Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 304, 2003 г.

К. В. Шахбазян, Ю. Г. Шукурян

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В EMSO ЯЗЫКОВ ОБЪЕКТОВ С СОБЫТИЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

Введение

При исследовании вычислительных процессов в распределенных системах особое место занимают вычисления в потоковых событийных структурах [1]. Задача верификации потоковых событийных структур приводит к задаче об определимости в экзистенциональной логике одноместных предикатов второго порядка (EMSO) множеств конфигураций этих структур или задаче распознаваемости их доказывающих последовательностей. А здесь для однородных структур центральным является вопрос о распознаваемости ациклических объектов, поскольку конфигурации являются ациклическими множествами.

В [2] были рассмотрены два известных формализма для описания поведения потоковых событийных структур: конфигурации (частично упорядоченные множества событий) и доказывающие последовательности событий. Там было показано, что языки бесконечных конфигураций в линейных однородных потоковых структурах EMSO-представимы. Там же было показано, что языки доказывающих последовательностей представимы некоторым классом формул логики Пресбургера, дополненной конечным множеством одноместных предикатов.

В настоящей работе продолжаются исследования однородных событийных структур, связанных с более сложными объектами, чем слова. Такими являются деревья и двумерные решетки над алфавитом A. С каждым таким объектом связывается его событийная структура: каждой букве $a \in A$ соотносится некоторая конечная событийная структура и с учетом однородных связей между "соседями", строится событийная структура целого объекта.

Язык объектов L разбивается на два языка: язык $L_{\text{ац}}$ объек-

---

Работа поддержана грантом INTAS "Weak Arithmetics" 001-447.

тов, событийная структура которых не содержит циклов, и язык $L_{\text{ц}}$ объектов событийная структура которых содержит циклы. Основная проблема, которая исследуется в настоящей работе, касается представимости указанных выше языков в логике EMSO в сигнатурах, соответствующих соответственно словам, деревьям и решеткам.

Показано, что для слов, сверхслов и конечных деревьев соответствующие языки представимы в EMSO. Для двумерных картинок со структурой, определяемой моношаблоном, т.е. таких, в которых каждой букве ставится в соответствие одно событие, класс циклических языков представим в EMSO. Относительно ациклических языков вопрос остается открытым.

Однако достаточно допустить существование хотя бы двух букв, состоящих из двух независимых событий, как класс циклических языков, определяемых такими шаблонами, становится непредставимым в EMSO.

1. Слова, деревья, картинки (двухмерные слова)

Пусть A - конечный алфавит. Ниже мы будем рассматривать слова, деревья и картинки над алфавитом A и соответственно языки слов, деревьев, картинок.

Приведем известные определения [3–5]:

1. Слово (или сверхслово) над алфавитом A есть отображение $p : \mathrm{dom}(p) \to A$, где $\mathrm{dom}(p) = \{1, 2, \dots\}$ – конечное (бесконечное) множество позиций в слове p. Слово p представляется структурой

$$\underline{p} = \langle \mathrm{dom}(p), S, <, \{Q_a(p)\}_{a \in A} \rangle,$$

где S – отношение $i\ S\ i+1$, $<$ - естественный порядок на $\mathrm{dom}(p)$, $Q_a(p) = \{i \in \mathrm{dom}(p) \mid p(i) = a\}$.

Универсальные языки слов и сверхслов над алфавитом A обозначаются соответственно A^* и A^ω. $\square$

2. Дерево (конечное или бесконечное) над алфавитом A есть отображение $p : \mathrm{dom}(p) \to A$, где $\mathrm{dom}(p)$ есть конечное или бесконечное множество вершин двоичного дерева, представленного множеством слов в алфавите $\{0, 1\}$, замкнутым относительно префиксов. Дерево p представляется структурой

$$\underline{p} = \langle \mathrm{dom}(p), S_1, S_2, <, \{Q_a(p)\}_{a \in A} \rangle,$$

где S_1 и S_2 - отношения левого и правого следования на $\mathrm{dom}(p)$: uS_1u0, uS_2u1 для всех $u \in \mathrm{dom}(p)$, кроме висячих вершин, $<$ - отношение следования вершин, определяемое префиксами, $Q_a(p) = \{i \in \mathrm{dom}(p) \mid p(i) = a\}$.

