Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

А. М. Коточигов

СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ С S–Й ПРОИЗВОДНОЙ ИЗ КЛАССА ХАРДИ

§1. Введение

В работе исследуется поведение следов аналитических в круге функций на множествах неединственности. Подмножество в круге называется *множеством свободной интерполяции*, если при сужении на него аналитические функции из заданного класса утрачивают всякие следы аналитичности. Общее описание этого явления в точных терминах невозможно. Во всех конкретных примерах полная потеря аналитичности у следов функций на интерполяционном множестве совершенно очевидна, но проявляется каждый раз своим способом. В работе Карлесона [1], положившей начало такого рода исследованиям, получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы следы ограниченных аналитических функций на заданном множестве порождали в точности все пространство ограниченных функций на этом множестве. Эта задача и способ ее решения послужили образцом для огромного числа последующих работ. Решение задачи свободной интерполяции, как правило, осложняется тем, что одновременно с описанием структуры множества требуется подбирать естественное описание для пространства следов. Пространства ограниченных аналитических функций и пространства аналитических функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, являются единственными исключениями. Шапиро и Шилдс [2] получили решение задачи свободной интерполяции для всей шкалы пространств Харди. Оказалось, что структура множеств свободной интерполяции здесь такая же, как у пространства ограниченных аналитических функций, а пространство следов образует идеальное пространство и, тем самым, не несет никакой остаточной аналитичности. При переходе к пространствам аналитических функций, гладких

Работа выполнена при поддержке гранта “Ведущие научные школы” НШ-2266-2003-1.

вплоть до границы, задача свободной интерполяции усложняется. Интерполяционное множество может теперь выходить на границу области аналитичности. В работе автора [3] было показано, что граничная часть интерполяционного множества должна удовлетворять некоторому геометрическому условию – условию пористости. Исследования Дынькина [4], Широкова [5], Бруны [6] показали, что это условие является и достаточным для ряда пространств аналитических функций, гладких вплоть до границы, в том числе и для пространств функций с производной из классов Харди H^p $(1 < p < \infty)$. Описание пространства следов для пространств функций с производной из классов Харди оказывается содержательной задачей, причем главной проблемой становится описание следов на граничной части интерполяционного множества. При $p = 1$ или $p = \infty$ описание пространства следов становится самостоятельной трудной задачей, решение которой для $p = 1$ получено Дынькиным [7]. Описание следов аналитических функций, гладких вплоть до границы, на внутренней части интерполяционного множества не требует специальных усилий, но допускает разные интерпретации. В упомянутых работах Дынькина принято "жесткое" описание, когда функция интерполируется вместе со всеми производными, существующими у нее в замыкании области (интерполяция локальных ростков). При этом интерполяционные множества вновь описываются условием Карлесона из теоремы об интерполяции ограниченными аналитическими функциями. Естественно рассмотреть задачу интерполяции и для случая "мягкого" описания пространства следов, когда в каждой внутренней точке интерполируется только значение функции. Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа. Мягкое описание пространства следов делает структуру этого пространства более сложной. Здесь мы рассмотрим только простейший вариант интерполяции, ограничиваясь интерполяционными множествами, удовлетворяющими условию Штольца. Легко проверяется, что при такой постановке задачи интерполяционное множество уже не должно удовлетворять жесткому условию разделения точек. Любое интерполяционное множество в этом случае можно представить в виде объединения нескольких редких множеств. Число редких множеств в объединении определяется степенью гладкости функций. Это условие, по-видимому, является и достаточным во всей шкале этих пространств. Здесь будет приведено доказательство достаточности только для $p = \infty$, при этом мы строим непрерывный линейный оператор продолжения, заданный на естественном пространстве следов. Теорема об интерполяции операторов позволила бы получить достаточность этих условий для всех показателей p, если бы мы доказали аналогичное утверждение для $p = 1$. Однако технические проблемы, возникающие в этом случае, значительно увеличили бы объем статьи; мы откладываем эти рассмотрения до следующей публикации. Трудности, возникающие при $p = 1$, вполне естественны, так как тогда (в отличии от случая $p > 1$) следы соответствующих функций не образуют идеального пространства. Подготавливая базу для решения задачи в случае $p = 1$, мы приводим тождества, позволяющие восстанавливать функцию по ее разделенным разностям. Эти достаточно громоздкие формулы переносятся с функций на дискретном множестве на аналитические функции, гладкие вплоть до границы. Мы строим аналитические функции, ведущие себя на интерполяционном множестве как сплайны соответствующей гладкости. Идея и возможность построения таких функций впервые возникли и были реализованы в работе С. А. Виноградова [8].

§2. Обозначения и формулировка основного результата

Пусть D – единичный круг в комплексной плоскости, $\mathcal{A}(D)$ – пространство всех аналитических в круге функций. Напомним определение пространств Харди

$$H^p = \{f \in \mathcal{A}(D) : \sup_{r \in (0,1)} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt < \infty\}.$$

Основной объект наших исследований – пространство $H_p^{(s)}$ функций с s-й производной из класса Харди.

Определение 2.1. $H_p^{(s)} = \{f \in \mathcal{A}(D) : f^{(s)} \in H^p\}$.

Всюду в этой работе мы предполагаем, что кандидат на интерполяцию – множество E, – является дискретным множеством, удовлетворяющим *условию Штольца*.

