Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

Д. С. Челкак

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВОЗМУЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛОМ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

§1. Введение

Рассмотрим квантово-механический гармонический осциллятор $T^0y=-y''+x^2y$, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что спектр оператора T^0 чисто дискретен и состоит из простых собственных значений $\lambda_n^0 = 2n+1$, $n \geqslant 0$. При этом соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_n^0(x) \equiv (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где через $H_n(x)$ мы обозначаем n-й полином Эрмита ($H_0(x)\equiv 1$, $H_1(x)\equiv 2x$, ...). Положим

$$T^q y = -y'' + x^2 y + q(x)y.$$

При весьма слабых ограничениях на потенциал q спектр оператора T^q также чисто дискретен и состоит из простых **собственных значений**

$$\lambda_0(q) < \lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots .$$

Обозначим через $\psi_n(x,q)$ соответствующие собственные функции. Следуя работе [1] (и по аналогии с монографией [2]), мы вводим **нормирующие постоянные**

$$\nu_n(q) = \lim_{x\uparrow\infty} \log\left|\frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right| = \lim_{x\uparrow\infty} \log\left[(-1)^n \frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right] \qquad n\geqslant 0.$$

Отметим, что все нормирующие постоянные обращаются в нуль, если $q(x)$ является четной функцией. Рассмотрим отображение,

При поддержке грантов РФФИ 03-01-00377, Министерства Образования РФ Е02-1.0-66 и гранта "Научные школы" НШ-2266.2003.1.

сопоставляющее каждому потенциалу **набор спектральных данных**:

$$\Psi : q \ \mapsto \ \Psi(q) = (\Lambda(q)\,;\,\mathcal{N}(q)) = (\{\lambda_n(q)\}_0^\infty\,;\{\nu_n(q)\}_0^\infty).$$

В работе изучаются асимптотики спектральных данных для потенциалов из гильбертова пространства

$$\mathbf{H} = \left\{ q : \|q\|^2_{\mathbf{H}} = \|(T^0)^{1/2} q\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|xq\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}.$$

Нам потребуется вспомогательное определение. Обозначим через $\chi_n^0(x)$ такое решение уравнения $-\psi''+x^2\psi=\lambda_n^0\psi$, что $\{\chi_n^0, \psi_n^0\} = \chi_n^0(\psi_n^0)' - (\chi_n^0)'\psi_n^0 \equiv 1$ и $(\chi_n^0\psi_n^0)(\cdot)$ является нечетной функцией. Нетрудно показать, что

$$\chi_n^0(x) \equiv \left(\frac{n!\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/2} \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{Im} D_{-n-1}(i\sqrt{2}x), & n=2k, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{Re} D_{-n-1}(i\sqrt{2}x), & n=2k+1, \end{cases}$$

где мы используем стандартное обозначение $D_\nu(x)$ для функций Вебера (или функций параболического цилиндра – см. [3, стр. 122]). Легко видеть, что $(\psi_n^0\chi_n^0)(x) = O(|x|^{-1})$, $x\to\pm\infty$, и, следовательно, $\psi_n^0\chi_n^0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Введем гильбертовы пространства последовательностей

$$\ell_r^2 = \{c = \{c_n\}_0^\infty : \|c\|^2_{\ell_r^2} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)^{2r}|c_n|^2 < \infty\}, \quad r \geqslant 0.$$

Основными результатами данной работы являются теоремы 1.1–1.3, приведенные ниже.

Теорема 1.1. *Следующие асимптотики выполняются равномерно на ограниченных подмножествах пространства*[1] $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^2dt)$*:*

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + \hat{q}_n + O(n^{-1}\log^2 n), \tag{1.1}$$

$$\nu_n(q) = \check{q}_n + O(n^{-1}\log^3 n), \tag{1.2}$$

где

$$\hat{q}_n = \big(q, (\psi_n^0)^2\big)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \check{q}_n = \big(q, \psi_n^0\chi_n^0\big)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad n \geqslant 0.$$

[1] Несложно проверить, что для каждого $R>0$ все спектральные данные с достаточно большим номерами могут быть аналитически продолжены на комплексные потенциалы из шара $B_{\mathbb{C}}(0,R) \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и, следовательно, можно корректно говорить об асимптотическом поведении спектральных данных для комплексных потенциалов.

Теорема 1.2. *Равномерно на ограниченных подмножествах пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ выполняется асимптотика*

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + \hat{q}_n + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}, \tag{1.3}$$

где $\delta > 0$ – некоторая абсолютная постоянная. Другими словами, отображение

$$q \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}} \mapsto \{\lambda_n(q) - \lambda_n^0 - \hat{q}_n\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}$$

локально ограничено.

Теорема 1.3. *Равномерно на ограниченных подмножествах пространства $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ выполняется асимптотика*

$$\nu_n(q) = \check{q}_n + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}, \tag{1.4}$$

где $\delta > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

Замечание. Мы доказываем теоремы 1.2, 1.3 для всех значений $\delta \in \left(0\,,\,\frac{1}{18}\right)$.

Сформулированные результаты, как показано в работе [4], играют важную роль при решении обратной спектральной задачи для гармонического осциллятора, возмущенного потенциалом из класса $\mathbf{H}$. В частности, теоремы 1.2 и 1.3 позволяют установить локальную ограниченность (а значит, и аналитичность) отображения Ψ, а также его локальную обратимость.

Второй параграф содержит основные сведения о фундаментальных решениях уравнения $T^q y = \lambda y$, полное доказательство этих фактов можно найти в работах [4, 5]. Далее, в третьем параграфе мы доказываем теорему 1.1, а также теоремы 1.2, 1.3 за исключением оценки некоторых квадратичных поправок в представлении собственных чисел и нормирующих постоянных (см. теоремы 3.6, 3.8). Наконец, четвертый параграф посвящен технически трудному выводу необходимых неравенств для этих поправок.

§2. Предварительные сведения

2.1. Построение и оценка фундаментальных решений. В этом пункте мы формулируем результаты, относящиеся к оценкам фундаментальных решений уравнения

$$T^q y = -y'' + x^2 y + q(x) y = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1} dt). \tag{2.1}$$

Рассмотрим невозмущенную задачу

$$T^0 y = -y'' + x^2 y = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет два фундаментальных решения $\psi^0_\pm(\cdot,\lambda)\in L^2(\mathbb{R}_\pm)$ для каждого комплексного значения спектрального параметра λ. При этом

$$\psi^0_\pm(x,\lambda) \equiv D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\pm\sqrt{2}x), \quad \lambda\in\mathbb{C},$$

где мы используем стандартное обозначение $D_\nu(x)$ для функций Вебера (или функций параболического цилиндра – см. [3, стр. 122]). Отметим, что $\psi^0_\pm(x,\cdot)$ и $(\psi^0_\pm)'(x,\cdot)$ являются целыми функциями для каждого фиксированного значения x. Справедливы асимптотики (см. [3, стр. 129])

$$\psi^0_\pm(x,\lambda) = (\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2})), \quad x\to\pm\infty, \tag{2.3}$$

$$(\psi^0_\pm)'(x,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2})), \quad x\to\pm\infty. \tag{2.4}$$

При этом (2.3) и (2.4) выполняются равномерно по λ на ограниченных подмножествах комплексной плоскости. Кроме того, справедливы тождества

$$\psi^0_\pm(0,\lambda) \equiv \cos\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda-1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right), \tag{2.5}$$

$$(\psi^0_\pm)'(0,\lambda) \equiv \pm\sin\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\cdot\frac{2^{\frac{\lambda+3}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right), \tag{2.6}$$

непосредственно вытекающие из выражений для значений функций Вебера и их производных в точке $x=0$ (см. [3, стр. 122]).

Определение 2.1. Для $x\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in\mathbb{C}$ определим вещественные функции

$$a(\lambda) \equiv \left|\frac{\lambda}{2e}\right|^{\frac{\operatorname{Re}\lambda}{4}} e^{\frac{\pi-\phi}{4}\operatorname{Im}\lambda}, \qquad \lambda = |\lambda|e^{i\phi}\in\mathbb{C},\ \phi\in[0,2\pi], \tag{2.7}$$

$$\rho(x,\lambda) \equiv 1 + |\lambda|^{\frac{1}{12}} + |x^2-\lambda|^{\frac{1}{4}}, \tag{2.8}$$

$$\sigma(x,\lambda)\equiv \mathrm{Re}\int\limits_0^x \sqrt{y^2-\lambda}\,dy,\ \ x\geqslant 0, \qquad \sigma(x,\lambda)\equiv -\sigma(-x,\lambda),\ \ x<0, \tag{2.9}$$

где ветвь корня в (2.9) выбрана так, что $\sqrt{y^2-\lambda}=y+o(1)$ при $y\to+\infty$.

Замечание. (i) Нетрудно проверить, что для рассматриваемой ветви корня выполняется неравенство $\mathrm{Re}\sqrt{y^2-\lambda}\geqslant 0$, то есть $\sigma(\cdot,\lambda)$ является возрастающей функцией.

(ii) Отметим также, что

$$\sigma(x,\lambda)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(x\sqrt{x^2-\lambda}-\lambda\log(x+\sqrt{x^2-\lambda})+\lambda\log\sqrt{-\lambda}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{\mathrm{Re}\lambda}{2}\log x+\frac{\mathrm{Re}\lambda}{4}\log\frac{|\lambda|}{4e}+\frac{\pi-\phi}{4}\,\mathrm{Im}\,\lambda+O(x^{-2}),\quad x\to+\infty. \tag{2.10}$$

При этом асимптотика (2.10) равномерна по λ на ограниченных подмножествах $\mathbb{C}$.

Следующая лемма об оценке невозмущенных фундаментальных решений фактически является удобной переформулировкой результата Ф. Олвера (см. [6]).

Лемма 2.2. *Для некоторой абсолютной константы C_0 и всех $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, справедливы неравенства*

$$|\psi_\pm^0(x,\lambda)|\leqslant C_0 a(\lambda)\cdot\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}, \tag{2.11}$$

$$|(\psi_\pm^0)'(x,\lambda)|\leqslant C_0 a(\lambda)\cdot\rho(x,\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}. \tag{2.12}$$

Замечание. Используя формулу (2.10), легко получить асимптотики

$$\begin{gathered} a(\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}=(\pm\sqrt{2}x)^{\frac{\mathrm{Re}\lambda}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+O(x^{-2})),\\ \rho(x,\lambda)=\sqrt{\pm x}+O(1),\quad x\to\pm\infty. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Сравнивая асимптотики (2.3), (2.4) функций $\psi_\pm^0(x,\lambda)$ и их оценки (2.11), (2.12), видим, что последние асимптотически точны при $x\to\pm\infty$.

Будем использовать обозначение $\{f,g\}\equiv fg'-f'g$ для вронскиана функций f и g. Хорошо известно (см. [3, стр. 123]), что

$$w^0(\lambda)\equiv\{\psi_-^0(\cdot,\lambda),\psi_+^0(\cdot,\lambda)\}\equiv-\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Лемма 2.3. *Справедливы следующие тождества, асимптотики и неравенства:*

$$w^0(\lambda)w^0(-\lambda)\equiv 4\cos\frac{\pi\lambda}{2},\qquad a^2(\lambda)a^2(-\lambda)\equiv e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\lambda|},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

$$w^0(\lambda)=\begin{cases}-\sqrt{2}\left(-\frac{\lambda}{2e}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1+O(|\lambda|^{-1})), & \mathrm{Re}\lambda\leqslant 0,\ \lambda\to\infty,\\ -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi\lambda}{2}\cdot\left(\frac{\lambda}{2e}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1+O(|\lambda|^{-1})), & \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0,\ \lambda\to\infty,\end{cases}$$

$$\sqrt{2}\leqslant\frac{|w^0(\lambda)|}{a^2(\lambda)}\leqslant 2,\qquad \mathrm{Re}\lambda\leqslant 0,$$

$$2\,\frac{|\cos\frac{\pi\lambda}{2}|}{e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\lambda|}}\leqslant\frac{|w^0(\lambda)|}{a^2(\lambda)}\leqslant 2\sqrt{2}\,\frac{|\cos\frac{\pi\lambda}{2}|}{e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\lambda|}},\quad \mathrm{Re}\lambda\geqslant 0.$$

Определим ядро $J^0(x,t;\lambda)$, играющее важную роль при построении возмущенных решений методом итераций:

$$J^0(x,t;\lambda)\equiv\frac{\psi_-^0(t,\lambda)\psi_+^0(x,\lambda)-\psi_-^0(x,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)}{w^0(\lambda)},\qquad x,y\in\mathbb{R},\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Лемма 2.4. *Для некоторой абсолютной константы C_1 и всех $x,t\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, справедливы неравенства*

$$|J^0(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{C_1}{\rho(x,\lambda)\rho(t,\lambda)}\cdot e^{|\sigma(x,\lambda)-\sigma(t,\lambda)|},$$

$$|(J^0)'_x(x,t;\lambda)|\leqslant C_1\frac{\rho(x,\lambda)}{\rho(t,\lambda)}\cdot e^{|\sigma(x,\lambda)-\sigma(t,\lambda)|}.$$

Замечание. Можно гарантировать выполнение леммы 2.4 с такой константой C_1, что $C_1<12C_0^2$, где C_0 – константа из леммы 2.2.