Универсальные языки конечных и бесконечных деревьев над алфавитом A обозначаются соответственно T_A и T_A^ω. $\square$

3. Конечная картинка над алфавитом A есть отображение $p : \mathrm{dom}(p) \to A$, где $\mathrm{dom}(p) = \{1, 2, \ldots, l_1(p)\} \times \{1, 2, \ldots, l_2(p)\}$. Картинка p представляется структурой

$$\underline{p} =< \mathrm{dom}(p), S_1, S_2, \{Q_a(p)\}_{a\in A} >,$$

где S_1 и S_2 - отношения следования на $\mathrm{dom}(p)$, так что $(i, j)\ S_1\ (i+1, j)$, $1 \le i \le l_1(p) - 1$, $1 \le j \le l_2(p)$, $(i, j)\ S_2\ (i, j + 1)$, $1 \le i \le l_1(p)$, $1 \le j \le l_2(p) - 1$, $Q_a(p) = \{(i, j) \mid p(i, j) = a\}$.

Пара $(l_1(p), l_2(p))$ называется размером картинки p.

Универсальный язык конечных картинок над алфавитом A обозначается A^{**}. $\square$

Далее под словом “объект” мы будем иметь ввиду либо слово (сверхслово), либо дерево (конечное или бесконечное), либо конечную картинку.

2. Событийная структура объектов

В дальнейших рассмотрениях объекты над конечным алфавитом A наделяются событийными структурами. Событийная структура объекта p (точное определение следует ниже) над конечным алфавитом событий Σ порождается заданным шаблоном следующим образом:

1. Шаблон ставит в соответствие каждой букве $a \in A$ некоторое конечное подмножество $\Sigma_a \subseteq \Sigma$ событий и бинарное отношение частичного порядка ε_a на множестве Σ_a. При этом каждому вхождению в объект p буквы a в позиции $\alpha \in \mathrm{dom}(p)$ ставится в соответствие множество $\Sigma_a^\alpha = \{\sigma^\alpha \mid \sigma \in \Sigma_a\}$ событий, помеченных позицией α. Заметим, что множества событий, соответствующие разным вхождениям букв в p, не пересекаются. Множествам событий Σ_a^α, соответствующим каждому вхождению буквы $a \in A$ в объект p, присваивается частичный порядок, изоморфный ε_a. Объединение этих множеств является множеством событий объекта p.

2. Шаблон задает отношения связи $\psi_i(a,b)$ между событиями множеств Σ_a и Σ_b. Если $a,b \in A$, $p(\alpha) = a$, $p(\alpha') = b$ и $\alpha S_i \alpha'$, т.е. a,b- соседние буквы объекта p, то отношение, связывающее события этой пары букв, изоморфно $\psi_i(a,b)$.

3. Событийная структура объекта p есть граф $V(p) = (E(p), \Phi(p))$, построенный на множестве всех событий $E(p) = \bigcup\limits_{a\in A} \bigcup\limits_{\alpha \in Q_a(p)} \Sigma_a^\alpha$ и содержащий отношения, перечисленные в пунктах 1 и 2.

Определение 1. *Шаблоном над алфавитами A и Σ называется набор*

$$\langle \Sigma, \{\Sigma_a\}_{a\in A}, \{\varepsilon_a\}_{a\in A}, \{\psi_i(a,b)\}_{a,b\in A,\ i=1,\dots,n} \rangle,$$

где Σ – конечный алфавит событий, $\Sigma_a \subseteq \Sigma$ – множество событий, соответствующих букве $a \in A$, $\varepsilon_a \subseteq \Sigma_a \times \Sigma_a$ – отношение частичного порядка, соответствующее букве $a \in A$, $\psi_i(a,b) \subseteq (\Sigma_a \times \Sigma_b) \cup (\Sigma_b \times \Sigma_a)$ – отношение связи между событиями букв a и $b \in A$, соответствующее следованию aS_ib. Здесь n (количество отношений ψ_i) равно количеству отношений следования, входящих в структуру $\underline{p}$ объекта p. Для рассматриваемых нами объектов: $n = 1$ для слов, $n = 2$ для деревьев и картинок. $\square$

Определение 2. *Событийная структура объекта $p : \mathrm{dom}(p) \to A$ есть граф $V_\Pi(p) = (E_\Pi(p), \Phi_\Pi(p))$, определяемый шаблоном Π:*

$$\Pi = \langle \Sigma, \{\Sigma_a\}_{a\in A}, \{\varepsilon_a\}_{a\in A}, \{\psi_i(a,b)\}_{a,b\in A,\ i=1,\dots,n} \rangle,$$

$$E_\Pi(p) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\alpha\in Q_a(p)} \Sigma_a^\alpha \text{ – \textit{множество вершин графа},}$$

$$\Phi_\Pi(p) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\alpha\in Q_a(p)} \varepsilon_a^\alpha \ \cup \ \bigcup_{n=1}^{n} \bigcup_{\alpha S_i \beta, \alpha\in Q_a(p), \beta\in Q_b(p)} \psi_i^{\alpha,\beta}(a,b)$$

– множество ориентированных дуг графа. $\square$

При записи этих формул были использованы следующие обозначения (ими будем пользоваться и ниже):

$\Sigma_a^\alpha \underset{\mathrm{def}}{=} \{\sigma^\alpha \mid \sigma \in \Sigma_a, \alpha \in Q_a(p)\}$ - множество событий Σ_a, снабженных верхним индексом α.