Определение 2.2. $E = \{z_n\} \subset D,\ z_n \to 1,\ |\arg(1 - z_n)| < \pi/2 - \varepsilon.$

Для описания структуры интерполяционных множеств нам потребуется еще одно определение.

Определение 2.3. *Множество E удовлетворяет условию редкости, если существует положительная постоянная δ такая, что $\{z : |z - z_n| < \delta(1 - |z_n|)\} \cap E = \{z_n\}$ для любого n.*

Напомним, что для множеств, удовлетворяющих условию Штольца, условие редкости эквивалентно условию Карлесона, описывающему интерполяционные множества для пространства ограниченных аналитических функций.

Перейдем к описанию пространства следов в терминах разделенных разностей. Функцию x на множестве E естественно рассматривать как последовательность $x(z_n) = x_n$. Разделенные разности определяются по индукции. Для унификации обозначений будем называть разделенной разностью нулевого порядка значение функции в точке: $[z_n]_x = x_n$.

Определение 2.4. *Разделенная разность s-го порядка при $s > 0$ задается формулой*

$$[z_n, \dots, z_{n+s}]_x = \frac{[z_n, \dots, z_{n+s-1}]_x - [z_{n+1}, \dots, z_{n+s}]_x}{z_n - z_{n+s}}.$$

Проанализируем, вначале, попытку ввести норму на пространстве следов, не учитывающую структуры множества E. Норма формируется на основе предположения о том, что разделенная разность ведет себя как соответствующая производная и различные разделенные разности не зависят друг от друга:

$$w_p^{(s)}(E) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |[z_n, \dots, z_{n+s}]_x|^p |1 - z_n| < \infty\} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty.$$

Легко обнаружить, что это определение не годится для наших целей. Посмотрев на пробные функции, равные 1 в одной точке множества E и 0 во всех остальных точках, легко понять, что нумерация точек должна быть такой, чтобы всякий набор $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+s}$ реализовывал группу самых близких между собой точек из множества E. Только очень регулярные последовательности допускают такую нумерацию. Таковыми, в конечном счете, окажутся и интерполяционные множества, но для вывода необходимости соответствующих условий нам надо иметь определение, не зависящее от выбора нумерации. С этой целью мы введем норму в пространстве следов, используя дискретный аналог максимальных функций. Назовем *s-оболочкой точки z_n* конечную последовательность $Z_n = \{z_{n_0}, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}\} \subset E$, где $z_n = z_{n_0}$, $|z_n - z_{n_1}| \leqslant |z_n - z_{n_2}| \leqslant \dots \leqslant |z_n - z_{n_s}| \leqslant |z_n - z_m|$ для $z_m \in E \setminus Z_n$.

Экстремальное свойство оболочек проявляется в том, что для любого n функция $h(z_m) = \delta_{n,m}$ удовлетворяет неравенству $|[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_h| \geqslant |[z_n, z_{k_1}, \dots, z_{k_s}]_h|$ для любого набора различных точек $z_{k_1}, \dots, z_{k_s} \in E \setminus \{z_n\}$.

Определение 2.5. *Положим*

$$w_p^{(s)}(E) = \Big\{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_x|^p |z_n - z_{n_s}| < \infty\Big\}$$

$$\text{при} \quad 1 \le p < \infty;$$

$$w_\infty^{(s)}(E) = \big\{(x_n) : \sup_n |[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_x| < \infty\big\}.$$

В обоих случаях s-я разделенная разность вычисляется для s-оболочки точки z_n.

Определение 2.6. *Будем говорить, что E – интерполяционное множество для пары пространств $H_p^{(s)}$, $w_p^{(s)}$, если для любой функции $x \in w_p^{(s)}$ найдется функция $f \in H_p^{(s)}$ такая, что $f(z) = x(z)$ для любого $z \in E$.*

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.7. *Пусть множество E удовлетворяет условию Штольца.*

1. *Если множество E является интерполяционным для пары пространств $H_p^{(s)}$, $w_p^{(s)}(E)$ при $1 \le p < \infty$, то оно может быть представлено как объединение не более чем s редких множеств.*
2. *E является интерполяционным для пары пространств $H_\infty^{(s)}$, $w_\infty^{(s)}(E)$ тогда и только тогда, когда оно может быть представлено как объединение не более чем $(s+1)$-го редкого множества.*

План доказательства.

В §3 мы выведем необходимость условий, сформулированных в теореме, и докажем соответствующую теорему вложения (оператор сужения непрерывно отображает $H_p^{(s)}$ в предполагаемое пространство следов). Основная работа приходится на доказательство достаточности этих условий, точнее, на построение оператора продолжения, действующего из пространства $w_\infty^{(s)}(E)$ в пространство $H_\infty^{(s)}$. Построению оператора предшествует приведенный в §4 вывод вспомогательного тождества, позволяющего восстановить последовательность (x_n) по набору ее разделенных разностей. Это тождество составляет основу построения оператора продолжения. В §5 мы последовательно вводим несколько семейств вспомогательных аналитических функций, которые, в конце концов, дают функции, воспроизводящие в точках множества E значения коэффициентов вспомогательного тождества. Это позволяет дать формальное описание оператора продолжения. Оценки построенных вспомогательных функций составляют содержание заключительного §6. На основе этих оценок легко доказывается непрерывность построенного оператора продолжения при $p = \infty$.