Построим решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условиям

$$\psi_\pm(x,\lambda,q)=\psi_\pm^0(x,\lambda)(1+o(1)),\quad x\to\pm\infty,$$

и получим неравенства для их вронскиана. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi_\pm(x,\lambda,q) = \psi^0_\pm(x,\lambda) - \int\limits_x^{\pm\infty} J^0(x,t;\lambda)q(t)\psi_\pm(t,\lambda,q)dt, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Метод итераций дает следующее формальное представление:

$$\psi_\pm(x,\lambda,q) = \sum_{n\geqslant 0}\psi^{(n)}_\pm(x,\lambda,q), \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\psi^{(0)}_\pm(x,\lambda,q) \equiv \psi^0_\pm(x,\lambda),\\ \psi^{(n+1)}_\pm(x,\lambda,q) \equiv -\int\limits_x^{\pm\infty} J^0(x,t;\lambda)\psi^{(n)}_\pm(t,\lambda,q)q(t)dt.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Лемма 2.5. *Для всех $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ и $q\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1}dt)$ выполняются следующие оценки каждого слагаемого $\psi^{(n)}_\pm$, $n\geqslant 0$:*

$$|\psi^{(n)}_\pm(x,\lambda,q)| \leqslant C_0 a(\lambda)\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\cdot\frac{\beta^n_\pm(x,\lambda,q)}{n!},$$

$$\left|(\psi^{(n)}_\pm)'(x,\lambda,q)\right| \leqslant C_0 a(\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}\rho(x,\lambda)\cdot\frac{\beta^n_\pm(x,\lambda,q)}{n!},$$

где

$$\beta_\pm(x,\lambda,q) \equiv \pm C_1\int\limits_x^{\pm\infty}\frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)}dt < +\infty.$$

Следствие 2.6. *Для всех $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ и $q\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1}dt)$ ряд (2.14) сходится. При этом сходимость равномерна, если λ, q ограничены, а параметр x ограничен снизу для ψ_+ и сверху для ψ_-. Функции $\psi_\pm(x,\cdot,q)$ и $\psi'_\pm(x,\cdot,q)$ целые при любых фиксированных x, q. Наконец, справедливы неравенства*

$$|\psi_\pm(x,\lambda,q)| \leqslant C_0 a(\lambda)\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\, e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$|\psi_\pm(x,\lambda,q)-\psi^0_\pm(x,\lambda)| \leqslant C_0 a(\lambda)\frac{e^{\mp\sigma(x,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)}\,\beta_\pm(x,\lambda,q)e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$|\psi'_\pm(x,\lambda,q)| \leqslant C_0 a(\lambda)\rho(x,\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}\cdot e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)},$$

$$\left|\psi'_\pm(x,\lambda,q)-(\psi^0_\pm)'(x,\lambda)\right| \leqslant C_0 a(\lambda)\rho(x,\lambda)e^{\mp\sigma(x,\lambda)}\cdot\beta_\pm(x,\lambda,q)e^{\beta_\pm(x,\lambda,q)}.$$

Замечание. Используя асимптотическую точность оценки Ф. Олвера (см. (2.13)), легко видеть, что

$$\psi_\pm(x,\lambda,q)=\psi^0_\pm(x,\lambda)(1+O(\beta_\pm(x,\lambda,q))),\quad x\to\pm\infty,$$

$$\psi'_\pm(x,\lambda,q)=(\psi^0_\pm)'(x,\lambda)(1+O(\beta_\pm(x,\lambda,q))),\quad x\to\pm\infty.$$

Введем вронскиан

$$w(\lambda,q)\equiv\{\psi_-(\cdot,\lambda,q),\psi_+(\cdot,\lambda,q)\}.$$

Отметим, что корнями функции $w(\cdot,q)$ являются собственные числа оператора T^q.

Лемма 2.7. *Для каждого $q\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1}dt)$ вронскиан $w(\cdot,q)$ является целой функций спектрального параметра $\lambda\in\mathbb{C}$. Кроме того, справедлива оценка*

$$|w(\lambda,q)-w^0(\lambda)| \leqslant 2C_0^2a^2(\lambda)\cdot\beta(\lambda,q)e^{\beta(\lambda,q)},$$

где

$$\beta(\lambda,q)\equiv C_1\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)}\,dt<+\infty.$$

Далее, построим решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условиям

$$\vartheta_1(0,\lambda,q)\equiv\vartheta'_2(0,\lambda,q)\equiv 1,\quad \vartheta'_1(0,\lambda,q)\equiv\vartheta_2(0,\lambda,q)\equiv 0.$$

Обозначим невозмущенные функции через $\vartheta^0_{1,2}(x,\lambda)\equiv\vartheta_{1,2}(x,\lambda,0)$ и отметим, что

$$\vartheta^0_2(t,\lambda)\equiv -J^0(0,t;\lambda),\qquad \vartheta^0_1(t,\lambda)\equiv (J^0)'_x(0,t;\lambda). \tag{2.16}$$

Справедливо формальное представление

$$\begin{gathered}\vartheta_{1,2}(x,\lambda,q)=\sum_{n\geqslant 0}\vartheta^{(n)}_{1,2}(x,\lambda,q),\\ \vartheta^{(n+1)}_{1,2}(x,\lambda,q)=\int\limits_0^x J^0(x,t;\lambda)\vartheta^{(n)}_{1,2}(t,\lambda,q)q(t)dt,\end{gathered} \tag{2.17}$$

с первым слагаемым $\vartheta^{(0)}_{1,2}(x,\lambda,q)\equiv\vartheta^0_{1,2}(x,\lambda)$.

Лемма 2.8. *Для всех* $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$ *и* $j = 1, 2$ *справедливы неравенства*

$$|\vartheta_j^{(n)}(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \frac{e^{\sigma(|x|,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)} \cdot \frac{\beta_0^n(x,\lambda,q)}{n!},$$

$$\left|(\vartheta_j^{(n)})'(x,\lambda,q)\right| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \rho(x,\lambda) e^{\sigma(|x|,\lambda)} \cdot \frac{\beta_0^n(x,\lambda,q)}{n!},$$

где

$$\beta_0(x,\lambda,q) \equiv C_1 \left| \int_0^x \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)} dt \right| < +\infty.$$

Ряд (2.17) *сходится равномерно, если* x, λ, q *ограничены. При этом*

$$|\vartheta_j(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \frac{e^{\sigma(|x|,\lambda)}}{\rho(x,\lambda)} \cdot e^{\beta_0(x,\lambda,q)},$$

$$|\vartheta_j'(x,\lambda,q)| \leqslant \frac{2C_1}{(1+|\lambda|^{1/4})^{2j-3}} \rho(x,\lambda) e^{\sigma(|x|,\lambda)} \cdot e^{\beta_0(x,\lambda,q)}.$$

2.2. Грубые асимптотики спектральных данных. Рассмотрим оператор $T^q y = -y'' + x^2 y + q(x) y$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Несложно убедиться в том, что если $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$, то возмущение $T^q - T^0$ бесконечно мало относительно T^0 в смысле квадратичных форм, т.е. для каждого $a > 0$ найдется такое $b > 0$, что $((T^q - T^0)y, y) \leqslant a(T^0 y, y) + b\|y\|^2$ для всех $y \in L^2(\mathbb{R})$, для которых $(T^0 y, y) < +\infty$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.9. *Предположим, что вещественный потенциал* q *удовлетворяет условию* $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$. *Тогда оператор* T^q *самосопряжен в существенном на* $\mathcal{D}(T^0)$, *то есть на области определения невозмущенного оператора* T^0.

При построении фундаментальных решений в предыдущем параграфе нам было достаточно предполагать, что $q \in L^1(\mathbb{R}, (|t|+1)^{-1}dt)$. При этом для оценки возмущений мы использовали функцию

$$\beta(\lambda, q) \equiv C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda)} dt < +\infty.$$

Далее, для того, чтобы рассматривать равномерные асимптотики решений при больших значениях $\lambda \in \mathbb{C}$, нам придется наложить более жесткие требования на потенциал, а именно $\beta(\lambda, q) \to 0$, $\lambda \to \infty$.

Определение 2.10. Обозначим через $\mathbf{B}$ множество всех вещественных потенциалов q таких, что

$$b(R,q) \equiv \sup_{\lambda:|\lambda|\geqslant R} \beta(\lambda,q) \downarrow 0, \quad R\to+\infty.$$

Простые соображения показывают, что для $q\neq 0$ верно соотношение $R^{-1/2}=O(b(R,q))$, $R\to+\infty$ (рассуждения опираются на асимптотику $\rho^2(t,\lambda)=|\lambda|^{1/2}(1+o(1))$, $\lambda\to\infty$).

Лемма 2.11.

(i) *Пусть $q\in L^1(\mathbb{R},(|t|+1)^{-\frac13+\alpha}dt)$, $\alpha>0$. Тогда $q\in\mathbf{B}$ и для $R\uparrow+\infty$ верна асимптотика $b(R,q)=O(\|q\|R^{-\frac{\alpha}{2}})$, $\alpha\leqslant 1$, или же $b(R,q)=O(\|q\|R^{-\frac12})$, $\alpha\geqslant 1$.*

(ii) *Пусть $q\in L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^{-1+\alpha}dt)$, $\alpha>0$. Тогда $q\in\mathbf{B}$ и для $R\uparrow+\infty$ верна асимптотика $b(R,q)=O(\|q\|R^{-\frac{\alpha}{4}}\log^{\frac12}R)$, $\alpha\leqslant 2$, или же $b(R,q)=O(\|q\|R^{-\frac12})$, $\alpha>2$.*

Следующая лемма дает грубую асимптотику корней вронскиана $w(\cdot,q)$.

Лемма 2.12. *Рассмотрим комплексный потенциал $q\in\mathbf{B}_{\mathbb{C}}$ и выберем такое целое неотрицательное число $n_0=n_0(r,q)$, что $6C_0^2b(2n_0,q)\leqslant 1$. Тогда для любого $n\geqslant n_0$ вронскиан $w(\cdot,q)$ имеет ровно n корней с учетом кратности в круге $\{\lambda:|\lambda|\leqslant 2n\}$ и ровно один простой корень в круге $\{\lambda:|\lambda-\lambda_n^0|\leqslant 6C_0^2b(2n,q)\}$. Других корней у вронскиана нет. Кроме того, на границах всех этих кругов выполняется неравенство*

$$|w(\lambda,q)-w^0(\lambda)|<\frac12|w^0(\lambda)|.$$

Наконец, сформулируем простейшие свойства спектральных данных для вещественных потенциалов из класса $\mathbf{B}$.

Лемма 2.13. *Пусть $q\in\mathbf{B}$. Тогда*

(i) *Спектр оператора T^q полностью дискретен и состоит из простых собственных чисел*

$$\lambda_0(q)<\lambda_1(q)<\lambda_2(q)<\dots.$$

При этом λ является собственным числом оператора T^q, если и только если $w(\lambda,q)=0$.

(ii) *Для каждого $n\geqslant 0$ существует конечная* **нормирующая постоянная**

$$\nu_n(q)=\lim_{x\uparrow\infty}\log\left|\frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right|=\lim_{x\uparrow\infty}\log\left[(-1)^n\frac{\psi_n(x,q)}{\psi_n(-x,q)}\right],$$

где через $\psi_n(x,q)$ мы обозначаем n-ю нормированную собственную функцию оператора T^q. Кроме того, выполняются тождества

$$\psi_\pm(x,\lambda_n(q),q)\equiv c_n^\pm\psi_\mp(x,\lambda_n(q),q),\quad c_n^\pm=(-1)^n e^{\mp\nu_n(q)},$$
$$\int_{\mathbb{R}}\psi_\pm^2(x,\lambda_n(q),q)dx=c_n^\pm\dot w(\lambda_n(q),q)>0,\qquad \dot w\equiv\frac{\partial w}{\partial\lambda}. \tag{2.18}$$

В частности, все корни вронскиана $w(\cdot,q)$ простые.

(iii) *Справедливы асимптотики*

$$\lambda_n(q)=\lambda_n^0+O(b(2n,q)),\quad \nu_n(q)=O(b(2n,q)),\quad n\to+\infty. \tag{2.19}$$

§3. Асимптотики спектральных данных

Этот параграф посвящен нахождению асимптотик спектральных данных для потенциалов из пространства $\mathbf{H}$. Напомним, что

$$\mathbf{H}=\left\{q:\|q\|^2_{\mathbf{H}}=\|(T^0)^{1/2}q\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\|xq\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}<+\infty\right\}.$$

Опуская детали (в частности, необходимые оценки), опишем сначала основную идею получения асимптотики собственных чисел. Рассмотрим разложение вронскиана

$$0=w(\lambda_n(q),q)=w^0(\lambda_n(q))+w^{(1)}(\lambda_n(q),q)+w^{(2)}(\lambda_n(q),q)+\ldots,$$

где

$$w^{(1)}=\psi_-^0(\psi_+^{(1)})'+\psi_-^{(1)}(\psi_+^0)'-(\psi_-^0)'\psi_+^{(1)}-(\psi_-^{(1)})'\psi_+^0,$$

$$w^{(2)}=\psi_-^0(\psi_+^{(2)})'+\psi_-^{(1)}(\psi_+^{(1)})'+\psi_-^{(2)}(\psi_+^0)'-(\psi_-^0)'\psi_+^{(2)}$$
$$-(\psi_-^{(1)})'\psi_+^{(1)}-(\psi_-^{(2)})'\psi_+^0,\ldots.$$

Далее, раскладывая полученное тождество по параметру $\Delta\lambda_n=\lambda_n(q)-\lambda_n^0$, получаем

$$\begin{aligned}0 = w(\lambda_n(q),q)-w^0(\lambda_n^0)=&\Delta\lambda_n\cdot\dot w^0(\lambda_n^0)+\frac{(\Delta\lambda_n)^2}{2}\ddot w^0(\lambda_n^0)+\ldots+\\&+w^{(1)}(\lambda_n^0,q)+\Delta\lambda_n\cdot\dot w^{(1)}(\lambda_n^0,q)+\ldots+\\&+w^{(2)}(\lambda_n^0,q)+\ldots.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее представление для возмущения собственного числа:

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + \Delta\lambda_n^{(1)} + \Delta\lambda_n^{(2)} + \ldots,$$

где

$$\Delta\lambda_n^{(1)} = -\frac{w^{(1)}}{\dot{w}^0}, \qquad \Delta\lambda_n^{(2)} = -\frac{w^{(2)}}{\dot{w}^0} + \frac{w^{(1)}\dot{w}^{(1)}}{(\dot{w}^0)^2} - \frac{(w^{(1)})^2\ddot{w}^0}{2(\dot{w}^0)^3}, \quad \ldots.$$

Мы проводим подготовительные вычисления в п. 3.1. Пункт 3.2 содержит обоснование приведенного метода получения асимптотики собственных значений. Далее, в п. 3.3, мы вычисляем первые слагаемые в асимптотиках собственных чисел и нормирующих постоянных. Необходимо отметить, что на данном этапе мы используем только свойство убывания потенциала $q \in L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)$, но не его гладкость. Наконец, в п.п. 3.4, 3.5 мы находим вторые слагаемые в асимптотиках спектральных данных для потенциалов из класса $\mathbf{H}$. Поскольку данный параграф содержит большое количество громоздких выкладок (требующих, к тому же, небольших изменений в зависимости от четности номера рассматриваемого собственного числа), мы для удобства читателя приводим краткую сводку промежуточных технических результатов в таблице 1 (п. 3.4). Отметим также важные технические теоремы 3.6, 3.8, доказательству которых целиком посвящен §4.