$\varepsilon_a^\alpha \underset{\mathrm{def}}{=} \{(\sigma_1^\alpha, \sigma_2^\alpha) \mid (\sigma_1, \sigma_2) \in \varepsilon_a\}$ – отношение на Σ_a^α, изоморфное ε_a.

$\psi_i^{\alpha,\beta}(a,b) \subseteq (\Sigma_a^\alpha \times \Sigma_b^\beta) \cup (\Sigma_b^\beta \times \Sigma_a^\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, где $\psi_i^{\alpha,\beta}(a,b) \underset{\text{def}}{=} \{(\sigma_1^\alpha, \sigma_2^\beta) \mid \sigma_1 \in \Sigma_a, \sigma_2 \in \Sigma_b, (\sigma_1, \sigma_2) \in \psi_i(a,b)\} \cup$ $\cup\ \{(\sigma_1^\beta, \sigma_2^\alpha) \mid \sigma_1 \in \Sigma_b, \sigma_2 \in \Sigma_a, (\sigma_1, \sigma_2) \in \psi_i(a,b)\}$ – отношение, изоморфное $\psi_i(a,b)$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех шаблонов над алфавитом A.

Мы будем далее рассматривать языки объектов над конечным алфавитом A, предполагая, что задан шаблон $\Pi \in \mathcal{P}$, который с каждым объектом p связывает его событийную структуру $V_\Pi(p)$. Любой универсальный язык L заданием шаблона $\Pi \in \mathcal{P}$ разбивается на два языка

$$L_{\text{ц}}(\Pi) = \{p \mid p \in L, V_\Pi(p) \text{ содержит цикл}\}$$

$$L_{\text{ац}}(\Pi) = \{p \mid p \in L, V_\Pi(p) \text{ не содержит цикла}\}$$

Нас интересует представимость в EMSO классов $\mathcal{L}_{\text{ц}}(L) = \{L_{\text{ц}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$ и $\mathcal{L}_{\text{ц}}(L) = \{L_{\text{ац}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$.

3. Языки слов

Пусть задан алфавит A и шаблон

$$\Pi = \langle \Sigma, \{\Sigma_a\}_{a \in A}, \{\varepsilon_a\}_{a \in A}, \{\psi(a,b)\}_{a,b \in A} \rangle.$$

Рассмотрим универсальный язык слов (сверхслов) A^* (соответственно A^ω) и шаблон Π. Тогда

$$A^* = A^*_{\text{ц}}(\Pi) \cup A^*_{\text{ац}}(\Pi) (\text{соответственно } A^\omega = A^\omega_{\text{ц}}(\Pi) \cup A^\omega_{\text{ац}}(\Pi)),$$

где

$$A^*_{\text{ц}}(\Pi) = \{p \mid p \in A^*, V_\Pi(p) \text{ содержит цикл}\}$$

$$A^*_{\text{ац}}(\Pi) = \{p \mid p \in A^*, V_\Pi(p) \text{ не содержит цикла}\}$$

(аналогично для сверхслов).

Определим классы языков

$$\mathcal{L}_{\text{ц}}(A^*) = \{A^*_{\text{ц}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{ац}}(A^*) = \{A^*_{\text{ац}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$$

(аналогично – $\mathcal{L}_{\text{ц}}(A^\omega)$ и $\mathcal{L}_{\text{ац}}(A^\omega)$).

Теорема 1. *Классы языков $\mathcal{L}_{ц}(A^*)$, $\mathcal{L}_{ац}(A^*)$, $\mathcal{L}_{ц}(A^\omega)$, $\mathcal{L}_{ац}(A^\omega)$ представимы в EMSO [S].*

Доказательство. Докажем, что для каждого шаблона $\Pi \in \mathcal{P}$ языки $A^*_{ц}(\Pi)$ и $A^*_{ац}(\Pi)$ распознаваемы конечным автоматом. [3]

Построим автомат, распознающий $A^*_{ц}(\Pi)$. Для этого покажем, что для каждого конечного слова $p = p(0)p(1)\dots p(n) \in A^*$ существует последовательность отношений $\tau_0, \tau_1 \dots, \tau_n$ таких, что

1) τ_i задано на $\Sigma^i_{p(i)}$ для $i = 0, \dots, n$;

2) отношение $\Phi_\Pi(p)$ содержит цикл тогда и только тогда, когда содержит цикл хотя бы одно из отношений $\tau_0, \tau_1 \dots, \tau_n$.

