, *О системах образующих T-идеалов конечно-порожденных свободных алгебр.* — Алгебра и Логика **18**, No. 5 (1979), 587–598.
2. С. И. Кублановский, *О многообразиях ассоциативных алгебр, с локальными условиями конечности.* — Алгебра и Логика **9**, No. 4 (1997), 119–174.
3. O. G. Kharlampovich and M. V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties.* — Internat. J. Algebra Comput. **5**, No. 4–5 (1995), 379–602. Алгебра и Логика **9**, No. 4 (1997), 119–174.
4. И. Херстейн, *Некоммутативные кольца.* Мир, М. (1972).
5. Н. Джекобсон, *Строение колец.* ИЛ., М. (1961).
6. С. И. Кублановский, *Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия ассоциативных колец и алгебр.* – Ленингр. гос. пед. ин-т., Л. (1982) (Рукопись деп. в ВИНИТИ No. 6143-82 Деп.).
7. Н. Бурбаки, *Многочлены и поля; упорядоченные группы.* Наука, М. (1966).

Vasiliev S. K. On identities and varieties of associative algebras of finite type.

Varieties, where each finitely generated relatively free algebra is finitely defined, are considered. Description of such varieties with identities is obtained and a number of their structural properties is found.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 6 декабря 2003 г.