В ходе доказательства теоремы мы будем обозначать все оценочные константы символом C. Обозначение $f(x) \asymp g(x)$ используется для сокращенной записи двусторонних оценок для пары положительных функций f и g.

§3. Доказательство необходимости условий теоремы

Требуемое утверждение следует из оценок разделенных разностей. В свою очередь, оценки получаются из тождеств, которые можно найти в книге А. О. Гельфонда [9, глава 1, §4]:

$$[a_0, a_1, .., a_s]_f = \sum_{k=0}^{s} \frac{f(a_k)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{s} (x_k - x_j)}, \tag{3.1}$$

$$[a_0, a_1, .., a_s]_f = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{s-1}} f^{(s)}(a_0 + (a_1 - a_0)t_1 + \cdots + (a_s - a_{s-1})t_s) dt_s \cdots dt_1, \tag{3.2}$$

и для аналитических в круге функций справедливо еще одно представление:

$$[a_0, a_1, .., a_s]_f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(w)dw}{\prod\limits_{j=0}^{s}(w - x_j)}. \qquad (3.3)$$

Предложение 3.1. *Если* $f \in H_p^{(s)}$ *и* $a_0, a_1, \ldots, a_s \in D$, *то справедлива оценка*

$$\big|\,[a_0, a_1, .., a_s]_f\,\big| \leq C \frac{\|f\|}{\min_k (1 - |a_k|)^{1/p}}.$$

Доказательство. Теорема об интерполяции операторов позволяет ограничиться неравенствами в крайних точках шкалы. Рассмотрим вначале случай $p = \infty$. Тождество (3.2) позволяет написать неравенство

$$|[a_0, a_1, .., a_s]_f| \leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{s-1}} |f^{(s)}(a_0 + (a_1 - a_0)t_1 + \cdots +$$
$$+(a_s - a_{s-1})t_s)|dt_s \cdots dt_1 \leqslant C\|f\|,$$

т.е. в этом случае нужная оценка выполнена.

В случае $p = 1$ мы начнем с того же тождества, представим функцию $f^{(s)}$ как интеграл Коши от ее граничных значений на окружности, а затем поменяем порядок интегрирования. Это ведет к оценке

$$|[a_0, a_1, .., a_s]_f| \leqslant C \int\limits_{\partial D} |f^{(s)}(w)|$$
$$\left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{s-1}} \frac{dt_s \cdots dt_1}{|w - (a_0 + (a_1 - a_0)t_1 + \cdots + (a_s - a_{s-1})t_s)|} \right) |dw|.$$

Заменив подынтегральное выражение его наибольшим значением, получим

$$\big|[a_0, a_1, .., a_s]_f\big| \leqslant C\|f\| \frac{1}{\min_k (1 - |a_k|)}.$$

Следовательно, неравенство справедливо и при $p = 1$, и остается проинтерполировать его между $p = 1$ и $p = \infty$. □

Полученное неравенство позволяет получить оценку, которая учитывает наличие корней у функции.

Следствие 3.2. *Пусть* $f \in H_p^{(s)}$ *и* $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_s) = 0$, *тогда*

$$|f(a)| \le C|a-a_1|\cdots|a-a_s|\frac{\|f\|}{\min_k(1-|a_k|)^{1/p}}.$$

Доказательство. Из формулы (3.1) следует, что

$$f(a) = (a-a_1)\cdots(a-a_s)\left(\frac{f(a)}{(a-a_1)\cdots(a-a_s)}+\right.$$
$$\frac{f(a_1)}{(a_1-a)(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_s)}+\cdots+$$
$$\left.\frac{f(a_s)}{(a_s-a)(a_s-a_1)\cdots(a_s-a_{s-1})}\right)=$$
$$(a-a_1)\cdots(a-a_s)[a,a_1,..,a_s]_f; \qquad (3.4)$$

остается сослаться на предложение 3.1. □

Если корни функции f хорошо сгруппированы, то тем же способом можно оценить производную. Нам потребуется оценка производной в точке, где сама функция обращается в ноль.

Предложение 3.3. *Пусть* $f(a_j) = 0,\ j = 1,2,\ldots,s$, *и существует число* $\delta < 1$ *такое, что* $a_k \in \{z : |z-a_1| < \delta(1-|a_1|)\}$. *Тогда справедлива оценка*

$$|f'(a_1)| \le C\frac{\|f\|}{(1-|a_1|)^{1/p}}\prod_2^s|a_1-a_k|.$$

Доказательство. Уточним обозначения. Будем считать, что $|a_1-a_2| \le |a_1-a_k|$ и положим $r = \frac{1}{2}\min(|a_1-a_2|, 1-|a_1|)$, $\Gamma_r = \{w : |w-a_1| = r\}$. Заметим, что из условия $|w-a_1| = r$ вытекает соотношение $|w-a_k| \asymp \min(|a-a_k|, 1-|a_1|)$. Запишем производную, как интеграл Коши по контуру $\Gamma_r = \{w : |w-a_1| = \frac{1+\delta}{2}\}$. Затем запишем функцию согласно формуле (3.4) через разделенную разность и оценим ее на основании предложения 3.1, воспользовавшись тем, что на контуре Γ_r выполнено соотношение $|w-a_k| \asymp |1-a_1|$. В итоге получим требуемое неравенство