3.1. Предварительные вычисления. Заметим, что справедливо тождество

$$\psi_-(x,\lambda,q) \equiv \psi_+(-x,\lambda,q^-), \qquad q^-(x) \equiv q(-x). \tag{3.1}$$

В самом деле, функция $\psi_+(x,\lambda,q^-)$ является таким решением уравнения (2.1), что

$$\psi_+(-x,\lambda,q^-) = \psi_+^0(-x,\lambda)(1+o(1)) = \psi_-^0(x,\lambda)(1+o(1)), \quad x\to-\infty,$$

и, значит, обязана совпадать с $\psi_-(x,\lambda,q)$.

Имея в виду тождество (3.1) и в целях экономии места, мы часто будем приводить только результаты, относящиеся к решению ψ_+. Введем обозначения

$$\kappa_n = \psi_+^0(0,\lambda_n^0), \qquad \kappa_n' = (\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0), \qquad \dot{\kappa}_n = \dot{\psi}_+^0(0,\lambda_n^0),$$

и так далее.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие асимптотики:*

$$\kappa_n = (-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{3}{4}} \cdot (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1})), \qquad \kappa_n' = 0,\ n=2m\to\infty,$$
$$\kappa_n = 0, \qquad \kappa_n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{\frac{3}{4}} \cdot (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}} a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1})),\ n=2m+1\to\infty; \tag{3.2}$$

$$\dot\kappa_n' = (-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{-\frac{5}{4}}\, \pi \cdot (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}} a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1})), \qquad n=2m\to\infty,$$
$$\dot\kappa_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2^{-\frac{5}{4}}\, \pi \cdot (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} a(\lambda_n^0)(1+O(n^{-1})), \qquad n=2m+1\to\infty; \tag{3.3}$$

$$\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} - \frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'} = O(n^{-1}),\ \ n=2m\to\infty,\ \ \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'} - \frac{\ddot\kappa_n}{2\dot\kappa_n} = O(n^{-1}),\ \ n=2m+1\to\infty. \tag{3.4}$$

Доказательство. Напомним, что справедливы тождества (см. (2.5), (2.6))

$$\psi_\pm^0(0,\lambda) \equiv \cos\frac{(\lambda-1)\pi}{4} \cdot \frac{2^{\frac{\lambda-1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right);$$
$$(\psi_\pm^0)'(0,\lambda) \equiv \pm\sin\frac{(\lambda-1)\pi}{4} \cdot \frac{2^{\frac{\lambda+3}{4}}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right).$$

Применяя формулу Стирлинга, отсюда легко получить (3.2) и (3.3). Для того, чтобы вывести (3.4), заметим, что для четных значений n выполняется

$$\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} - \frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'} = \frac{d}{d\lambda}\log\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n^0} - \frac{d}{d\lambda}\log\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_n^0}$$
$$= O\left(\frac{1}{\lambda_n^0}\right), \quad n=2m\to\infty.$$

Формула (3.4) для нечетных n доказывается аналогично. □

Положим $K_n = \|\psi_+(\cdot,\lambda_n(q),q)\|$. Справедливо тождество

$$\psi_+^0(t,\lambda_n^0) \equiv K_n \cdot \psi_n^0(t).$$

Лемма 3.2. (i) *Справедливы соотношения*

$$K_n = \begin{cases} \sqrt{2\kappa_n\dot\kappa_n'}, & n=2m, \\ \sqrt{-2\kappa_n'\dot\kappa_n}, & n=2m+1, \end{cases} \quad K_n = a(\lambda_n^0)\cdot(2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}+O(n^{-1})),\ n\to\infty.$$

(ii) *Справедливы тождества*

$$\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0) \equiv \frac{K_n}{\kappa_n}\cdot\psi_n^0(t), \quad \vartheta_2^0(t,\lambda_n^0) \equiv -\frac{K_n}{2\dot\kappa_n'}\cdot\chi_n^0(t), \quad n=2m,$$
$$\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0) \equiv -\frac{K_n}{2\dot\kappa_n}\cdot\chi_n^0(t), \quad \vartheta_2^0(t,\lambda_n^0) \equiv \frac{K_n}{\kappa_n'}\cdot\psi_n^0(t), \quad n=2m+1.$$

Доказательство. (i) Используя формулу (2.18) и очевидные равенства $\kappa_{2m}'=\kappa_{2m+1}=0$, легко видеть, что

$$K_n = \left(\int_{\mathbb{R}} (\psi_+^0)^2(x,\lambda_n^0)dx\right)^{1/2} = \sqrt{(-1)^n\,\dot w_0(\lambda_n^0)}$$
$$= \begin{cases} \sqrt{2\kappa_n\dot\kappa_n'}, & n=2m, \\ \sqrt{-2\kappa_n'\dot\kappa_n}, & n=2m+1. \end{cases}$$

Асимптотика (3.5) вытекает теперь из (3.2).

(ii) Предположим, что n четно, доказательство для нечетных n аналогично. В таком случае ψ_n^0 является четной функцией, а χ_n^0 – нечетной. Следовательно,

$$\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0) \equiv \frac{\psi_n^0(t)}{\psi_n^0(0)} \equiv \frac{K_n}{\kappa_n}\psi_n^0(t)$$

и

$$\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0) \equiv \frac{\chi_n^0(t)}{(\chi_n^0)'(0)} \equiv -\psi_n^0(0)\chi_n^0(t) \equiv -\frac{K_n}{2\dot\kappa_n'}\chi_n^0(t),$$

что и требовалось доказать. $\square$

В дальнейшем (например, при вычислении значения $\dot w^{(1)}(\lambda_n^0,q)$) нам также потребуются тождества, выражающие величины $\dot\psi_\pm^0(\cdot,\lambda_n^0)$ и $\dot\vartheta_{1,2}^0(\cdot,\lambda_n^0)$ в терминах функций ψ_n^0, χ_n^0. Будем использовать обозначения

$$\Psi_n^{(1)}(t) \equiv \int_0^t (\psi_n^0)^2(s)ds, \quad \Psi_n^{(2)}(t) \equiv \int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)ds,$$
$$\Psi_n^{(3)}(t) \equiv \int_0^t (\chi_n^0)^2(s)ds.$$

Замечание. Поскольку $\int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)ds = 1/2$, имеем

$$\int\limits_t^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)ds \equiv \frac{1}{2} - \Psi_n^{(1)}(t). \tag{3.6}$$

Мы выражаем производные фундаментальных решений по спектральному параметру λ через функции $\Psi_n^{(1)}$, $\Psi_n^{(2)}$, $\Psi_n^{(3)}$.

Лемма 3.3. *Справедливы следующие тождества:*
(i) *для четных значений n:*

$$\begin{aligned}
\dot\psi_+^0(t,\lambda_n^0) &\equiv K_n\left(\psi_n^0(t)\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} - \Psi_n^{(2)}(t)\right) + \chi_n^0(t)\left(-\frac{1}{2} + \Psi_n^{(1)}(t)\right)\right), \\
\dot\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{\kappa_n}\left(-\psi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t) + \chi_n^0(t)\Psi_n^{(1)}(t)\right), \\
\dot\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{2\dot\kappa_n'}\left(\psi_n^0(t)\Psi_n^{(3)}(t) - \chi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t)\right);
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii) *для нечетных значений n:*

$$\begin{aligned}
\dot\psi_+^0(t,\lambda_n^0) &\equiv K_n\left(\psi_n^0(t)\left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'} - \Psi_n^{(2)}(t)\right) + \chi_n^0(t)\left(-\frac{1}{2} + \Psi_n^{(1)}(t)\right)\right), \\
\dot\vartheta_1^0(t,\lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{2\dot\kappa_n}\left(\psi_n^0(t)\Psi_n^{(3)}(t) - \chi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t)\right), \\
\dot\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0) &\equiv \frac{K_n}{\kappa_n'}\left(-\psi_n^0(t)\Psi_n^{(2)}(t) + \chi_n^0(t)\Psi_n^{(1)}(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Заметим, что дифференцирование уравнения $-\psi''+x^2\psi=\lambda\psi$ по λ дает $-\dot\psi''+x^2\dot\psi=\lambda\dot\psi+\psi$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\dot\psi_+^0(t,\lambda_n^0) = {} & \frac{\dot\psi_+^0(0,\lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)}\cdot\psi_n^0(t) + \frac{(\dot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0)}{(\chi_n^0)'(0)}\cdot\chi_n^0(t) \\
& - \int\limits_0^t J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)ds.
\end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство выражения

$$\psi_n^0(0)=\frac{\kappa_n}{K_n}, \qquad (\chi_n^0)'(0)=-\frac{1}{\psi_n^0(0)}=-\frac{2\dot{\kappa}_n'}{K_n},$$

а также

$$J^0(t,s;\lambda_n^0)\equiv\psi_n^0(t)\chi_n^0(s)-\chi_n^0(t)\psi_n^0(s), \qquad \psi_+^0(s,\lambda_n^0)\equiv K_n\psi_n^0(s),$$

получаем (3.7) для $\dot{\psi}_+(t,\lambda_n^0)$. Аналогично, из равенства

$$\dot{\vartheta}_{1,2}^0(t,\lambda_n^0) = -\int\limits_0^t J^0(t,s;\lambda_n^0)\vartheta_{1,2}^0(s,\lambda_n^0)ds$$

вытекают тождества (3.7) для $\dot{\vartheta}_{1,2}(t,\lambda_n^0)$. □

3.2. Обоснование метода вычисления асимптотики собственных значений. В последующих пунктах мы вычисляем первое и второе слагаемые в возмущении собственных чисел для потенциалов q из класса $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ (ясно, что для каждого $R>0$ все собственные числа с достаточно большими номерами можно аналитически продолжить в шар $B_{\mathbb{C}}(0,R)\subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, и, следовательно, можно корректно говорить об асимптотическом поведении спектральных данных для комплексных потенциалов). Легко видеть, что асимптотика (2.19) и лемма 2.11 влекут

$$\lambda_n(q) = \lambda_n^0 + O(n^{-1/2}), \quad n\to\infty, \quad q\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}\subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt).$$

Наша цель – уточнить этот результат.

Напомним, что в силу лемм 2.5, 2.6 а также 2.11, справедливы разложения

$$\psi_\pm(0,\lambda,q) = \sum_{m\geqslant 0}\psi_\pm^{(m)}(0,\lambda,q), \qquad \psi'_\pm(0,\lambda,q) = \sum_{m\geqslant 0}(\psi_\pm^{(m)})'(0,\lambda,q),$$

где

$$\left|\psi_\pm^{(m)}(0,\lambda,q)\right| = O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}-\frac14}\,a(\lambda)\cdot\|q\|_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right),$$

$$\left|(\psi_\pm^{(m)})'(0,\lambda,q)\right| = O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}+\frac14}\,a(\lambda)\cdot\|q\|_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right).$$

Отсюда ясно, что выполняется разложение

$$w(\lambda,q)\equiv\psi_-(0,\lambda,q)\psi'_+(0,\lambda,q)-\psi_+(0,\lambda,q)\psi'_-(0,\lambda,q) = \sum_{m\geqslant 0}w^{(m)}(\lambda,q),$$

$$\left|w^{(m)}(\lambda,q)\right| = O\left(|\lambda|^{-\frac{m}{2}} a^2(\lambda)\cdot \|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right),$$

где $w^{(m)}$ является суммой произведений вида

$$\psi^{(k)}_{\mp}(0,\lambda,q)(\psi^{(s)}_{\pm})'(0,\lambda,q), \quad k+l=m.$$

Для того, чтобы оценить производные этих функций по λ, заметим, что для достаточно больших λ справедлива равномерная оценка

$$a\left(\lambda+e^{i\phi}\log^{-1}|\lambda|\right) = O\left(a(\lambda)\right), \quad \phi\in[0,2\pi).$$

Поскольку функции $w^{(m)}$ аналитичны по λ, при помощи интегрирования по контуру $\widetilde{\lambda}(\phi)=\lambda+e^{i\phi}\log^{-1}|\lambda|$ получаем

$$\left|\frac{\partial^k w^{(m)}(\lambda,q)}{\partial\lambda^k}\right| = O\left(\log^k|\lambda|\cdot|\lambda|^{-\frac{m}{2}} a^2(\lambda)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right).$$

Следовательно, используя оценку $\lambda_n(q)=\lambda_n^0+O(n^{-\frac{1}{2}})$, находим

$$\begin{aligned}0=w(\lambda_n(q),q)=(\lambda_n(q)-\lambda_n^0)\cdot\dot{w}^0(\lambda_n^0)+w^{(1)}(\lambda_n^0,q)\\ +O\left(\log^2 n\cdot n^{-1}a^2(\lambda_n^0)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right).\end{aligned}$$

Учитывая равенство $\dot{w}^0(\lambda_n^0)=K_n^2$ и асимптотику (3.5), немедленно выводим соотношение

$$\lambda_n(q)-\lambda_n^0 = -\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot{w}^0(\lambda_n^0)} + O\left(n^{-1}\log^2 n\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right). \quad (3.9)$$

Рассматривая также все слагаемые следующего порядка, видим, что

$$\begin{aligned}0 = \left(\lambda_n(q)-\lambda_n^0+\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot{w}^0(\lambda_n^0)}\right)\cdot\dot{w}^0(\lambda_n^0) + \frac{(w^{(1)}(\lambda_n^0,q))^2}{2(\dot{w}^0(\lambda_n^0))^2}\cdot\ddot{w}^0(\lambda_n^0) -\\ -\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot{w}^0(\lambda_n^0)}\cdot\dot{w}^{(1)}(\lambda_n^0,q)+w^{(2)}(\lambda_n^0,q)\\ +O\left(\log^3 n\cdot n^{-\frac{3}{2}}a^2(\lambda_n^0)\cdot\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\lambda_n(q)-\lambda_n^0+\frac{w^{(1)}(\lambda_n^0,q)}{\dot{w}^0(\lambda_n^0)} =$$

$$= \left(-\frac{w^{(2)}}{\dot{w}^0} + \frac{w^{(1)}\dot{w}^{(1)}}{(\dot{w}^0)^2} - \frac{(w^{(1)})^2\ddot{w}^0}{2(\dot{w}^0)^3} \right)(\lambda_n^0\,, q)$$
$$+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n \cdot \|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},(|t|+1)^2dt)}\right), \qquad (3.10)$$

что и требовалось установить.