Построим последовательность:

$$\tau_0 = \varepsilon^0_{p(0)}$$
$$\tau_1 = [\tau_0 \cup \psi^{0,1}(p(0), p(1)) \cup \varepsilon^1_{p(1)}]^* \;/\; \Sigma^1_{p(1)}$$
$$\tau_2 = [\tau_1 \cup \psi^{1,2}(p(1), p(2)) \cup \varepsilon^2_{p(2)}]^* \;/\; \Sigma^2_{p(2)}$$
$$- -$$
$$\tau_n = [\tau_{n-1} \cup \psi^{n-1,n}(p(n-1), p(n)) \cup \varepsilon^n_{p(n)}]^* \;/\; \Sigma^n_{p(n)}$$

(Здесь и далее φ^* – транзитивное замыкание отношения φ. Для произвольного отношения φ, заданного на множестве M, и произвольного $M_1 \subseteq M$ через $\varphi \;/\; M_1$ обозначается ограничение отношения φ на M_1.)

Очевидно, что построенная последовательность - искомая. Заметим, что число возможных попарно не изоморфных отношений τ конечно.

Построим теперь конечный детерминированный автомат $\mathcal{A}(\Pi)$, распознающий язык $A^*_{ц}(\Pi)$. Определим множество Q внутренних состояний $\mathcal{A}(\Pi)$:

$$Q = \{(\Sigma_a, \gamma) \mid a \in A,\ \varepsilon_\alpha \subseteq \gamma,\ \gamma \subseteq \Sigma_a \times \Sigma_a \text{ – ациклическое отношение}\} \cup \{q_0, q_f\}.$$

$q_0 = (\emptyset, \emptyset)$ – начальное состояние, q_f - финальное состояние.

Функцию переходов Δ определим так: $\Delta(q_f, a) = q_f$ - для всех $a \in A$;

$$\Delta((\Sigma_a, \gamma), b) = \begin{cases} J([\gamma^0 \cup \psi^{0,1}(a,b) \cup \varepsilon^1_b]^* / \Sigma^1_b) \text{ , если отношение} \\ [\gamma^0 \cup \psi^{0,1}(a,b) \cup \varepsilon^1_b]^* / \Sigma^1_b \text{ – ациклическое,} \\ q_f \text{ – в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь J – операция снятия верхних индексов. Тогда $\mathcal{A}(\Pi) = (Q, A, q_0, \Delta, q_f)$. Очевидно, что $\mathcal{A}(\Pi)$ по произвольному слову $p = p(0), \dots, p(n)$ вычисляет последовательность отношений $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $(k \leq n)$, изоморфных соответственно отношениям $\tau_0, \tau_1 \dots, \tau_k$, где либо $k < n$ и $\tau_0, \tau_1 \dots, \tau_k$ не содержат цикл, а τ_{k+1} содержит цикл, либо $k = n$ и все τ_i цикла не содержат. Следовательно, наше утверждение верно для $A^*_{\text{ц}}(\Pi)$ и его дополнения $A^*_{\text{ац}}(\Pi)$.

Конечный детерминированный ω – автомат Бюхи, распознающий язык $A^{\omega}_{\text{ац}}(\Pi)$ представляется как $\mathcal{A}^{\omega}_{\text{ац}}(\Pi) = (Q, A, q_0, \Delta, F_{\text{ац}})$, где $F_{\text{ац}} = Q \setminus \{q_0, q_f\}$. Автомат, распознающий язык $A^{\omega}_{\text{ц}}(\Pi)$ есть $\mathcal{A}^{\omega}_{\text{ц}}(\Pi) = (Q, A, q_0, \Delta, F_{\text{ц}})$, где $F_{\text{ц}} = \{q_f\}$. $\square$

4. Языки деревьев

Рассмотрим универсальный язык T_A деревьев над алфавитом A и произвольный шаблон Π:

$$\Pi = \langle \Sigma, \{\Sigma_a\}_{a \in A}, \{\varepsilon_a\}_{a \in A}, \{\psi_1(a,b)\}_{a,b \in A}, \{\psi_2(a,b)\}_{a,b \in A} \rangle.$$

Тогда положим:

$$T_A = T_{\text{ц}}(\Pi) \cup T_{\text{ц}}(\Pi)$$

$$T_{\text{ц}}(\Pi) = \{p \mid p \in T_A, V_{\Pi}(p) \text{ содержит цикл}\}$$

$$T_{\text{ац}}(\Pi) = \{p \mid p \in T_A, V_{\Pi}(p) \text{ не содержит цикла}\}$$

Определим классы языков:

$$\mathcal{L}_{\text{ц}}(T_A) = \{T_{\text{ц}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{ац}}(T_A) = \{T_{\text{ац}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}$$

(аналогично – для $\mathcal{L}_{\text{ц}}(T^{\omega}_A)$ и $\mathcal{L}_{\text{ац}}(T^{\omega}_A)$ – для бесконечных деревьев).