$$|f'(a_1)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a_1|=r}\frac{f(w)dw}{(w-a_1)^2}\right| =$$

$$= C \left| \int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{(w-a_1)^2} \prod_1^s (w-a_k)[w,a_1,\ldots,a_s]_f dw \right| =$$

$$= C \int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{|w-a_1|} \prod_2^s |a_1-a_k| \frac{||f||}{(1-|a_1|)^{1/p}} |dw| \le$$

$$\le C \frac{||f||}{(1-|a_1|)^{1/p}} \prod_2^s |a_1-a_k|. \qquad \square$$

Вернемся еще раз к анализу того, насколько "правильно" определена норма в пространстве $w_p^{(s)}(E)$. Фиксируем точку $z_k \in E$ и определим пробную функцию $h(z_n) = 0$, $n \neq k$, $h(z_k) = 1$. Доказательство необходимости условий теоремы будет основано на том, что норма пробной функции определяется значением ее разделенной разности на оболочке точки z_k. Заметим, что разделенные разности функции h отличны от нуля только в том случае, когда точка z_k входит в соответствующую оболочку. Среди отличных от нуля разделенных разностей наибольшей по модулю является разность, вычисленная по оболочке точки z_k. Это обстоятельство было отмечено выше, как экстремальное свойство оболочек. Заметим, что норма функции h будет обладать желаемым свойством, если любая точка множества E входит только в конечное число оболочек элементов этого множества. Докажем, что это так.

Предложение 3.4. *Точка множества E может входить в оболочки не более, чем в $12(s+1)^2$ элементов множества E.*

Доказательство. Фиксируем точку $z_n \in E$ и для любой другой точки $z_m \in E$ определим множество $C(z_m)$ – угол с вершиной в точке z_m, имеющий раствор $\pi/3$ и не содержащий точки z_n, биссектриса которого лежит на прямой, определяемой точками z_n и z_m. Предположим, что, кроме точки z_m, угол $C(z_m)$ содержит еще s точек множества E. Перенумеруем их $\{z_{k_r}\}_{r=1}^s$ так, чтобы числа $|z_n - z_{k_r}|$ не убывали. Тогда $z_n \notin Z_{k_s}$. Действительно, круг $\{z : |z - z_{k_s}| \leqslant |z_m - z_{k_s}|\}$ содержит $s+1$ точку множества E и, следовательно, оболочку точки z_{k_s}, в то же время точка z_n не входит в этот круг.

Если выбранная нами точка z_n не принадлежит оболочке ни одного из элементов множества $E \setminus \{z_n\}$, то утверждение предложения верно. В противном случае, рассмотрим множество $E_1(z_n) = \{z_j \in E \setminus \{z_n\} : z_n \in K(z_j)\}$. Обозначим через $z_m^{(1)}$ одну из ближайших к z_n точек множества $E_1(z_n)$. Далее нумерация продолжается по индукции. Если уже введены точки $z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(k-1)}$, то мы рассмотрим множество $E_k(z_n)$, состоящее из всех точек множества $E_1(z_n)$, не принадлежащих ни одному из углов $C(z_{m^{(r)}})$, $r = 1, .., k-1$. Если множество $E_k(z_n)$ непусто, то $z_m^{(k)}$ – одна из ближайших к z_n точек этого множества.

Покажем, что число таких точек не превосходит $12(s+1)$. Предположим, что это не так, тогда найдется угол с вершиной в точке z_n и раствора $\frac{\pi}{6}$, содержащий не менее $s+1$ точек из последовательности $z_m^{(k)}$. Фиксируем такой угол и обозначим через z_* ближайшую к точке z_n точку из нашей последовательности внутри угла. Далее, таким же образом выберем точку z^* – самую далекую от точки z_n. Тогда круг $|z - z^*| \leqslant |z_* - z^*|$ содержит не менее $s+1$ точки множества E и, следовательно, оболочку точки z^*, а с другой стороны, он не может содержать точку z_n:

$$|z_n - z^*| = |z_n - z_*|\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{|z_* - z^*|^2 - \frac{1}{4}|z_n - z_*|^2} > |z_* - z^*|.$$

Остается заметить, что если точка z_n принадлежит оболочке точки z_m, то либо z_m – одна из точек $z_m^{(k)}$, которых не более $12(s+1)$, либо z_m – точка, лежащая в одном из углов $C(z_m^{(k)})$, но, как было отмечено выше, в таком угле может содержаться не более $s+1$ точки z_r таких, что z_n принадлежит оболочке точки z_r. □

Следствие 3.5. *Пусть* $Z_k = \{z_{k_1}, \cdots, z_{k_s}\} \subset E$ *– оболочка точки* z_k. *Тогда*

$$\|h\| \asymp \frac{|z_k - z_{k_s}|^{1/p}}{\prod_{j=1}^{s} |z_k - z_{k_j}|}.$$

Завершение доказательства необходимости условий теоремы. Пусть h – пробная функция, $h(z_k) = 1$, $h(z_n) = 0$, $n \neq k$. Предположение об интерполяционности множества E гарантирует существование функции $f \in H_p^{(s)}$ такой, что $f(z_n) = h(z_n)$