3.3. Первые слагаемые в асимптотиках спектральных данных. Нам потребуется следующее определение.

Определение 3.4. Пусть $q\in L^2(\mathbb{R})$. Положим

$$\hat{q}_n^{\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} q(t)(\psi_n^0)^2(t)dt, \qquad \check{q}_n^{\pm} = \int\limits_{\mathbb{R}_\pm} q(t)(\psi_n^0\chi_n^0)(t)dt.$$

Кроме того, пусть

$$\hat{q}_n = (q, (\psi_n^0)^2)_{L^2(\mathbb{R})} = \hat{q}_n^+ + \hat{q}_n^-, \qquad \check{q}_n = (q, \psi_n^0\chi_n^0)_{L^2(\mathbb{R})} = \check{q}_n^+ + \check{q}_n^-.$$

Для того, чтобы получить первые слагаемые асимптотик собственных чисел и нормирующих постоянных, нам необходимо вычислить величины $\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)$, $(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)$.

Лемма 3.5. *Справедливы следующие тождества:*
(i) *для четных значений n:*

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q) = -\kappa_n\check{q}_n^+, \qquad (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -2\dot{\kappa}_n'\hat{q}_n^+;$$

(ii) *для нечетных значений n:*

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q) = -2\dot{\kappa}_n\hat{q}_n^+, \qquad (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -\kappa_n'\check{q}_n^+.$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Формулы (2.15) и (2.16) дают

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda,q) = \int\limits_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt,$$

$$(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda,q) = -\int\limits_0^{+\infty}\vartheta_1^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt.$$

Подставляя сюда $\lambda = \lambda_n^0$ и используя лемму 3.2, получаем требуемый результат. □

Доказательство теоремы 1.1. Пусть, например, n четно (случай нечетного n разбирается аналогично). Используя лемму 3.5, тождество (3.1) и очевидные соотношения $\widehat{q^-}{}^{+}_{n} = \check{q}_n^-$, $\check{q^-}{}^{+}_{n} = -\check{q}_n^-$, легко понять, что

$$\psi_\pm^0(0,\lambda_n^0) = \kappa_n, \qquad \psi_\pm^{(1)}(0,\lambda_n^0, q) = \mp\kappa_n\check{q}_n^\pm,$$

$$(\psi_\pm^0)'(0,\lambda_n^0) = 0, \qquad (\psi_\pm^{(1)})'(0,\lambda_n^0, q) = \mp 2\dot{\kappa}_n'\hat{q}_n^\pm.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w^{(1)}(\lambda_n^0, q) &= \psi_-^0(\psi_+^{(1)})' + \psi_-^{(1)}(\psi_+^0)' - (\psi_-^0)'\psi_+^{(1)} - (\psi_-^{(1)})'\psi_+^0 \\ &= -2\kappa_n\dot{\kappa}_n'(\hat{q}_n^- + \hat{q}_n^+) = -K_n^2\hat{q}_n. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $\dot{w}^0 = K_n^2$, и применяя формулу (3.9), получаем асимптотику (1.1).

Перейдем к анализу асимптотики (1.2). Рассуждения, аналогичные приведенным в п. 3.2, а также (1.1), дают[2]

$$\begin{aligned} \psi_\pm(0,\lambda_n(q),q) = \psi_\pm^0(0,\lambda_n^0) &+ \psi_\pm^{(1)}(0,\lambda_n^0,q) + \hat{q}_n\dot{\psi}_\pm^0(0,\lambda_n^0) \\ &+ O(n^{-1}\log^3 n\cdot r_n), \end{aligned}$$

где $r_n = (\lambda_n^0)^{-1/4}a(\lambda_n^0)$. Используя асимптотику (3.2), имеем

$$\frac{\psi_\pm(0,\lambda_n)}{\kappa_n} = 1 \mp \check{q}_n^+ + \frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n}\hat{q}_n + O(n^{-1}\log^3 n).$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \nu_n(q) = \log\frac{\psi_-'(0,\lambda_n)}{\psi_+'(0,\lambda_n)} &= \log\frac{1 + \check{q}_n^- + \frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n}\hat{q}_n + O(n^{-1}\log^3 n)}{1 - \check{q}_n^+\frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n}\hat{q}_n + O(n^{-1}\log^3 n)} \\ &= \check{q}_n + O(n^{-1}\log^2 n), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

---

[2] Мы по-прежнему имеем дело только с четными n. Для нечетных n необходимо рассмотреть значения $\psi_\pm'(0,\lambda_n(q),q)$ вместо $\psi_\pm(0,\lambda_n(q),q)$ – смотри также доказательство теоремы 1.3.

$n=2m\,,\ m\geqslant 0$	$n=2m+1\,,\ m\geqslant 0$
$\psi_\pm^0=\kappa_n\,,\quad (\psi_\pm^0)'=0$ $\dot w^0=K_n^2=2\kappa_n\dot\kappa_n'$ $\ddot w^0=K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}+\dfrac{\ddot\kappa_n'}{\dot\kappa_n'}\right)$	$\psi_\pm^0=0\,,\quad (\psi_\pm^0)'=\pm\kappa_n'$ $\dot w^0=-K_n^2=2\kappa_n'\dot\kappa_n$ $\ddot w^0=-K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}+\dfrac{\ddot\kappa_n}{\dot\kappa_n}\right)$
$(\psi_\pm^{(1)})'=\mp 2\dot\kappa_n'\hat q_n^\pm$ $\psi_\pm^{(1)}=\mp\kappa_n\check q_n^\pm$ $w^{(1)}=-K_n^2\,\hat q_n$	$\psi_\pm^{(1)}=-2\dot\kappa_n\hat q_n^\pm$ $(\psi_\pm^{(1)})'=-\kappa_n'\check q_n^\pm$ $w^{(1)}=K_n^2\,\hat q_n$
$(\psi_\pm^{(2)})'=2\dot\kappa_n'\Big(q_n^\pm\hat q_n^\pm\mp 2\gamma_n(q^\pm,q^\pm)\Big)$ $w^{(2)}=K_n^2\Big((\check q_n^+-\check q_n^-)\hat q_n-$ $-2\gamma_n(q,q)-2\gamma_n(q^-,q^-)\Big)$	$\psi_\pm^{(2)}=2\dot\kappa_n\Big(\pm\check q_n^\pm\hat q_n^\pm-2\gamma_n(q^\pm,q^\pm)\Big)$ $w^{(2)}=-K_n^2\Big((\check q_n^+-\check q_n^-)\hat q_n-$ $-2\gamma_n(q,q)-2\gamma_n(q^-,q^-)\Big)$
$(\dot\psi_\pm^{(1)})'=\mp 2\dot\kappa_n'\left(\dfrac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n^\pm\pm\dfrac12\,\check q_n^\pm-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1,q^\pm)-2\gamma_n(q^\pm,1)\right)$ $\dot w^{(1)}=-K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}\,\hat q_n+(\check q_n^+-\check q_n^-)-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1\,,q+q^-)-2\gamma_n(q+q^-,1)\right)$	$\dot\psi_\pm^{(1)}=-2\dot\kappa_n\left(\dfrac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\,\hat q_n^\pm\pm\dfrac12\,\check q_n^\pm-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1,q^\pm)-2\gamma_n(q^\pm,1)\right)$ $\dot w^{(1)}=K_n^2\left(\dfrac{2\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\,\hat q_n+(\check q_n^+-\check q_n^-)-\right.$ $\left.-2\gamma_n(1\,,q+q^-)-2\gamma_n(q+q^-,1)\right)$
$\psi_\pm^{(2)}=\kappa_n\left(\dfrac12\,(\check q_n^\pm)^2-\dfrac{\pi^2}{8}(\hat q_n^\pm)^2-\right.$ $\left.-\gamma_n'(q^\pm,q^\pm)\right)$ $\dot\psi_\pm^{(1)}=-\kappa_n\left(\pm\dfrac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\check q_n^\pm-\dfrac{\pi^2}{8}\hat q_n^\pm-\right.$ $\left.-\gamma_n'(1,q^\pm)-\gamma_n'(q^\pm,1)\right)$	$(\psi_\pm^{(2)})'=\pm\kappa_n'\left(\dfrac12\,(\check q_n^\pm)^2-\dfrac{\pi^2}{8}(\hat q_n^\pm)^2-\right.$ $\left.-\gamma_n'(q^\pm,q^\pm)\right)$ $(\dot\psi_\pm^{(1)})'=\mp\kappa_n'\left(\dfrac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\,\check q_n^\pm-\dfrac{\pi^2}{8}\,\hat q_n^\pm-\right.$ $\left.-\gamma_n'(1,q^\pm)-\gamma_n'(q^\pm,1)\right)$

Таблица 1. Значения первых слагаемых в разложении фундаментальных решений и их производных, вычисленные в точке $(0\,,\lambda_n^0\,,q)$. Результаты для ψ_+ получены в леммах 3.5, 3.7, 3.9. Аналогичные результаты для ψ_- вытекают из тождества (3.1) и равенств $\widehat{q^-}{}^+_n=\hat q_n^-$, $\check{q^-}{}^+_n=-\check q_n^-$. Приведены также значения первых слагаемых в разложении вронскиана, необходимые при вычислении асимптотики возмущенных собственных значений.

3.4. Второе слагаемое в асимптотике собственных значений. Мы будем использовать обозначения

$$\gamma_n(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)p(t)\int\limits_0^t(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt.$$

Следующая теорема крайне важна для получения асимптотик в классе $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.6. *Пусть $q\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Тогда интегралы $\gamma_n(q,q)$, $\gamma_n(q,1)$, $\gamma_n(1,q)$, $n\geqslant 0$, абсолютно сходятся и справедливы неравенства*

$$\|\{\gamma_n(q,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac34+\delta}}\leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}},\tag{3.11}$$

$$\|\{\gamma_n(q,1)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}},\tag{3.12}$$

$$\|\{\gamma_n(1,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}},\tag{3.13}$$

где $\delta>0$ и $C>0$ – некоторые абсолютные константы.

Доказательство. Мы приводим подробное доказательство в §4.

Согласно формуле (3.10), для вычисления второго слагаемого асимптотики собственных значений нам нужно найти величины $w^{(2)}$ и $\dot w^{(1)}$. Следующая лемма содержит необходимые вспомогательные результаты.

Лемма 3.7. *Справедливы следующие тождества:*
(i) *для четных значений n:*

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q)=2\dot\kappa_n'\left(\check q_n^+\hat q_n^+-2\gamma_n(q,q)\right),$$

$$(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)=-2\dot\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\hat q_n^+ +\frac12\check q_n^+-2\gamma_n(1,q)-2\gamma_n(q,1)\right);$$

(ii) *для нечетных значений n:*

$$\psi_+^{(2)}(0,\lambda_n^0,q)=2\dot\kappa_n\left(\check q_n^+\hat q_n^+-2\gamma_n(q,q)\right),$$

$$\dot\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)=-2\dot\kappa_n\left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\hat q_n^+ +\frac12\check q_n^+-2\gamma_n(1,q)-2\gamma_n(q,1)\right).$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Напомним, что формулы (2.15) и (2.16) дают

$$(\psi_+^{(1)})'(0,\lambda,q) = -\int_0^{+\infty} \vartheta_1^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt. \tag{3.14}$$

Далее, тождество

$$J^0(t,s;\lambda_n^0) \equiv \psi_n^0(t)\chi_n^0(s) - \chi_n^0(t)\psi_n^0(s)$$

приводит к равенству

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q) = \int_0^{+\infty} \vartheta_1^0(t,\lambda_n^0)q(t) \int_t^{+\infty} J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)dsdt =$$

$$= 2\dot{\kappa}_n' \Bigg(\int_0^{+\infty} (\psi_n^0)^2(t)q(t) \int_t^{+\infty} (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt$$

$$- \int_0^{+\infty} (\psi_n^0)^2(s)q(s) \int_0^{s} (\psi_n^0\chi_n^0)(t)q(t)dtds \Bigg) = 2\dot{\kappa}_n' \left(\check{q}_n^+ \hat{q}_n^+ - 2\gamma_n(q,q)\right).$$

Наконец, дифференцирование тождества (3.14) по λ и леммы 3.2, 3.3 влекут

$$(\dot{\psi}_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q) = -\int_0^{+\infty} \left(\dot{\vartheta}_1^0\psi_+^0 + \vartheta_1^0\dot{\psi}_+^0\right)(t,\lambda_n^0)q(t)dt =$$

$$= -2\dot{\kappa_n}' \int_0^{+\infty} \Bigg((\psi_n^0)^2(t) \left(\frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n} - 2\Psi_n^{(2)}(t) \right)$$

$$+ (\psi_n^0\chi_n^0)(t) \left(-\frac{1}{2} + 2\Psi_n^{(1)}(t) \right) \Bigg) q(t)dt,$$

откуда, учитывая (3.6), легко вывести требуемую формулу для $(\dot{\psi}_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Нам нужно найти величины $w^{(2)}(\lambda_n^0, q)$, $\dot w^{(1)}(\lambda_n^0, q)$ и $\ddot w^0(\lambda_n^0, q)$ в формуле (3.10). Напомним, что в доказательстве леммы 1.1 уже получены равенства

$$\dot w^0(\lambda_n^0) = K_n^2, \qquad w^{(1)}(\lambda_n^0, q) = -K_n^2 \hat q_n.$$