Теорема 2. *Классы языков $\mathcal{L}_{\text{ц}}(T_A)$, и $\mathcal{L}_{\text{ац}}(T_A)$, представимы в EMSO $[S_1, S_2]$.*

Доказательство. Докажем, что для каждого шаблона Π языки $T_{\text{ц}}(\Pi)$ и $T_{\text{ац}}(\Pi)$ распознаваемы конечным детерминированным древесным автоматом с направлением просмотра от листьев к корню дерева.

Пусть задан шаблон Π и конечное дерево p, размеченное буквами алфавита A. Покажем, что для p существует разметка μ, ставящая в соответствие каждой вершине $u \in \mathrm{dom}(p)$ отношение $\mu(u)$ на множестве $\Sigma^u_{p(u)}$ такое, что $V_\Pi(p)$ содержит цикл тогда и только тогда, когда хотя бы одно из $\mu(u)$ содержит цикл.

Действительно, построим разметку μ, начиная с висячих вершин дерева. Если u - висячая вершина, то $\mu(u) = [\varepsilon^u_{p(u)}]^*$. Если $u, u0, u1 \in \mathrm{dom}(p)$ и уже построены $\mu(u0)$ и $\mu(u1)$, то

$$\mu(u)=[\mu(u0)\cup\mu(u1)\cup\varepsilon^u_{p(u)}\cup\psi_1^{u,u0}(p(u),p(u0))\cup\psi_2^{u,u1}(p(u),p(u1))]^*/\Sigma^u_{p(u)}.$$

Процесс продолжается до корня дерева λ (пустого слова). Очевидно, что $\mu(u)$ - искомая разметка и что число попарно неизоморфных отношений $\mu(u)$ конечно.

Построим теперь конечный, детерминированный автомат $\mathcal{A}_ц(\Pi)=(Q,A,q_0,\Delta,F_ц)$, вычисляющий указанную разметку μ для произвольного конечного дерева p над алфавитом A.

Определим множество Q внутренних состояний автомата $\mathcal{A}_ц(\Pi)$, как множество всех ациклических отношений, заданных на множествах Σ_a, дополненное начальным и финальным состояниями:

$Q = \{(a,\gamma\ )|\ \gamma \subseteq \Sigma_a \times \Sigma_a\ ;\ \gamma$ – ациклическое отношение, $a \in A\} \cup \{q_0, q_f\}$,

$q_0 = \emptyset$,

q_f – финальное состояние, $F_ц = \{q_f\}$.

Определим множество переходов $\Delta \subseteq Q \times Q \times A \times Q$.

Для этого определим сначала функцию $\delta : Q \times Q \times A \to Q$.

Если $q_1 = (a_1,\gamma_1)$, $q_2 = (a_2,\gamma_2)$, то $\delta(q_1,q_2,a) = (a,\phi(q_1,q_2,a))$, где

$$\phi(q_1,q_2,a) = J\{[\gamma_1^1 \cup \gamma_2^2 \cup \varepsilon_a^0 \cup \psi^{0,1}(a,a_1) \cup \psi^{0,2}(a,a_2)]^*/\Sigma_a^0\}$$

Тогда

$\Delta = \{(q_1,q_2,a,q)\ |\ a \in A,\ q_1,q_2,q = \delta(q_1,q_2,a)) \in Q \setminus \{q_f\}$,
 если $\phi(q_1,q_2,a)$ не содержит цикла$\}\cup$
$\cup\{(q_1,q_2,a,q_f)\ |\ a \in A,\ q_1,q_2 \in Q \setminus \{q_f\}$, если $\phi(q_1,q_2,a)$
 содержит цикл$\}\cup$
$\cup\{(q_f,q,a,q_f)\ |\ a \in A, q \in Q\} \cup \{(q,q_f,a,q_f)\ |\ a \in A, q \in Q\} \cup \{(q_0,q_0,a,(a,\epsilon_a))\ |a \in A\}$.