при всех n и $\|f\| \asymp \|h\|$. Функции из пространства $H_p^{(s)}$ допускают факторизацию [10]. В частности, если определить функцию g равенством $f = B \cdot g$, где $B(z) = \prod_{z_n \notin Z_k} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - z\bar{z}_n}$ – произведение Бляшке с множеством нулей $E \setminus \{Z_k\}$, то $g \in H_p^{(s)}$ и $\|f\| \asymp \|g\|$. Доказательство будет основано на оценках, связанных с разделенной разностью $[z_k, z_{k_1}, \cdots, z_{k_s}]_g$. С одной стороны, неравенство из предложения 3.1, эквивалентность норм функций h и g и оценка из следствия 3.6 позволяют заключить, что

$$|[z_k, z_{k_1}, \cdots, z_{k_s}]_g| \leqslant C \left| \frac{z_k - z_{k_s}}{1 - |z_k|} \right|^{1/p} \frac{1}{\prod_{m=1}^{s} |z_k - z_{k_m}|}. \tag{3.5}$$

С другой стороны, эта разделенная разность допускает прямое вычисление на основании формулы (3.1). Эта формула использует значения функции g в точках z_k и z_{k_j}, $j = 1, \dots, s$. В первой точке по построению $g(z_k) = \frac{1}{B(z_k)}$, в остальных точках $g(z_{k_j}) = f(z_{k_j}) = 0$, так как по построению $B(z_{k_j}) \neq 0$, следовательно,

$$[z_k, z_{k_1}, \cdots, z_{k_s}]_g = \frac{1}{B(z_k)} \cdot \frac{1}{\prod_{m=1}^{s} (z_k - z_{k_m})}.$$

Поэтому неравенство (3.5) дает оценку

$$\frac{1}{|B(z_k)|} \cdot \frac{1}{\prod_{m=1}^{s} |z_k - z_{k_m}|} \leqslant \left| \frac{z_k - z_{k_s}}{1 - |z_k|} \right|^{1/p} \frac{1}{\prod_{m=1}^{s} |z_k - z_{k_m}|}$$

и, далее,

$$C \leqslant |B(z_k)| \left| \frac{z_k - z_{k_s}}{1 - |z_k|} \right|^{1/p}. \tag{3.6}$$

Так как все сомножители произведения Бляшке меньше 1, то оценка снизу распространяется на каждый из сомножителей в правой части. Неравенство $\left| \frac{z_k - z_m}{1 - z_k \bar{z}_m} \right| \geqslant C$ эквивалентно условию редкости и, следовательно, оно выполнено для $z_m \notin Z_k$. Если $p < \infty$, то условие редкости выполнено и для пары точек z_k, z_{k_s}. $\square$.

Доказательство теоремы вложения. Отметим, что для $p = \infty$ теорема вложения очевидным образом вытекает из формулы (3.2) и далее считаем $p < \infty$. Нам надо показать, что разделенные разности функции из пространства $H_p^{(s)}$ входят в пространство последовательностей $l^p(E) = \{(y_n) : \sum_n |y_n|^p \operatorname{diam} K(z_n) < \infty\}$. Интересующее нас утверждение оказывается простым следствием теоремы вложения Карлесона [11].

Предложение 3.6. *Если множество E удовлетворяет условию Штольца и существует такое положительное число δ, что любой из кругов $\{z : |z - z_n| < \delta(1 - |z_n|)\}$ содержит не более s точек множества, то для любой функции $f \in H_p^{(s)}$ имеем*

$$\sum_n |[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_f|^p \operatorname{diam} K_n \leqslant C\|f\|^p.$$

Доказательство. Заметим, что по условию теоремы $\operatorname{diam} K_n \asymp 1-|z_n|$. Перепишем разделенные разности в нашей сумме по формуле (3.2):

$$\sum_n |[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_f|^p \operatorname{diam} K_n =$$

$$\sum_n \Bigl| \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{s-1}} f^{(s)}(z_n + (z_{n_1} - z_n)t_1 + \cdots +$$

$$(z_{n_s} - z_{n_{s-1}})t_s) dt_s \cdots dt_1 \Bigr|^p \operatorname{diam} K_n \leqslant$$

$$C \sum_n (1 - |z_n|) \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{s-1}} \Bigl| f^{(s)}(z_n + (z_{n_1} - z_n)t_1 + \cdots +$$

$$(z_{n_s} - z_{n_{s-1}})t_s) \Bigr|^p dt_s \cdots dt_1 \leqslant C \sum_n (1 - |z_n|) \max_{H(K_n)} |f^{(s)}(z)|^p;$$

здесь $H(K_n)$ – выпуклая оболочка точек кластера K_n. Фиксируем пока функцию f и обозначим через w_n точки из $H(K_n)$, для которых $|f(s)(w_n)| = \max_{H(K_n)} |f^{(s)}(z)|$. Заметим, что для любого диадического кольца $\{z : 2^{-m-1} \leqslant |1 - z| \leqslant 2^{-m}\}$ число выпуклых оболочек $H(K_n)$, с которыми оно пересекается, ограничено постоянной M, не зависящей от выбора функции f. Следовательно, дискретная мера $\mu_f = \sum_n (1-|z_n|)\delta_{w_n}$ удовлетворяет условию