Используя леммы 3.5 и 3.7, а также тождество (3.1), легко видеть, что для четных значений n (случай нечетных n разбирается аналогично) справедливы равенства

$$w^{(2)}(\lambda_n^0, q) = \psi_-^0(\psi_+^{(2)})' + \psi_-^{(1)}(\psi_+^{(1)})' - (\psi_-^{(1)})'\psi_+^{(1)} - (\psi_-^{(2)})'\psi_+^0 =$$
$$= K_n^2\left(\check q_n^+ \hat q_n^+ - 2\gamma_n(q,q) - \check q_n^- \hat q_n^+ + \check q_n^+ \hat q_n^- - \check q_n^- \hat q_n^- - 2\gamma_n(q^-, q^-)\right) =$$
$$= K_n^2\left((\check q_n^+ - \check q_n^-)\hat q_n - 2\gamma_n(q,q) - 2\gamma_n(q^-, q^-)\right).$$

Кроме того,

$$\dot w^{(1)}(\lambda_n^0, q) = \dot\psi_-^0(\psi_+^{(1)})' + \psi_-^0(\dot\psi_+^{(1)})' + \psi_-^{(1)}(\dot\psi_+^0)' - \dot\psi_+^0(\psi_-^{(1)})'$$
$$-\psi_+^0(\dot\psi_-^{(1)})' - \psi_+^{(1)}(\dot\psi_-^0)' =$$
$$= -2\dot\kappa_n\dot\kappa_n'\hat q_n^+ - 2\kappa_n\dot\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\hat q_n^+ + \frac12\check q_n^+ - 2\gamma_n(1,q) - 2\gamma_n(q,1)\right) + \kappa_n\dot\kappa_n'\check q_n^- -$$
$$-2\dot\kappa_n\dot\kappa_n'\hat q_n^- - 2\kappa_n\dot\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\hat q_n^- - \frac12\check q_n^- - 2\gamma_n(1,q^-) - 2\gamma_n(q^-,1)\right) - \kappa_n\dot\kappa_n'\check q_n^+$$
$$= -K_n^2\Bigg(\frac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n}\hat q_n + \check q_n^+ - \check q_n^- - 2\bigg(\gamma_n(1,q) + \gamma_n(q,1) + \gamma_n(1,q^-)$$
$$+\gamma_n(q^-,1)\bigg)\Bigg).$$

Наконец, легко видеть, что

$$\ddot w^0(\lambda_n^0) = 4\dot\kappa_n\dot\kappa_n' + 2\kappa_n\ddot\kappa_n' = K_n^2\left(\frac{2\dot\kappa_n}{\kappa_n} + \frac{\ddot\kappa_n'}{\dot\kappa_n'}\right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.10) и используя асимптотику (3.4), находим

$$\lambda_n(q) - \lambda_n^0 - \hat q_n = -\left((\check q_n^+ - \check q_n^-)\hat q_n - 2\gamma_n(q,q) - 2\gamma_n(q^-,q^-)\right)$$
$$-\hat q_n^2\left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n} + \frac{\ddot\kappa_n'}{2\dot\kappa_n'}\right) +$$

$$+\hat{q}_n\left(\frac{2\dot{\kappa}_n}{\kappa_n}\hat{q}_n+\check{q}_n^+-\check{q}_n^- -2\left(\gamma_n(1,q)+\gamma_n(q,1)+\gamma_n(1,q^-)+\gamma_n(q^-,1)\right)\right)$$
$$+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n\right)=$$

$$=2\left(\gamma_n(q,q)+\gamma_n(q^-,q^-)-\hat{q}_n\left(\gamma_n(1,q)+\gamma_n(q,1)+\gamma_n(1,q^-)+\gamma_n(q^-,1)\right)\right)$$
$$+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\log^3 n\right).$$

Теперь требуемая асимптотика (1.3) вытекает из теоремы 3.6 и оценки $\hat{q}_n=O(n^{-\frac{1}{2}})$. $\square$

3.5. Второе слагаемое в асимптотике нормирующих постоянных. Нам потребуются некоторые предварительные вычисления. Положим

$$\gamma_n'(p,q)=\int_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)p(t)\int_0^t\left((\chi_n^0)^2(s)-\frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)\right)q(s)dsdt.$$

Эти интегралы обладают такими же свойствами убывания, что и $\gamma_n(p,q)$.

Теорема 3.8. *Пусть $q\in\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Тогда интегралы $\gamma_n'(q,q)$, $\gamma_n'(q,1)$, $\gamma_n'(1,q)$, $n\geqslant 0$, абсолютно сходятся, и справедливы неравенства*

$$\|\{\gamma_n'(q,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}}\leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}},\tag{3.15}$$

$$\|\{\gamma_n'(q,1)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}},\tag{3.16}$$

$$\|\{\gamma_n'(1,q)\}_0^\infty\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}}\leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}},\tag{3.17}$$

где $\delta>0$ и $C>0$ – некоторые абсолютные константы.

Доказательство. Мы приводим подробное доказательство в §4.

Лемма 3.9. *Справедливы следующие тождества:*
(i) *для четных значений n:*

$$\psi_+^{(2)}(0,\lambda_n^0,q)=\kappa_n\left(\frac{1}{2}(\check{q}_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}(\hat{q}_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

$$\dot{\psi}_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)=-\kappa_n\left(\frac{\dot{\kappa}_n}{\kappa_n}\check{q}_n^+-\frac{\pi^2}{8}\hat{q}_n^+-\gamma_n'(1,q)-\gamma_n'(q,1)\right);$$

(ii) *для нечетных значений n:*

$$(\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0,q)=\kappa_n'\left(\frac{1}{2}\,(\check q_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

$$(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0,q)=-\kappa_n'\left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\,\check q_n^+-\frac{\pi^2}{8}\,\hat q_n^+-\gamma_n'(1,q)-\gamma_n'(q,1)\right).$$

Доказательство. Мы разберем только случай четного n, вторая часть леммы доказывается аналогично. Напомним, что формулы (2.15) и (2.16) дают

$$\psi_+^{(1)}(0,\lambda,q)=\int\limits_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda)\psi_+^0(t,\lambda)q(t)dt. \tag{3.18}$$

Далее, справедливо равенство

$$\psi_+^{(2)}(0,\lambda_n^0,q)=-\int\limits_0^{+\infty}\vartheta_2^0(t,\lambda_n^0)q(t)\int\limits_t^{+\infty}J^0(t,s;\lambda_n^0)\psi_+^0(s,\lambda_n^0)dsdt=$$

$$=\kappa_n\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0\chi_n^0)(t)q(t)\int\limits_t^{+\infty}(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)dsdt-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)q(s)\int\limits_0^{s}(\chi_n^0)^2(s)q(s)dtds\Bigg)=$$

$$=\kappa_n\left(\frac{1}{2}(\check q_n^+)^2-\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2-\gamma_n'(q,q)\right),$$

где в последнем переходе мы использовали тождество

$$\int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)q(t)\int\limits_0^{t}(\chi_n^0)^2(s)q(s)dsdt=\frac{\pi^2}{8}\,(\hat q_n^+)^2+\gamma_n'(q,q).$$

Наконец, дифференцирование формулы (3.18) по λ и леммы 3.2, 3.3 дают

$$\dot\psi_+^{(1)}(0,\lambda_n^0,q)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\dot\vartheta_2^0\psi_+^0+\vartheta_2^0\dot\psi_+^0\right)(t,\lambda_n^0)q(t)dt=$$

$$= -\kappa_n \int\limits_0^{+\infty} \Big(-(\psi_n^0)^2(t)\Psi_n^{(3)}(t) + \frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}(\psi_n^0\chi_n^0)(t) +$$

$$+ (\chi_n^0)^2(t)\Big(-\frac{1}{2} + \Psi_n^{(1)}(t)\Big)\Big) q(t)dt =$$

$$= -\kappa_n \left(\frac{\dot\kappa_n}{\kappa_n}\check q_n^+ - \frac{\pi^2}{8}\hat q_n^+ - \gamma_n'(1,q) - \gamma_n'(q,1) \right),$$

где в последнем переходе мы использовали тождество

$$\int\limits_0^{+\infty}(\chi_n^0)^2(s)q(s)\int\limits_s^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)dtds + \int\limits_0^{+\infty}(\psi_n^0)^2(s)q(s)\int\limits_0^{s}(\chi_n^0)^2(t)dtds =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}\hat q_n^+ + \gamma_n'(1,q) + \gamma_n'(q,1),$$

непосредственно вытекающее из определения интегралов $\gamma_n'(1,q)$ и $\gamma_n'(q,1)$. □

Доказательство теоремы 1.3. Пусть, для разнообразия, n нечетно (случай четного n разбирается аналогично). Положим $\tau_n = \lambda_n - \lambda_n^0 - \hat q_n$. Тогда имеем $\tau_n = O(n^{-1}\log^2 n)$ по лемме 1.1, и $\{\tau_n\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$ в силу теоремы 1.2. Рассуждения, аналогичные приведенным в п. 3.2, дают

$$\psi_+'(0,\lambda_n) = (\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) +$$

$$+ (\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0) + (\psi_+^{(2)})'(0,\lambda_n^0) + (\hat q_n + \tau_n)(\dot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) +$$

$$+ \hat q_n(\dot\psi_+^{(1)})'(0,\lambda_n^0) + \frac{\hat q_n^2}{2}(\ddot\psi_+^0)'(0,\lambda_n^0) + O(n^{-3/2}\log^4 n \cdot r_n'),$$

$$r_n' = (\lambda_n^0)^{1/4} a(\lambda_n^0).$$

Подставляя значения, полученные в леммах 3.5 и 3.9, и используя теорему 3.8, легко получить

$$\frac{\psi_+'(0,\lambda_n)}{\kappa_n'} = 1 - \check q_n^+ + \left(\frac{1}{2}(\check q_n^+)^2 - \frac{\pi^2}{8}(\hat q_n^+)^2\right)$$

$$+ \frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\hat q_n - \hat q_n\left(\frac{\dot\kappa_n'}{\kappa_n'}\check q_n^+ - \frac{\pi^2}{8}\hat q_n^+\right) + \frac{\ddot\kappa_n'}{2\kappa_n'}\hat q_n^2 + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta_1},$$

где $0<\delta_1<\delta$. Отсюда несложно вывести соотношение

$$\log\left[\frac{\psi'_+(0,\lambda_n^0)}{\kappa'_n}\right] = -\check{q}_n^+ + \frac{\dot{\kappa}'_n}{\kappa'_n}\,\hat{q}_n + \frac{\pi^2}{8}\,\hat{q}_n^+\hat{q}_n^- + \frac{\ddot{\kappa}'_n\kappa'_n-(\dot{\kappa}'_n)^2}{2\kappa'_n}\,\hat{q}_n^{\,2} + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta_1}.$$

Благодаря тождеству (3.1), имеем

$$\log\left[\frac{\psi'_-(0,\lambda_n^0)}{-\kappa'_n}\right] = \check{q}_n^- + \frac{\dot{\kappa}'_n}{\kappa'_n}\,\hat{q}_n + \frac{\pi^2}{8}\,\hat{q}_n^-\hat{q}_n^+ + \frac{\ddot{\kappa}'_n\kappa'_n-(\dot{\kappa}'_n)^2}{2\kappa'_n}\,\hat{q}_n^{\,2} + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta_1}.$$

Наконец, комбинируя два последних выражения, получаем

$$\nu_n(q) = \log\left[-\frac{\psi'_-(0,\lambda_n)}{\psi'_+(0,\lambda_n)}\right] = \check{q}_n^- + \check{q}_n^+ + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta_1} = \check{q}_n + \ell^2_{\frac{3}{4}+\delta_1},$$

что и требовалось доказать. □

§4. Доказательство теорем 3.6 и 3.8

Этот параграф целиком посвящен доказательству важных технических теорем 3.6 и 3.8. Напомним, что на эти оценки непосредственно опираются теоремы 1.2, 1.3.

4.1. Предварительные оценки.

Лемма 4.1. *Для всех $x\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 0$ и некоторой абсолютной константы $C>0$ справедливы неравенства*

$$|\psi_n^0(x)|\leqslant C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)},\qquad |\chi_n^0(x)|\leqslant C\,\frac{e^{\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Легко видеть, что оценка (2.11) для решения $\psi_+^0(x,\lambda_n^0)$ и асимптотика (3.5) дают

$$\left|\psi_n^0(x)\right| = \left|\psi_n^0(|x|)\right| = \frac{|\psi_+^0(|x|,\lambda_n^0)|}{K_n}\leqslant C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(|x|,\lambda_n^0)} = C\,\frac{e^{-\sigma(|x|,\lambda_n^0)}}{\rho(x,\lambda_n^0)}.$$

Установим справедливость второго из неравенств (4.1). В силу лемм 3.1, 3.2 имеем

$$\chi_n^0(x)\equiv-\frac{\vartheta_2^0(x,\lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)},\quad \psi_n^0(0)=\frac{\kappa_n}{K_n}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}(1+O(n^{-1})),$$
$$n=2m\to\infty,$$

$$\chi_n^0(x) \equiv \frac{\vartheta_1^0(x,\lambda_n^0)}{(\psi_n^0)'(0)}, \quad (\psi_n^0)'(0) = \frac{\kappa_n'}{K_n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}}(1+O(n^{-1})),$$
$$n=2m+1\to\infty.$$

Используя теперь оценку из леммы 2.8 для решений $\vartheta_{1,2}^0(x,\lambda_n^0)\equiv \vartheta_{1,2}(x,\lambda_n^0,0)$, легко получить требуемый результат. □

В дальнейшем нам также потребуется более точная информация о поведении функций $\psi_n^0(x)$, $\chi_n^0(x)$ на интервале $x \in (-\sqrt{\lambda_n^0},\sqrt{\lambda_n^0})$. В силу предыдущей леммы и определения функции $\rho(x,\lambda)$ (см. (2.8)) справедливо неравенство

$$|\psi_n^0(x)|,\, |\chi_n^0(x)| \leqslant \frac{C}{\rho(x,\lambda_n^0)} = O\Big((\lambda_n^0-x^2)^{-\frac{1}{4}}\Big), \quad |x|<\sqrt{\lambda_n^0}.$$

Положим

$$\sigma_n(x) = \int_0^x \sqrt{\lambda_n^0 - y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\lambda_n^0-x^2} + \lambda_n^0 \arcsin((\lambda_n^0)^{-1/2}x)\right),$$
$$|x|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}.$$

Лемма 4.2. *Для каждого $\beta\in\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ справедливы следующие равномерные при $n\geqslant 0$ и $|x|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}$ асимптотики:*

$$\psi_n^0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\left(\sigma_n(x)-\frac{\pi n}{2}\right)+O\Big((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\Big)}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/4}},$$

$$\chi_n^0(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\sigma_n(x)-\frac{\pi n}{2}\right)+O\Big((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\Big)}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/4}}.$$

Доказательство. Используя метод ВКБ для уравнения $\psi''-(x^2-\lambda_n^0)\psi=0$ (см. [7, стр. 34–35]), видим, что это уравнение имеет решение[3]

$$\psi(x)\equiv\widetilde{\psi}(x)\,(1+O(R(x)))\,, \quad |x|<\sqrt{\lambda_n^0},$$

[3] Отметим, что в цитируемом издании книги [7] дана неверная оценка погрешности $R(x)$. Предлагаемая (см. (13), [7]), подстановка $\psi=\widetilde{\psi}(u_1+u_2)$, $\psi'=\widetilde{\psi}\left[(\sqrt{Q}-\frac{Q'}{4Q})u_1-(\sqrt{Q}+\frac{Q'}{4Q})u_2\right]$ на самом деле приводит именно к предъявленному виду функции $R(x)$, а не к указанному в [7].