Запуск автомата $\mathcal{A}_ц(\Pi)$ определяется канонически как отображение $q : \mathrm{dom}(p) \to Q$, инициализируемое на листе u с меткой a согласно переходу $(q_0,q_0,a,(a,\varepsilon_a))$, который приводит к присвоению $q(u) = (a,\varepsilon_a)$. Запуск успешен, если $q(\lambda) = q_f$.

Очевидно, что для каждого шаблона $\Pi \in \mathcal{P}$ язык $T_{\text{ац}}(\Pi)$ также распознаваем конечным автоматом $\mathcal{A}_{\text{ац}}(\Pi)$, который отличается от $\mathcal{A}_{\text{ц}}(\Pi)$ множеством заключительных состояний: $F_{\text{ац}} = Q \setminus \{q_f\}$. $\square$

Для языков бесконечных деревьев рассмотрим автомат Рабина, распознающий язык $T^{\omega}_{\text{ац}}(A)$.

Множество состояний автомата $\mathcal{A}^{\omega} = (Q, A, q_0, \Delta, Acc)$ есть

$Q = \{(a,\gamma) \mid a \in A,\ \gamma \subseteq \Sigma_a \times \Sigma_a,\ \varepsilon_a \subseteq \gamma\} \ \cup\ \{q_0, q_c\}$.

Множество переходов:

$$\begin{gathered}\Delta = \{(q_0, a, (a,\gamma), (a,\gamma)) \mid a \in A,\ \gamma \subseteq \Sigma_a \times \Sigma_a, \varepsilon_a \subseteq \gamma, \} \cup \\ \cup \ \{((a,\gamma), a, (a_1,\gamma_1), (a_2,\gamma_2)) \mid \delta((a_1,\gamma_1),(a_2,\gamma_2),a) = (a,\gamma)\ , \\ \gamma \text{ не имеет цикла}\} \cup \\ \cup \ \{((a,\gamma), a, q_c, q_c) \mid \gamma \text{ имеет цикл}\} \cup \\ \cup \ \{(q_c, a, q_c, q_c)\}_{a \in A}\end{gathered}$$

Запуск ρ инициализируется для корня λ, помеченного a, с помощью перехода $(q_0, a, (a,\gamma), a, \gamma)$, который приводит к присвоению $\rho(\lambda) = (a,\gamma)$. (Напомним, что запуск автомата на дереве p есть дерево ρ, удовлетворяющее условиям $(\rho(u), p(u), \rho(u0), \rho(u1)) \in \Delta$ для $u \in \{0,1\}^{\omega}$).

В качестве условия допустимости для языка $T^{\omega}_{\text{ац}}(A)$ примем условие Рабина Acc :

$$In(\rho) \cap \{q_c\} = \emptyset, \quad In(\rho) \cap \{(a,\gamma) \mid \gamma \text{ не содержит цикла}\} \neq \emptyset.$$

Здесь $In(\rho) = \{q \in Q \mid \exists^{\omega} i : \rho(i) = q\}$.

Для автоматов Рабина имеет место теорема комплементации. Поэтому существует автомат Рабина, распознающий язык $T^{\omega}_{\text{ац}}(A)$ и классы языков $\mathcal{L}_{\text{ц}}(T^{\omega}_A)$ и $\mathcal{L}_{\text{ац}}(T^{\omega}_A)$ определимы в MSO.

5. Картинки

Рассмотрим язык A^{**} (язык двухмерных картинок) и произвольный шаблон Π. Тогда имеем

$$A^{**} = A^{**}_{\text{ц}}(\Pi) \cup A^{**}_{\text{ац}}(\Pi),$$

$$A^{**}_{\text{ц}}(\Pi) = \{p \mid p \in A^{**}, V_{\Pi}(p) \text{ содержит цикл}\},$$

$$A^{**}_{\text{ац}}(\Pi) = \{p \mid p \in A^{**}, V_{\Pi}(p) \text{ не содержит цикла}\},$$

и классы языков

$$\mathcal{L}_{\text{ц}}(A^{**}) = \{A^{**}_{\text{ц}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}},$$

$$\mathcal{L}_{\text{ац}}(A^{**}) = \{A^{**}_{\text{ац}}(\Pi)\}_{\Pi \in \mathcal{P}}.$$

Сначала рассмотрим картинки с моношаблонами.

Теорема 3. *Класс языков* $\mathcal{L}^1_{\text{ц}}(A^{**}) = \{A^{**}_{\text{ц}}(\Pi) \mid \Pi$- *моношаблон*$\}$ *представим в* EMSO$[S_1, S_2]$.