Карлесона. Значит, по теореме вложения Карлесона

$$\sum_n |[z_n, z_{n_1}, \dots, z_{n_s}]_f|^p \operatorname{diam} K_n \leqslant C \sum_n (1-|z_n|)|f(s)(w_n)|^p =$$

$$= C \int |f(s)(w)|^p d\mu_f \leqslant C(\mu_f)\|f\|^p.$$

Ясно, что специфика расположения точек w_n гарантирует, что постоянную $C(\mu_f)$ можно выбрать единой для всех функций $f \in H_p^{(s)}$. □

§4. Формула восстановления последовательности по разделенным разностям

Здесь будет установлено тождество, восстанавливающее последовательность (функцию, заданную на множестве E) по ее разделенным разностям. Далее мы модифицируем эту формулу так, чтобы набору разделенных разностей ставилась в соответствие функция из пространства $H_p^{(s)}$. Это отображение фактически решает задачу продолжения. Для построения такой модификации нужно, чтобы первоначальная "дискретная" формула восстанавливала элемент последовательности с номером N по системе разделенных разностей, определяемых точками с номерами, большими либо равными N. По этой причине формулы превращаются в ряды и имеют смысл только в том случае, когда эти ряды сходятся. Мы будем действовать в предположении, что все возникающие ряды абсолютно сходятся. В следующем параграфе мы проанализируем структуру множеств, удовлетворяющих необходимому условию интерполяции, дадим на этом основании более простое описание пространства $w_p^{(s)}(E)$ и покажем, что ряды, используемые в формулах восстановления, действительно сходятся абсолютно. Вначале мы докажем вспомогательное тождество. В формулировке и доказательстве этого утверждения будет использоваться обозначение $\Delta_r(k) = z_k - z_{k+r}$.

Предложение 4.1. *Справедлива формула*

$$\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k} \Delta_{s-1}(k_1) \sum_{n\leqslant k_2\leqslant k_1} \Delta_{s-2}(k_2) \cdots$$

$$\sum_{n\leqslant k_{s-1}\leqslant k_{s-2}} \Delta_1(k_{s-1}) = \prod_{r=1}^{s-1} (z_n - z_{k+r}).$$

Доказательство. Мы используем двойную индукцию. Первый шаг – индукция по s. При $s=2$ имеем очевидное равенство

$$\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}\Delta_1(k_1)=\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}(z_{k_1}-z_{k_1+1})=z_n-z_{k+1}.$$

Предположим, что тождество верно для $s-1$, тогда тождество для s можно упростить:

$$\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}\Delta_{s-1}(k_1)\left(\sum_{n\leqslant k_2\leqslant k_1}\Delta_{s-2}(k_2)\cdots\sum_{n\leqslant k_{s-1}\leqslant k_{s-2}}\Delta_1(k_{s-1})\right)=$$

$$=\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}\Delta_{s-1}(k_1)\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k_1+r}).$$

Следовательно, достаточно доказать тождество

$$\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}\Delta_{s-1}(k_1)\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k_1+r})=\prod_{r=1}^{s-1}(z_n-z_{k+r}).$$

Далее мы проведем второй шаг индукции по k. При $k=n$ имеем очевидное равенство

$$(z_n-z_{n+s-1})\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{n+r})=\prod_{r=1}^{s-1}(z_n-z_{n+r}).$$

Предположим, что тождество верно для $k-1$. Тогда тождество для k можно записать в виде

$$\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k}\Delta_{s-1}(k_1)\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k_1+r})=$$

$$=(z_k-z_{k+s-1})\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k+r})+\sum_{n\leqslant k_1\leqslant k-1}\Delta_{s-1}(k_1)\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k_1+r})=$$

$$=(z_k-z_{k+s-1})\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k+r})+\prod_{r=1}^{s-1}(z_n-z_{k-1+r})=$$

$$=(z_k-z_{k+s-1})\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k+r})+\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k+r})(z_n-z_k)=$$

$$=(z_n-z_{k+s-1})\prod_{r=1}^{s-2}(z_n-z_{k+r}).$$

Оба шага индукции завершены и предложение доказано. □

Докажем теперь тождество, составляющее основу оператора восстановления.

Предложение 4.2. *Пусть y – функция на множестве E, $y_n = y(z_n)$. Зададим функцию x на множестве E формулой*

$$x_n = \sum_{k \geqslant n} y_k (z_k - z_{k+s}) \prod_{r=1}^{s-1} (z_n - z_{k+r}), \quad n = 1, 2, \dots ;$$

при этом предполагается, что все ряды абсолютно сходятся. Тогда

$$[z_n, z_{n+1}, \dots , z_{n+s}]_x = y_n \quad n = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 4.1 и перепишем определение величины x_n через суммы

$$x_n = \sum_{k \geqslant n} y_k (z_k - z_{k+s}) \sum_{n \leqslant k_1 \leqslant k} (z_{k_1} - z_{k_1+s-1}) \times$$

$$\sum_{n \leqslant k_2 \leqslant k_1} (z_{k_2} - z_{k_2+s-2}) \cdots \sum_{n \leqslant k_{s-1} \leqslant k_{s-2}} (z_{k_{s-1}} - z_{k_{s-1}+1}).$$