где

$$\widetilde{\psi}(x) \equiv Q^{-1/4}(x) \exp\left(\int_0^x \sqrt{Q(y)}dy\right), \qquad Q(x) \equiv x^2 - \lambda_n^0,$$

$$R(x) \equiv \int_0^x \left| \left(Q''Q - \frac{5}{4}(Q')^2 \right) Q^{-\frac{5}{2}}(y) \right| dy.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left| (Q''Q - \tfrac{5}{4}(Q')^2)Q^{-\frac{5}{2}}(y) \right| = (2\lambda_n^0 + 3y^2) \left| Q^{-\frac{5}{2}}(y) \right| =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} (\sqrt{\lambda_n^0} - |y|)^{-\frac{5}{2}} \right), \quad |y| < \sqrt{\lambda_n^0}.$$

Следовательно,

$$R(x) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} (\sqrt{\lambda_n^0} - |x|)^{-\frac{3}{2}} \right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\beta} \right),$$

$$|x| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta}.$$

Рассматривая вещественную и мнимую части решения $\widetilde{\psi}$, получаем следующие асимптотики:

$$\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0) = (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\cos(\sigma_n(x)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/4}},$$

$$\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0) = (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{\sin(\sigma_n(x)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/4}}.$$

Наконец, напомним, что справедливо представление

$$\psi_n^0(x) \equiv \psi_n^0(0)\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0), \quad \chi_n^0(x) \equiv -\frac{\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0)}{\psi_n^0(0)}, \quad n = 2m,$$

$$\psi_n^0(x) \equiv (\psi_n^0)'(0)\vartheta_2^0(x, \lambda_n^0), \quad \chi_n^0(x) \equiv \frac{\vartheta_1^0(x, \lambda_n^0)}{(\psi_n^0)'(0)}, \quad n = 2m+1.$$

Подставляя сюда асимптотики коэффициентов $\psi_n^0(0)$, $n = 2m$, и $(\psi_n^0)'(0)$, $n = 2m+1$, полученные при доказательстве леммы 4.1, выводим требуемый результат. $\square$

Следствие 4.3. *Для каждого* $\beta\in\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ *справедливы следующие равномерные при* $n\geqslant 0$ *и* $|x|\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}$ *асимптотики:*

$$(\psi_n^0\chi_n^0)(x)=\frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{\cos\left(2\sigma_n(x)\right)}{\lambda_n^0-x^2}\right)'+\frac{O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}},\tag{4.2}$$

$$(\chi_n^0)^2(x)-\frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(x)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{4}\left(\frac{\sin\left(2\sigma_n(x)\right)}{\lambda_n^0-x^2}\right)'+\frac{O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}}.\tag{4.3}$$

Доказательство. Докажем, например, формулу (4.2) (асимптотика (4.3) выводится аналогично). В силу леммы 4.2 справедливо соотношение

$$(\psi_n^0\chi_n^0)(x)=\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(2\sigma_n(x)\right)+O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{2(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}}.$$

Сравнивая это равенство с (4.2) и учитывая тождество $\sigma_n'(x)\equiv(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}$, видим, что они отличаются только слагаемым

$$\frac{(-1)^n\cos\left(2\sigma_n(x)\right)}{2}\cdot\frac{x}{(\lambda_n^0-x^2)^2}=O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_n^0-x^2)^2}\right)=O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}}{(\lambda_n^0-x^2)^{1/2}}\right),$$

что и требовалось доказать. □

Нам потребуется следующий технический результат.

Лемма 4.4. *Пусть для некоторой функции* $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *и некоторого числа* $\alpha\geqslant 0$ *справедливо соотношение* $x^{\alpha}f(x)\in L^2(\mathbb{R}_+)$. *Пусть* $\beta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{n}-n^{\beta}}^{\sqrt{n}+n^{\beta}}|f(x)|dx\right\}_1^{\infty}\right\|_{\ell^2_{\frac{\alpha}{2}-\beta-\frac{1}{4}}}\leqslant\ C(\alpha,\beta)\left\|x^{\alpha}f(x)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

где $C(\alpha,\beta)$ – *некоторая постоянная.*

Доказательство. Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{n}-n^{\beta}}^{\sqrt{n}+n^{\beta}}|f(x)|dx\right\}_1^{\infty}\right\|^2_{\ell^2_{\frac{\alpha}{2}-\beta-\frac{1}{4}}}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha-2\beta-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\sqrt{n}-n^{\beta}}^{\sqrt{n}+n^{\beta}}|f(x)|dx\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \int\limits_{\sqrt{n}-n^{\beta}}^{\sqrt{n}+n^{\beta}} |f(x)|^2 dx = 2\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2 \sum_{n:|x-\sqrt{n}|\leqslant n^{\beta}} n^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} dx.$$

Легко видеть, что условие $|x-\sqrt{n}|\leqslant n^{\beta}$ влечет $|x^2-n|\leqslant c(\beta)x^{1+2\beta}$, где $c(\beta)>0$ – некоторая постоянная. Следовательно,

$$\sum_{n:|x-\sqrt{n}|\leqslant n^{\beta}} n^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \leqslant C(\alpha,\beta)x^{1+2\beta}x^{2(\alpha-\frac{1}{2}-\beta)} = C(\alpha,\beta)x^{2\alpha},$$

что завершает доказательство требуемой оценки. □

4.2. Доказательство неравенств (3.11), (3.15) в теоремах 3.6, 3.8. Зафиксируем какое-либо $\delta\in\left(0,\frac{1}{18}\right)$ и положим $\beta=\frac{1}{6}-\delta$. Нам будет удобно разбить каждый из интегралов $\gamma_n(q,q)$, $\gamma_n'(q,q)$ на несколько слагаемых. Для этого рассмотрим следующее разбиение области интегрирования (см. рисунок 1):

$$\Omega_n = \{(t,s) : 0\leqslant s\leqslant t\} = \bigcup\nolimits_{j=0}^{3}\Omega_n^{(j)},$$

$$\Omega_n^{(0)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}\right\},$$

$$\Omega_n^{(1)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : \sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}\leqslant t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta}\right\},$$

$$\Omega_n^{(2)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : t\geqslant\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta},\ s\geqslant t-\tfrac{1}{2}\right\},$$

$$\Omega_n^{(3)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : t\geqslant\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta},\ s\leqslant t-\tfrac{1}{2}\right\}.$$

Нам также потребуется подразбиение области $\Omega_n^{(0)}$:

$$\Omega_n^{(0)} = \bigcup\nolimits_{j=0}^{k}\Omega_n^{(0,j)},$$

$$\Omega_n^{(0,j)} = \left\{(t,s)\in\Omega_n : \sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}\leqslant t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}\right\},$$

где конечная последовательность $\frac{1}{2}=\beta_0>\beta_1>\ldots>\beta_k>\beta_{k+1}=\beta$ удовлетворяет условиям

$$\beta_1>\frac{1}{3}(1+2\delta), \qquad \beta_{j+1}\geqslant\frac{2}{3}(\beta_j+\delta),\quad j=1,\ldots,k$$

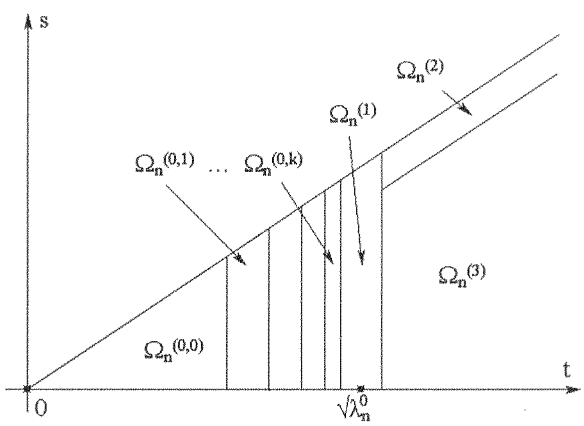

Рис. 1 Разбиение области интегрирования $\Omega_n = \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

(легко видеть, что такую последовательность всегда можно построить, если $\delta < \frac{1}{18}$).

Введем обозначения

$$\gamma_n^{(0,j)}(q,q) = \iint\limits_{\Omega_n^{(0,j)}} (\psi_n^0)^2(t) q(t) (\psi_n^0 \chi_n^0)(s) q(s)\, ds\, dt, \qquad j = 0, \dots, k,$$

аналогичные обозначения $\gamma_n^{(j)}(q,q)$, $j = 1,2,3$, для интегралов по областям $\Omega_n^{(j)}$, а также $\gamma_n^{\prime,(0,j)}(q,q)$ и $\gamma_n^{\prime,(j)}(q,q)$ для точно таких же составляющих интеграла $\gamma_n'(q,q)$. Мы будем отдельно оценивать нормы последовательностей $\{\gamma_n^{(0,j)}(q,q)\}_0^\infty$, $\{\gamma_n^{(j)}(q,q)\}_0^\infty$ и т. д.

Лемма 4.5. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\| \{\gamma_n^{(0,0)}(q,q)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C \|q\|^2_{\mathbf{H}}, \qquad \left\| \{\gamma_n^{\prime,(0,0)}(q,q)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C \|q\|^2_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{\beta_1}$.

Тогда легко видеть, что $\lambda_n^0 - s^2 \geqslant \lambda_n^0 - t^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta_1}$. Используя асимптотику (4.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\left|\int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|\int_0^t \left(\frac{\cos(2\sigma_n(s))}{\lambda_n^0-s^2}\right)' q(s)dt\right| +$$

$$+O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta_1}\right)\int_0^t \frac{|q(s)|ds}{(\lambda_n^0-s^2)^{1/2}} =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta_1}\right)\left(|q(0)|+|q(t)|+\int_0^t |q'(s)|ds\right) +$$

$$+O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-2\beta_1}\right)\int_0^t |q(s)|ds.$$

Ясно, что $|q(0)|$, $|q(t)|$, $\int_0^t |q(s)|ds = O(\|q\|_{\mathbf{H}})$. Кроме того, для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство[4]

$$\int_0^t |q'(s)|ds \leqslant \sqrt{t}\|q'\|_{L^2} \leqslant (\lambda_n^0)^{\varepsilon} t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta_1+\varepsilon}\right)(1+t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon})\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Перейдем к рассмотрению интеграла $\gamma_n^{(0,0)}(q,q)$. Используя оценку (4.1), видим, что

$$|(\psi_n^0)^2(t)| \leqslant \frac{C}{\rho^2(t,\lambda_n^0)} \leqslant \frac{C}{(\lambda_n^0-t^2)^{1/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_1}\right).$$

Значит,

$$|\gamma_n^{(0,0)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta_1+\varepsilon}\right)\int_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_1}} (1+t^{\frac{1}{2}-2\varepsilon})|q(t)|dt\cdot\|q\|_{\mathbf{H}} =$$

[4] Для наших целей достаточно выбрать, например, $\varepsilon=\beta_1-\frac{1}{3}(1+2\delta)$.

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta_1+\varepsilon}\right) \cdot \|q\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Для того, чтобы теперь получить требуемое неравенство, достаточно только заметить, что для достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо $\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\beta_1-\varepsilon > \frac{1}{2}+(\frac{3}{4}+\delta)$. $\square$

Лемма 4.6. *Для некоторой абсолютной константы C и всех $j=1,\dots,k$ справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,j)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant \|q\|_{\mathbf{H}}^2, \qquad \left\|\{\gamma_n^{\prime,(0,j)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}\leqslant t\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}$. Рассуждая точно так же, как и в предыдущем доказательстве, и используя неравенство $\int_0^t|q'(s)|ds \leqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}}\|q\|_{\mathbf{H}}$, получаем

$$\left|\int_0^t(\psi_n^0\chi_n^0)(s)q(s)ds\right| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\beta_{j+1}}\right)\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Далее, вспоминая оценку $|(\psi_n^0)^2(t)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_{j+1}}\right)$, видим, что

$$|\gamma_n^{(0,j)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\beta_{j+1}}\right) \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q(t)|dt \cdot \|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Теперь мы можем применить лемму 4.4 при $\alpha=1$. Поскольку $\|tq(t)\|_{L^2}\leqslant\|q\|_{\mathbf{H}}$, имеем

$$\left\|\left\{\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q(t)|dt\right\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}-\beta_j}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Осталось заметить, что $\left(\frac{1}{4}-\beta_j\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\beta_{j+1}\right) \geqslant \frac{3}{4}+\delta$. $\square$

Лемма 4.7. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}, \qquad \left\|\{\gamma_n^{\prime,(1)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. В отличие от предыдущих лемм, доказательство необходимой оценки для интеграла $\gamma_n^{\prime,(1)}(q,q)$ сложнее, чем для $\gamma_n^{(1)}(q,q)$, поскольку функция $(\chi_n^0)^2(s)$, вообще говоря, растет при $s\geqslant\sqrt{\lambda_n^0}$, в то время как функция $(\psi_n^0\chi_n^0)(s)$ убывает. Поэтому мы рассмотрим только второе неравенство. Используя лемму 4.1, видим, что

$$|\gamma_n^{\prime,(1)}(q,q)| \leqslant C\iint\limits_{\Omega_n^{(1)}} \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt.$$