Доказательство. Пусть задан алфавит A и моношаблон

$$\Pi = \langle \Sigma, \{\Sigma_a\}, \{Q_a\}, \psi_1, \psi_2 \rangle,$$

т.е.

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, \Sigma_{a_i} = \{a_i\}, \quad \varepsilon_{a_i} = \emptyset.$$

Для каждого a_i $(i = 1, \ldots, n)$ определим множества $\mu_{in}(a_i) = \{a_j \mid (a_j, a_i) \in \psi_1(a_j, a_i) \cup \psi_1(a_i, a_j) \cup \psi_2(a_j, a_i) \cup \psi_2(a_i, a_j)\}$

$\mu_{out}(a_i) = \{a_j \mid (a_i, a_j) \in \psi_1(a_j, a_i) \cup \psi_1(a_i, a_j) \cup \psi_2(a_j, a_i) \cup \psi_2(a_i, a_j)\}$

Заметим теперь, что картинка $p \in A^{**}$ содержит цикл тогда и только тогда, когда существует множество позиций X такое, что среди соседей каждой позиции $(i, j) \in X$, содержащей букву a_i, существуют позиции (i', j') и $(i'', j'') \in X$ такие, что (i', j') содержит букву из $\mu_{in}(a_i)$, а позиция (i'', j'') содержит букву из $\mu_{out}(a_i)$. (Соседями позиции (i, j) мы называем позиции $(i+1, j), (i-1, j), (i, j-1), (i, j+1)$).

Запишем сформулированное условие в виде формулы EMSO.

Сперва запишем предикат "позиция y является соседом позиции x". Из определения соседа следует, что предикат "y - сосед x" выражается формулой: y - сосед $x = yS_1x \vee xS_1y \vee yS_2x \vee xS_2y$. И окончательно предикат "p содержит цикл" представляется так:

p содержит цикл $= \exists X \forall x \; X(x) \Rightarrow (\; \exists \; z, y \; (\; X(z) \; \wedge \; X(y) \; \wedge$ z - сосед $x \; \wedge \; \wedge \; y$ - сосед $x \; \wedge \; (\bigvee_{a' \in A} \; x \in Q_{a'} \Rightarrow ([\bigvee_{a \in \mu_{in}(a')} \; y \in Q_a \;] \; \wedge \; [\bigvee_{a \in \mu_{out}(a')} \; z \in Q_a \;]))).$ $\square$

Вопрос о представимости в EMSO$[S_1, S_2]$ класса языков

$$\mathcal{L}^1_{\text{ац}}(A^{**}) = \{A^{**}_{\text{ац}}(\Pi) \mid \Pi\text{- моношаблон}\}$$

остается открытым.

Будем далее рассматривать такие шаблоны, в которых каждая буква $a \in A$ содержит не более двух независимых событий, т.е. $a \in A \Rightarrow |\Sigma_a| \leq 2$ и при этом $a \in A \Rightarrow \varepsilon_a = \emptyset$. Такие шаблоны будем называть двухсобытийными.

Теорема 4. *Класс двухмерных языков $\mathcal{L}_{\text{ц}}(A^{**})$ не представим в EMSO:*

$$\mathcal{L}_{\text{ц}}(A^{**}) \not\subseteq \mathcal{L}(\mathit{EMSO})$$

Доказательство. Докажем, что существует алфавит A и двухсобытийный шаблон Π_2 над алфавитом A такие, что язык $A^{**}_{\text{ц}}(\Pi_2)$ нераспознаваем тайлинговой системой.

Необходимым условием распознаваемости произвольного языка L тайлинговой системой является существование такой константы $c > 0$, что число $f_L(k,r)$ классов синтаксической конгруэнции для картинок размера $(k \times r)$ при всех k и r удовлетворяет неравенству

$$f_L(k,r) \leq c^{k+r}. \tag{1}$$

Оценим снизу значения функции $f_{A^{**}_{\text{ц}}(\Pi_2)}(k,r)$. Очевидно, что все $(k \times r)$ картинки, содержащие цикл, составляют один класс синтаксической конгруэнции. Остальные классы состоят из ациклических картинок.

Если A и Π_2 таковы, что A содержит две однособытийные буквы x, y (т.е. $\Sigma_x = \{x\}, \Sigma_y = \{y\}$), то язык $A^{**}(\Pi_2)$ содержит, в частности, картинки p, окаймленные однособытийными буквами x, y. Каждой такой картинке p сопоставим отношение $\xi(p)$, указывающее на наличие пути между окаймляющими буквами.

Легко видеть, что число классов синтаксической конгруэнции для картинок размера (k,r) будет не менее числа ациклических картинок $p \in A^{**}(\Pi_2)$ с попарно различными множествами $\xi(p)$.