В предположении абсолютной сходимости можно поменять порядок суммирования

$$x_n = \sum_{k_{s-1} \geqslant n} (z_{k_{s-1}} - z_{k_{s-1}+1}) \cdots \sum_{k_1 \geqslant k_2} (z_{k_1} - z_{k_1+s-1}) \sum_{k \geqslant k_1} (z_k - z_{k+s}) y_k .$$

Докажем справедливость равенств

$$[z_n, \dots z_{n+r}]_x = \sum_{k_{s-r-1} \geqslant n} (z_{k_{s-r-1}} - z_{k_{s-r-1}+r-1}) \cdots \sum_{k \geqslant k_1} (z_k - z_{k+s}) y_k .$$

Проведем индукцию по r. При $r = 1$ из определений и полученного описания чисел x_n заключаем:

$$[z_n, z_{n+1}]_x = \frac{1}{z_n - z_{n+1}} \times$$

$$\Bigg(\sum_{k_{s-1} \geqslant n} (z_{k_{s-1}} - z_{k_{s-1}+1}) \cdots \sum_{k_1 \geqslant k_2} (z_{k_1} - z_{k_1+s-1}) \sum_{k \geqslant k_1} (z_k - z_{k+s}) y_k -$$

$$\sum_{k_{s-1}\geqslant n+1}(z_{k_{s-1}}-z_{k_{s-1}+1})\cdots\sum_{k_1\geqslant k_2}(z_{k_1}-z_{k_1+s-1})\sum_{k\geqslant k_1}(z_k-z_{k+s})y_k\Bigr).$$

От разности остается только первое слагаемое первой суммы:

$$[z_n,z_{n+1}]_x=\frac{1}{z_n-z_{n+1}}(z_n-z_{n+1})\cdot$$

$$\sum_{k_{s-2}\geqslant n}(z_{k_{s-2}}-z_{k_{s-2}+2})\cdots\sum_{k\geqslant k_1}(z_k-z_{k+s})y_k.$$

Сокращая общие множители, получаем нужную формулу для $r=1$.

Предположим, что равенства верны для $r-1$ и докажем их справедливость для r:

$$[z_n,\dots z_{n+r}]_x=\frac{1}{z_n-z_{n+r}}\left([z_n,\dots z_{n+r-1}]_x-[z_{n+1},\dots z_{n+r}]_x\right)=$$

$$=\frac{1}{z_n-z_{n+r}}\Biggl(\sum_{k_{s-r}\geqslant n}(z_{k_{s-r}}-z_{k_{s-r}+r})\cdots\sum_{k\geqslant k_1}(z_k-z_{k+s})y_k-$$

$$-\sum_{k_{s-r}\geqslant n+1}(z_{k_{s-r}}-z_{k_{s-r}+r})\cdots\sum_{k\geqslant k_1}(z_k-z_{k+s})y_k\Biggr).$$

После тех же упрощений, что и при $r=1$, мы получаем требуемое равенство

$$[z_n,\dots z_{n+r}]_x=\sum_{k_{s-r-1}\geqslant n}(z_{k_{s-r-1}}-z_{k_{s-r-1}+r+1})\cdots\sum_{k\geqslant k_1}(z_k-z_{k+s})y_k.$$

Очередное индукционное предположение доказано. Для завершения доказательства предложения проанализируем вид полученной формулы для $r=s-1$. Заметим, что возникающий здесь индекс k_0 надо понимать как k, тогда получим

$$[z_n,\dots z_{n+s-1}]_x=\sum_{k\geqslant n}(z_k-z_{k+s})y_k.$$

Теперь очевидно, что для $r=s$ получаем требуемое тождество

$$[z_n,\dots z_{n+s}]_x=y_k.$$

Предложение полностью доказано. □

Для построения оператора продолжения нам надо иметь полное описание поледовательностей, у которых совпадают все разделенные разности порядка s.

Предложение 4.3. *Если у последовательностей* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *при всех* n *совпадают разделенные разности* $[z_n, z_{n+1}, .., z_{n+s}]_u$ *и* $[z_n, z_{n+1}, .., z_{n+s}]_v$, *то существует многочлен* P *степени не выше* $s-1$ *такой, что* $u_n = v_n + P(z_n)$.

Доказательство. Для сокращения записи обозначим $\phi(n, r, u) = [z_n, z_{n+1}, .., z_{n+r}]_u$. Тогда условие предожения можно записать в виде

$$\phi(n, s-1, u) - \phi(n+1, s-1, u) =$$

$$\phi(n, s-1, v) - \phi(n+1, s-1, v), \ n = 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что $\phi(n, s-1, u) - \phi(n, s-1, v) = \phi(1, s-1, u) - \phi(1, s-1, v) = C_0$. Это дает серию равенств

$$\phi(n, s-2, u) - \phi(n+1, s-2, u) = \phi(n, s-2, v) -$$

$$\phi(n+1, s-2, v) + C_0(z_n - z_{n+s-1}), \ n = 1, 2, \dots.$$

Продолжая эти преобразования, получим требуемое. □

Следствие 4.4. *Многочлен из предложения* (4.3) *можно записать в виде* $P(z) = \sum_{r=0}^{s-1} p_r (z-1)^r$, *где*

$$p_r = \frac{1}{r!} \lim_{n\to\infty} \left([z_n, z_{n+1}, .., z_{n+r}]_u - [z_n, z_{n+1}, .., z_{n+r}]_v \right).$$