Отметим, что $\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0)\geqslant 0$, $\rho^2(t,\lambda_n^0)\geqslant(\lambda_n^0)^{\frac{1}{6}}$ и $\displaystyle\int_0^t \frac{|q(s)|ds}{\rho^2(s,\lambda_n^0)} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)$. Следовательно,

$$|\gamma_n^{(1)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{2}{3}}\right)\int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta} |q(t)|dt\cdot\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Как и в предыдущем доказательстве, осталось применить лемму 4.4 (с $\alpha=1$), и заметить, что $\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)=\frac{3}{4}+\delta$. $\Box$

Лемма 4.8. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(2)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}, \qquad \left\|\{\gamma_n^{\prime,(2)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|^2_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Опять мы рассматриваем только второе неравенство. Имеем

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(q,q)| \leqslant C\iint\limits_{\Omega_n^{(2)}} \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt.$$

Напомним, что $\Omega_n^{(2)} = \left\{(t,s) : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta,\ t \geqslant s \geqslant t-\frac{1}{2}\right\}$. Так как $\sigma(t,\lambda_n^0) \geqslant \sigma(s,\lambda_n^0)$ и $\rho^2(t,\lambda_n^0) \geqslant \rho^2(s,\lambda_n^0) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\beta}$, получаем

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(q,q)| \leqslant 4(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta} \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty} |q(t)| \int\limits_{t-\frac{1}{2}}^{t} |q(s)|ds.$$

Применяя теперь неравенство Коши–Буняковского с учетом того, что $tq(t), sq(s) \in L^2$, выводим

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(q,q)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\beta} \cdot (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}\|q\|_{\mathbf{H}} \cdot (\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}\|q\|_{\mathbf{H}}\right) =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{5}{4}-\beta} \cdot \|q\|_{\mathbf{H}}^2\right),$$

откуда, в силу того, что $\beta = \frac{1}{6}-\delta > \delta$, вытекает требуемая оценка. $\square$

Лемма 4.9. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(3)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2, \qquad \left\|\{\gamma_n^{\prime,(3)}(q,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{3}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Доказательство. Мы по-прежнему рассматриваем только второе, более сложное, неравенство (доказательство первого может быть проведено по аналогичной схеме). Напомним, что $\Omega_n^{(3)} = \left\{(t,s) : t \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta,\ s \leqslant t-\frac{1}{2}\right\}$. Имеем

$$|\gamma_n^{\prime,(3)}(q,q)| \leqslant C \iint\limits_{\Omega_n^{(3)}} \frac{|q(t)q(s)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}dsdt$$

и

$$\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0) = \int\limits_s^t \sqrt{y^2-\lambda_n^0}\,dy \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2-\lambda_n^0} \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\beta}.$$

Следовательно, интегралы $\gamma_n^{\prime,(3)}(q,q)$ убывают экспоненциальным образом с ростом n, что доказывает лемму. $\square$

Замечание. Леммы 4.5–4.9 содержат в себе полное доказательство неравенств (3.11), (3.15), поскольку каждый интеграл $\gamma_n(q,q)$ (или $\gamma'_n(q,q)$) представляется в виде суммы

$$\gamma_n(q,q) = \gamma_n^{(0,0)}(q,q) + \gamma_n^{(0,1)}(q,q) + \dots \gamma_n^{(0,k)}(q,q)$$
$$+\gamma_n^{(1)}(q,q) + \gamma_n^{(2)}(q,q) + \gamma_n^{(3)}(q,q).$$

Отметим, что наше доказательство справедливо для любого значения $\delta \in \left(0, \frac{1}{18}\right)$.

4.3. Доказательство неравенств (3.12), (3.16) в теоремах 3.6, 3.8. Зафиксируем какое-либо $\delta \in \left(0, \frac{1}{12}\right)$ и положим $\beta = \frac{1}{6} - \delta$. Разобьем каждый из интегралов $\gamma_n(q,1)$ и $\gamma'_n(q,1)$ на четыре слагаемых:

$$\gamma_n^{(j)}(q,1) = \int\int\limits_{\Omega_n^{(j)}} (\psi_n^0)^2(t) q(t) (\psi_n^0 \chi_n^0)(s)\, ds dt, \quad j = 0, \dots, 3,$$

где области $\Omega_n^{(0)}, \dots \Omega_n^{(3)}$ определены в предыдущем пункте, и зададим интегралы $\gamma_n'^{,(0)}(q,1), \dots \gamma_n'^{,(3)}(q,1)$ аналогичным образом. Мы отдельно оценим нормы последовательностей $\{\gamma_n^{(0)}(q,1)\}_0^\infty$, $\{\gamma_n^{(1)}(q,1)\}_0^\infty$, и т.д. Таким образом, следующие четыре леммы содержат в себе полное доказательство неравенств (3.12) и (3.16).

Лема 4.10. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\| \{\gamma_n^{(0)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}, \qquad \left\| \{\gamma_n'^{,(0)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Мы рассмотрим только первую оценку, вторая доказывается аналогично. Пусть $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\lambda_n^0 - (\lambda_n^0)^\beta}$. Легко видеть, что тогда $\lambda_n^0 - t^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta}$. Используя лемму 4.3, получаем в этом случае

$$\left| \int\limits_0^t (\psi_n^0 \chi_n^0)(s) ds \right| = O\left(\frac{1}{\lambda_n^0 - t^2}\right) +$$
$$+ O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right) \int\limits_0^t \frac{ds}{(\lambda_n^0 - s^2)^{1/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right).$$

Следовательно,

$$|\gamma_n^{(0)}(q,1)| = \left| \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta} (\psi_n^0)^2(t) q(t) \int\limits_0^t (\psi_n^0\chi_n^0)(s)\,ds\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant O\left((\lambda_n^0)^{-\frac14-\frac32\beta}\right) \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta} \frac{|q(t)|dt}{\rho^2(t,\lambda_n^0)} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac34-\frac32\beta}\|q\|_{\mathbf{H}}\right).$$

Теперь осталось только заметить, что $\frac34+\frac32\beta > \frac12 + \left(\frac14+\delta\right)$. $\square$

Лемма 4.11. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}, \qquad \left\|\{\gamma_n^{\prime,(1)}(q,1)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. На этот раз мы рассмотрим только второе неравенство, поскольку доказательство первого проще и может быть проведено по аналогичной схеме. Нетрудно заметить, что

$$|\gamma_n^{\prime,(1)}(q,1)| \leqslant C \iint\limits_{\Omega_n^{(1)}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))}\,ds\,dt.$$

Используя оценки $\sigma(t,\lambda_n^0)\geqslant\sigma(s,\lambda_n^0)$, $\rho(t,\lambda_n^0)\geqslant(\lambda_n^0)^{\frac16}$ и $\int\limits_0^t \frac{ds}{\rho^2(s,\lambda_n^0)} = O(1)$, получаем

$$|\gamma_n^{\prime,(1)}(q,1)| = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac16}\right) \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta} |q(t)|\,dt.$$

Применяя теперь лемму 4.4 так же, как и при доказательстве леммы 4.7, и замечая, что $\frac16+\left(\frac14-\beta\right) = \frac14+\delta$, устанавливаем справедливость требуемого неравенства. $\square$

Лемма 4.12. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\| \{\gamma_n^{(2)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}, \qquad \left\| \{\gamma_n^{\prime,(2)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только последовательность интегралов $\gamma_n^{\prime,(2)}(q,1)$. Используя неравенство

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(q,1)| \leqslant C \iint\limits_{\Omega_n^{(2)}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))} ds dt,$$

оценки $\sigma(t,\lambda_n^0) \geqslant \sigma(s,\lambda_n^0)$, $\rho^2(t,\lambda_n^0) \geqslant \rho^2(s,\lambda_n^0) \geqslant \frac12(\lambda_n^0)^{\frac14+\frac12\beta}$ и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(q,1)| \leqslant 2(\lambda_n^0)^{-\frac12-\beta} \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty} |q(t)| dt = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac34-\beta} \|q\|_{\mathbf{H}} \right).$$

Все что остается – это заметить, что $\beta > \delta$. □

Лемма 4.13. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\| \{\gamma_n^{(3)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}, \qquad \left\| \{\gamma_n^{\prime,(3)}(q,1)\}_0^\infty \right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. По-прежнему, рассмотрим только вторую оценку, поскольку первая доказывается проще. Вновь используем неравенство

$$|\gamma_n^{\prime,(3)}(q,1)| \leqslant C \iint\limits_{\Omega_n^{(3)}} \frac{|q(t)|}{\rho^2(t,\lambda_n^0)\rho^2(s,\lambda_n^0)}\, e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))} ds dt.$$

Оценим функцию $\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0)$ при $(s,t) \in \Omega_n^{(3)}$:

$$\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0) = \int\limits_s^t \sqrt{y^2-\lambda_n^0}\, dy \geqslant \frac12 \sqrt{\left(t-\tfrac12\right)^2 - \lambda_n^0} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\lambda_n^0)^{\frac12\beta}\cdot\sqrt{t}}{2\sqrt2} \geqslant \frac{(\lambda_n^0)^{\frac12\beta}+\sqrt{s}}{4\sqrt2}.$$

Отсюда ясно, что интегралы $\gamma_n^{\prime,(3)}(q,1)$ экспоненциально убывают с ростом n. □

4.4. Доказательство неравенств (3.13), (3.17) в теоремах 3.6, 3.8. В этом пункте мы будем рассматривать только интегралы $\gamma_n'(1,q)$, доказательство оценок для $\gamma_n(1,q)$ может быть проведено аналогичным образом (на самом деле, даже более простым, поскольку в этом случае отсутствуют сложности, связанные с экспоненциальным ростом функции $(\chi_n^0)^2(s)-\frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)$ при $s\to+\infty$). Перепишем интеграл $\gamma_n'(1,q)$ в виде

$$\gamma_n'(1,q) = \int\limits_0^{+\infty} q(s)\Phi_n^0(s)ds,$$

$$\Phi_n^0(s) \equiv \left((\chi_n^0)^2(s) - \frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s)\right) \int\limits_s^{+\infty}(\psi_n^0)^2(t)dt.$$

Следующая лемма содержит в себе информацию о поведении функций $\Phi_n^0(s)$.

Лемма 4.14. (i) *Для каждого $\beta\in\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ справедлива следующая равномерная при $n\geqslant 0$ и $0\leqslant s\leqslant\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta$ асимптотика:*

$$\Phi_n^0(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_n^0)^{1/2}}\,\zeta\left((\lambda_n^0)^{-1/2}s\right)\cdot\left(\cos(2\sigma_n(s)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})\right), \tag{4.4}$$

где

$$\zeta(\tau) \equiv \frac{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}}, \quad \tau\in[0,1],$$

есть ограниченная функция на $[0,1]$, имеющая также ограниченную производную.

(ii) *Для всех $n\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ и некоторой абсолютной постоянной $C>0$ выполняется неравенство*

$$|\Phi_n^0(s)| \leqslant \frac{C}{(\lambda_n^0)^{1/6}}. \tag{4.5}$$

(iii) *Для всех $n\geqslant 0$, $s\geqslant\sqrt{\lambda_n^0}$ и некоторой абсолютной постоянной $C>0$ выполняется неравенство*

$$|\Phi_n^0(s)| \leqslant \frac{C}{(s^2-\lambda_n^0)^{3/2}}. \tag{4.6}$$

Доказательство. (i) Используя лемму 4.2, видим, что

$$\int_s^{+\infty} (\psi_n^0)^2(t)dt = \frac{1}{2} - \int_0^s (\psi_n^0)^2(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{1+(-1)^n \cos(2\sigma_n(t)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - t^2)^{1/2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}} s\right) + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right),$$

где в последнем переходе мы учли равенство

$$\frac{\cos(2\sigma_n(t))}{(\lambda_n^0 - t^2)^{1/2}} = -\left(\frac{\sin(2\sigma_n(t))}{\lambda_n^0 - t^2}\right)' + O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta}}{(\lambda_n^0 - x^2)^{1/2}}\right),$$

$$|t| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^\beta,$$

а также оценки $\lambda_n^0 - s^2 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta} \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\beta}$ и $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\lambda_n^0}} \frac{dt}{(\lambda_n^0 - t^2)^{1/2}} = O(1)$.

Применяя лемму 4.2 еще раз, приходим к соотношению

$$(\chi_n^0)^2(s) - \frac{\pi^2}{4}(\psi_n^0)^2(s) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2} \cdot \frac{\cos(2\sigma_n(s)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\beta})}{(\lambda_n^0 - s^2)^{1/2}},$$

$$|s| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^\beta.$$

Перемножая теперь полученные асимптотики, легко вывести формулу (4.4).

(ii) Пусть $s \leqslant \sqrt{\lambda_n^0}$. Используя лемму 4.1 и неравенство $\int_s^{+\infty} (\psi_n^0)^2(t)dt \leqslant \frac{1}{2}$, легко видеть, что

$$|\Phi_n^0(s)| \leqslant \frac{C}{\rho^2(s, \lambda_n^0)} \leqslant \frac{C}{(\lambda_n^0)^{1/6}}.$$

Если же $s \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}$, то, в силу той же леммы, нам достаточно, например, доказать, что выражение $\int_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0))} dt$ ограничено. Имеем

$$\int_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0) - \sigma(s,\lambda_n^0))} dt = \int_s^{+\infty} e^{-2\int_s^t \sqrt{y^2 - \lambda_n^0}\, dy} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\lambda_n^0} \int\limits_1^{+\infty} e^{-2\lambda_n^0 \int_1^t \sqrt{y^2-1}\,dy} dt = O(1),$$

где мы воспользовались убыванием рассматриваемого выражения при $s \geqslant \sqrt{\lambda_n^0}$.