Достаточно ограничиться рассмотрением (n,n) картинок, у которых первая строка заполнена буквами x, а в позициях $(2,1),\ldots,(n,1)$ первого столбца стоят буквы y ,причем достаточно ограничиться рассмотрением только путей из y в x, т.е. путей, ведущих из $(i,1)$ в $(1,j)$, где $2 \leq i,j \leq n$. Тогда

$$\xi(p) = \{(i,j) \mid 2 \leq i,j \leq n, V(p) \text{ содержит путь из } (i,1) \text{ в } (1,j)\}.$$

Укажем теперь алфавит A и двухсобытийный шаблон Π_2, при котором в $A^{**}(\Pi_2)$ входят не менее $2^{(n-1)^2}$ ациклических (n,n) картинок с попарно различными отношениями $\xi(p)$.

Положим:

$A \supseteq \{x, y, a, b\}$, $\Sigma \supseteq \{x, y, z\}$.

$\Sigma_x = \{x\}$, $\Sigma_y = \{y\}$, $\Sigma_a = \{x, y\}$, $\Sigma_b = \{x, z\}$.

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_a = \varepsilon_b = \emptyset$.

Отношения связи ψ_1 и ψ_2 между соседними буквами зададим в виде соответствующих списков домино, содержащих события и стрелки. Если какая-либо пара букв a и b не входит в список ψ_i, то это означает, что $\psi_i(a, b) = \emptyset$.

$$\Psi_1 = \left\{ \boxed{y \,|\!\!\to yx}, \boxed{y \,|\!\!\to zx}, \boxed{xy \,|\!\!\to yx}, \boxed{xy \,|\!\!\to xz}, \boxed{xz \,|\!\!\to yx}, \boxed{xz \,|\!\!\to zx}, \right\}$$

$$\Psi_2 = \left\{ \boxed{\begin{array}{c} x \\ \uparrow\nwarrow \\ \hline x \; y \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} x \\ \uparrow \\ \hline x \; z \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} x \; z \\ \uparrow\nwarrow \\ \hline x \; y \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} x \; z \\ \uparrow \\ \hline x \; z \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} x \; y \\ \uparrow\nwarrow \\ \hline x \; y \end{array}}, \boxed{\begin{array}{c} x \; y \\ \uparrow \\ \hline x \; z \end{array}} \right\}$$

Пример на рис. 1 показывает одну из ациклических (n, n) картинок с $\xi(p) = \{((2, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\}$.

Каждому отношению $\xi \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{2, \dots, n\}$ может быть поставлена в соответствие ациклическая (n, n) картинка $p(\xi)$:

$p(1, j) = x$ для $j = 1, \dots, n$.

$p(i, 1) = y$ для $i = 1, \dots, n$.

если $(i, j) \notin \xi$, то $p(i, j) = a$

если $(i, j) \in \xi$, то $p(i, j) = b$

Следовательно, число ациклических картинок с различными $\xi(p)$ есть $2^{(n-1)^2}$, что и доказывает утверждение. $\square$

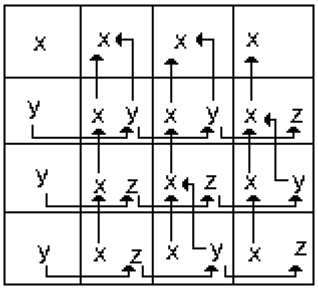

Рис. 1.

Литература

1. G. Winskel, M. Nielsen, *Models for concurrency*. Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 4, Oxford Univ. Press (1995).
2. K. V. Shakhbazyan, Yu. H. Shoukourian, *Logically Definable Languages of Computations in One Class of Flow Event Structures*. 3. W.Thomas. Languages, Automata, and Logic, In G.Rozenberg and A.Salomaa, eds. Handbook of Formal Languages, v. III, p.389-455, Springer, N.Y., 1997.
4. D. Giammarresi, A. Restivo, *Two-dimensional Languages*. Formal Language Theory, Vol. III, Springer-Verlag, New York (1996).
5. W. Thomas, *Languages, Automata and Logic*. Bericht 9607, Institute fuer Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universitaet zu Kiel, D-24098, Kiel.

Shahbazyan K. V., Shoukourian Yu. G. EMSO-definability of some event structure languages.

The languages of words, trees and pictures with related event structures are considered. The problem of EMSO-definability of cyclic and acyclic languages of these event structures is investigated.

Институт Проблем
Информатики и Автоматизации
Национальной Академии Наук Армении

Поступило 22 апреля 2003 г.