(iii) Неравенство (4.6) вытекает из леммы 4.1, оценок $\rho^2(t,\lambda_n^0) \geqslant \rho^2(s,\lambda_n^0) \geqslant (s^2-\lambda_n^0)^{1/2}$, а также неравенства

$$\int\limits_s^{+\infty} e^{-2(\sigma(t,\lambda_n^0)-\sigma(s,\lambda_n^0))} dt \leqslant \int\limits_s^{+\infty} e^{-2(t-s)\sqrt{s^2-\lambda_n^0}} dt = \frac{1}{2(s^2-\lambda_n^0)^{1/2}}. \quad \square$$

Следствие 4.15. *Для каждого $\beta \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ справедлива следующая равномерная при $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant s \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^\beta$ асимптотика:*

$$\Phi_n^0(s) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n^0} \Big(\zeta_1((\lambda_n^0)^{-1/2}s)\cos(2\sigma_n(s))\Big)' + O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right), \quad (4.7)$$

где

$$\zeta_1(\tau) \equiv \frac{\zeta(\tau)}{2(1-\tau^2)^{1/2}} \equiv \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\tau}{1-\tau^2}, \quad \tau \in [0,1].$$

Доказательство. Как и в доказательстве следствия 4.3, для того, чтобы вывести асимптотику (4.7) из асимптотики (4.4), необходимо лишь заметить, что

$$\frac{\zeta_1'\left((\lambda_n^0)^{-1/2}s\right)}{(\lambda_n^0)^{3/2}} = O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-3/2}}{(1-(\lambda_n^0)^{-1}s^2)^{3/2}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta}\right),$$
$$|s| \leqslant \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^\beta. \quad \square$$

Далее мы, как и в предыдущих двух пунктах, разобьем рассматриваемые интегралы на несколько слагаемых. С этой целью зафиксируем $\delta \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ и построим такую конечную последовательность $\frac{1}{2} = \beta_0 > \beta_1 > \ldots \beta_k > \beta_{k+1} = \beta = \frac{1}{6} - \delta$, что

$$\beta_1 = \frac{3}{8}, \qquad \beta_{j+1} \geqslant 2\beta_j - \frac{1}{2} + 2\delta, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Положим

$$\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} q(s)\Phi_n^0(s)ds, \qquad j=0,\ldots,k,$$

$$\gamma_n'^{,(1)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta}}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta}} q(s)\Phi_n^0(s)ds,$$

$$\gamma_n'^{,(2)}(1,q) = \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^{\beta}}^{+\infty} q(s)\Phi_n^0(s)ds.$$

Следующие леммы 4.16–4.19 посвящены оценке норм последовательностей $\{\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q)\}$, $\{\gamma_n'^{,(1)}(1,q)\}$, $\{\gamma_n'^{,(2)}(1,q)\}$. При этом самая сложная часть доказательства – это оценка интегралов $\gamma_n'^{,(0,0)}(1,q)$, которой посвящен отдельный п. 4.5. В этом пункте мы рассмотрим все остальные слагаемые.

Лемма 4.16. *Для некоторой абсолютной константы C и всех $j=1,\ldots,k$ справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,j)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}},$$

$$\left\|\{\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac14+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Как уже отмечено выше, мы рассматриваем только второе неравенство. Применяя следствие 4.15 и интегрируя по частям, получаем

$$\gamma_n'^{,(0,j)}(1,q) = \frac{1}{\lambda_n^0}\, O\left(\zeta_1\left(1-(\lambda_n^0)^{-\frac12+\beta_{j+1}}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\|q\|_{\mathbf{H}} + \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_j}}^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{\beta_{j+1}}} |q'(s)|ds\right).$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1\left(1-(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}+\beta_{j+1}}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_{j+1}}\right).$$

Ясно, что $\left\{O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\beta_{j+1}}\|q\|_{\mathbf{H}}\right)\right\}_0^\infty \in \ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}$, поскольку $\frac{1}{2}\beta_{j+1} \geqslant \frac{1}{2}\beta > \delta$. Что касается второго слагаемого, то все, что необходимо – это применить лемму 4.4 (с $\alpha=0$), и заметить, что $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\beta_{j+1}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\beta_j\right) \geqslant \frac{1}{4}+\delta$ по определению последовательности $\{\beta_j\}$. $\square$

Лемма 4.17. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(1)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}},$$

$$\left\|\{\gamma_n^{\prime,(1)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Мы рассматриваем только второе неравенство, первое может быть получено при помощи аналогичных рассуждений. Используя оценку (4.5), находим

$$|\gamma_n^{\prime,(1)}(1,q)| \leqslant O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{6}}\right) \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^\beta}^{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta} |q(s)|ds.$$

Теперь мы применяем лемму 4.4 (с $\alpha=1$) и замечаем, что $\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{4}-\beta\right) = \frac{1}{4}+\delta$. $\square$

Лемма 4.18. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(2)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}},$$

$$\left\|\{\gamma_n^{\prime,(2)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Мы по-прежнему ограничиваемся рассмотрением только второго неравенства. Используя оценку (4.6), а также неравенство $s^2-\lambda_n^0 \geqslant (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\beta}$, находим

$$|\gamma_n^{\prime,(2)}(1,q)| \leqslant C \cdot \int\limits_{\sqrt{\lambda_n^0}+(\lambda_n^0)^\beta}^{+\infty} \frac{|q(s)|ds}{(s^2-\lambda_n^0)^{3/2}} = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\beta}\|q\|_{\mathbf{H}}\right).$$

Теперь достаточно заметить, что $\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\beta > \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\delta\right)$. $\square$

4.5. Оценка интегралов $\gamma_n^{(0,0)}(1,q)$ и $\gamma_n^{\prime,(0,0)}(1,q)$.

Лемма 4.19. *Для некоторой абсолютной константы C справедливы неравенства*

$$\left\|\{\gamma_n^{(0,0)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}},$$

$$\left\|\{\gamma_n^{\prime,(0,0)}(1,q)\}_0^\infty\right\|_{\ell^2_{\frac{1}{4}+\delta}} \leqslant C\|p\|_{\mathbf{H}}\|q\|_{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем только второе неравенство, поскольку первое может быть доказано аналогично. Применяя следствие 4.15 и интегрируя по частям, точно так же, как и при доказательстве леммы 4.16, видим, что нам необходимо только установить оценку

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_n^0)^{-\frac{3}{2}+2\delta}|I_n(q')|^2 \leqslant C\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{4.8}$$

где

$$I_n(q') = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s\right)\cos(2\sigma_n(s)) \cdot q'(s)ds.$$

Непосредственная оценка интеграла $I_n(q')$ при помощи неравенства Коши–Буняковского дает результат, несколько худший, чем (4.8). Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы квалифицированно учесть осцилляции функций $\cos(2\sigma_n(s))$. Положим

$$\xi_n(s) \equiv \mathbb{1}_{\left[0,\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}\right]} \cdot \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s) \cdot \cos(2\sigma_n(s)).$$

Для начала вычислим нормы функций ξ_n в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Имеем

$$\|\xi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \asymp \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \left|\zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\right|^2 ds =$$

$$= (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{1-(\lambda_n^0)^{-1/8}} |\zeta_1(\tau)|^2 d\tau \asymp (\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}} \log \lambda_n^0.$$

Пусть $m>n$. Оценим величину

$$(\xi_n, \xi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s)\cdot$$

$$\cdot \cos(2\sigma_n(s))\cos(2\sigma_m(s))ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n^0}-(\lambda_n^0)^{3/8}} \zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s)\cdot$$

$$\cdot\Big(\cos 2(\sigma_n(s)-\sigma_m(s)) - \cos 2(\sigma_n(s)+\sigma_m(s))\Big)ds.$$

Легко видеть, что для $s\in\left[0, \sqrt{\lambda_n^0} - (\lambda_n^0)^{3/8}\right]$ выполняются соотношения

$$\left[\zeta_1((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)\zeta_1((\lambda_m^0)^{-\frac{1}{2}}s)\right]' = O\left(\frac{(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}}{(1-(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}}s)^2}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}-2\beta_1}\right) =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}}\right),$$

а также

$$\int\limits_0^s \cos 2(\sigma_n(t)+\sigma_m(t))\,dt = O\left(\frac{1}{\sigma_n'(t)+\sigma_m'(t)}\right) =$$

$$= O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta_1}\right) = O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{7}{16}}\right)$$

и

$$\int_0^s \cos 2(\sigma_n(t)-\sigma_m(t))\,dt = O\left(\frac{1}{\sigma_n'(t)-\sigma_m'(t)}\right) = O\left(\frac{(\lambda_m^0)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_m^0-\lambda_n^0}\right)$$

(мы использовали монотонность функций $\sigma_n'(t)\pm\sigma_m'(t)=\sqrt{\lambda_n^0-s^2}\pm\sqrt{\lambda_m^0-s^2}$ при выводе двух последних оценок). При помощи интегрирования по частям получаем

$$\left|(\xi_n\,,\,\xi_m)_{L^2(\mathbb{R})}\right| = O\left((\lambda_n^0)^{\frac{1}{4}}\right)\cdot O\left((\lambda_n^0)^{-\frac{7}{16}}+\frac{(\lambda_m^0)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_m^0-\lambda_n^0}\right).$$

В частности, верно

$$\left|(\xi_n,\,\xi_m)_{L^2(\mathbb{R})}\right| = O(1), \qquad m-n\geqslant m^{\frac{3}{4}}.$$

Рассмотрим теперь какую-либо последовательность индексов n_k, удовлетворяющую условиям

$$n_k\in\left[k^{4+\varepsilon},(k+1)^{4+\varepsilon}\right], \qquad k\geqslant 1,$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, точное значение которого нам будет удобнее определить позже. Мы будем также предполагать, что либо все n_k выбираются из левых половин соответствующих отрезков, либо все – из правых (в таком случае мы можем гарантировать справедливость условия $n_{k+1}-n_k\geqslant n_{k+1}^{(3+\varepsilon)/(4+\varepsilon)}\geqslant n_{k+1}^{3/4}$). Используя неравенства для скалярных произведений (ξ_n,ξ_m) и двустороннюю оценку норм $\|\xi_n\|$, полученные ранее, а также техническую лемму 4.20, приведенную ниже, легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\left(q',\frac{\xi_{n_k}}{\|\xi_{n_k}\|}\right)_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \leqslant C\cdot\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\|\xi_n\|^2\asymp(\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}}\log\lambda_n^0\leqslant(\lambda_n^0)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda_{n_k}^0)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}|I_{n_k}(q')|^2\leqslant C\cdot\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

где константа в правой части не зависит от выбора последовательности $\{n_k\}_1^\infty$. Проводя теперь усреднение по всем таким последовательностям, устанавливаем справедливость неравенства

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n^0)^{-\frac{3+\varepsilon}{4+\varepsilon}}\cdot(\lambda_n^0)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}|I_n(q')|^2\leqslant C\cdot\|q'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Осталось только выбрать такое значение ε, что $\frac{3+\varepsilon}{4+\varepsilon}+\frac{1}{2}+\varepsilon=\frac{3}{2}-2\delta$. Мы получили неравенство (4.8), что и требовалось. $\square$

Нам осталось доказать следующую вспомогательную абстрактную лемму.

Лемма 4.20. *Пусть семейство векторов $\{e_k\}_1^\infty\subset H$ гильбертова пространства H удовлетворяет условиям*

$$\|e_k\|=1,\quad k\geqslant 1,\qquad |(e_k\,,e_l)|\leqslant\frac{c}{k^{1+\varepsilon}l^{1+\varepsilon}},\quad k,l\geqslant 1,$$

где $c,\varepsilon>0$ – некоторые постоянные. Тогда для некоторой постоянной $C=C(c,\varepsilon)$ и всех $h\in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|(h,e_k)|^2\leqslant C\cdot\|h\|^2.$$

Доказательство. Переходя к меньшему значению ε и отбрасывая некоторое число начальных векторов, мы можем добиться того, чтобы постоянная c стала достаточно мала, а точнее, того, чтобы выполнялось неравенство $c\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-1-\varepsilon}<\frac{1}{2}$. Ортогонализуем последовательность $\{e_k\}_1^\infty$. Пусть разложение проекции вектора e_{n+1} на подпространство, порожденное векторами $e_1,\ldots,e_n$, имеет вид $p_{1,n+1}e_1+\ldots+p_{n,n+1}e_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}p_{i,n+1}(e_i,e_j)=(e_{n+1},e_j),\quad j=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|(e_{n+1},e_j)|^2=O(n^{-2-2\varepsilon}).$$

Замечание, сделанное в начале доказательства, обеспечивает квалифицированное диагональное преобладание в матрице $\{(e_i,e_j)\}_{i,j=1}^n$. Значит, $\sum_{i=1}^n|p_{i,n+1}|^2=O(n^{-2-2\varepsilon})$, и, далее,

$\|p_{1,n+1}e_1+\ldots+p_{n,n+1}e_n\|^2 = O(n^{-2-2\varepsilon})$. Обозначим через $\{\widetilde{e}_k\}_1^\infty$ последовательность векторов, получающуюся из $\{e_k\}_1^\infty$ при помощи процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Тогда имеем $\sum_{k=1}^{+\infty}\|e_k-\widetilde{e}_k\|^2 = O(1)$. Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|(h,e_k)|^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{+\infty}|(h,\widetilde{e}_k)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\|e_k-\widetilde{e}_k\|^2\cdot\|h\|^2 \leqslant C\cdot\|h\|^2,$$

что и требовалось доказать. □

Литература

1. H. P. McKean, E. Trubowitz, *The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator.* — Comm. Math. Phys. **82**, no. 4 (1981/82), 471–495.
2. J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory.* — Academic Press, Boston (1987).
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие транцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортональные многочлены.* — "Наука", Москва (1974).
4. D. Chelkak, P. Kargaev, E. Korotyaev, *Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization.* — Preprint SFB 288, No 573, Berlin (2002).
5. D. Chelkak, P. Kargaev, E. Korotyaev, *An Inverse Problem for an Harmonic Oscillator Perturbed by Potential: Uniqueness.* — Lett. Math. Phys. **64**, (1) (April 2003), 7–21.
6. F. Olver, *Two inequalities for parabolic cylinder functions.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **57** (1961), 811–822.
7. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений.* — "Наука", Москва (1983).

Chelkak D. S. The asymptotics of spectral data of the harmonic oscillator perturbed by a potential.

The asymptotics of spectral data of the perturbed harmonic oscillator $-y''+x^2y+q(x)y$ are obtained for the potentials $q(x)$ such that $q', xq \in L^2(\mathbb{R})$. These results are important for the solution of the corresponding inverse spectral problem.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: dmitri@DC6651.spb.edu

Поступило 26 сентября 2003 г.