§5. Описание оператора продолжения

Для завершения доказательства теоремы достаточно построить оператор продолжения, действующий по схеме

$$x \in w(E)_p^{(s)} \to y_n = [z_n, \dots, z_{n+s}]_x \xrightarrow{T} f \in H_p^{(s)}$$

и такой, что $f(z_n) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Оператор T мы будем строить в следующей форме:

$$Ty(z) = P(z) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n (z_n - z_{n+s}) F_n(z),$$

где функции F_n должны удовлетворять тождествам

$$\begin{gathered} F_n(z_m) = \prod_{r=1}^{s-1} (z_m - z_{n+r}) \quad \text{при} \quad m \leqslant n, \\ F_n(z_m) = 0 \quad \text{при} \quad m > n. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Тогда формулы в §4 гарантируют равенства $[z_n, \dots, z_{n+s}]_f = [z_n, \dots, z_{n+s}]_x$. Оператор продолжения получится из оператора T добавлением подходящего многочлена. В этом параграфе мы опишем только конструкцию таких функций, а в следующем проведем оценки, из которых будет следовать непрерывность оператора T. Отметим, что сейчас легко видеть, почему нам нужны формулы восстановления последовательности по "хвостам" последовательностей разделенных разностей. Это дает нам возможность работать с функциями F_n, обращающимися в 0 на всех точках множества E, кроме некоторого конечного подмножества. Дальнейшие построения и оценки требуют тщательного подбора нумерации точек множества E, основанного на том, что множество удовлетворяет необходимому условию интерполяции.

Пусть E – дискретное множество точек в единичном круге; предположим, что для некоторого положительного δ для каждой точки $z \in E$ существует *кластер точки* z – множество $K(z) = \{z^{(0)}, \dots, z^{(r)}\} \subset E$, $0 \leqslant r \leqslant s$, $z^{(0)} = z$, такое, что $|z - z^*| \geqslant \delta|(1 - |z|)$ для любой точкй $z^* \in E \setminus K(z)$, т.е. выполнено необходимое условие интерполяции.

Заметим, что все множество E оказывается дизъюнктным объединением кластеров. Для удобства работы с нормой в пространстве следов, в каждом кластере выберем *центральную точку кластера* $z_c \in K(z)$ так, чтобы

$$\prod_{w \in K(z)\setminus\{z_c\}} |w - z_c| \leqslant \prod_{w \in K(z)\setminus\{z_*\}} |w - z_*| \quad \text{для любой точки} \quad z_* \in K(z).$$

Центр определен неоднозначно, но не зависит от выбора точки z, в том смысле, что если кластеры двух точек совпали, то и множество точек, которые могут быть центром, одинаковы.

Определение 5.1. *Естественная нумерация точек множества E вводится так:*

1) *фиксируем в каждом кластере его центр;*
2) *обозначим через z_1 один из центров с максимально возможной величиной $|1 - z|$, $z \in E$ (мы предполагаем, что 1 – единственная точка сгущения множества E);*
3) *занумеруем далее точки кластера $K(z_1) = \{z_1, \dots, z_r\}$ так, что*

$$|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_3| \leqslant \dots \leqslant |z_1 - z_r|;$$

4) *обозначим через* z_{r+1} *центр одного из кластеров, отличный от* z_1*, такой, что либо* $|1-z_1| = |1-z_{r+1}|$*, либо* $|1-z_1| > |1-z_{r+1}|$*, и тогда должно выполняться условие* $|1-z_c| \leqslant |1-z_{r+1}|$ *для центра любого другого кластера* z_c*;*
5) *занумеруем точки кластера* $K(z_{r+1})$ *по правилу пункта* 3*;*
6) *присвоим следующий номер центру кластера по правилу, аналогичному правилу пункта* 4*, и т.д.*

Введем еще одно обозначение. Будем называть *расслоением множества натуральных чисел* следующее дизъюнктное разбиение: $N = \bigcup_{r=0}^{s} N_r$, где N_0 – номера всех центров кластеров, N_1 – номера всех точек кластеров, имеющих номер, на 1 больший, чем номер центра, и т.д. Множество N_k, а вместе с ним и $\{z_m : m \in N_k\}$, будем называть k-м *слоем*. Для удобства последующих описаний введем еще два обозначения. Введем нумерацию множества всех кластеров

$$K_n = K(z_n), \quad n \in N_0,$$

т.е. кластер получает то же номер, что его центральная точка. Для точек z_n нулевого слоя, $n \in N_0$, обозначим $E_n = E \setminus K_n$.

Построение функций F_n пройдет в два этапа: на первом мы построим эти функции для точек нулевого слоя, на втором исправим полученные функции на каждом из кластеров. Основу конструкции составляют два типа вспомогательных функций, каждая из которых является модификацией произведения Бляшке:

$$B(z,E) = \prod_{k:z_k \in E} b_k(z), \quad \text{где} \quad b_k(z) = \frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k}. \tag{5.2}$$

Отметим, что, доказывая необходимость условий теоремы 2.7, мы установили неравенство (3.6):

$$|B(z, E \setminus K_n)| \geqslant \delta \quad \text{при} \quad z \in K_n \quad \text{и} \quad n \in N_0. \tag{5.3}$$

Первую серию вспомогательных функций можно назвать импульсами. Они определены для каждой из точек $z_m \in E$, описание функции, кроме самой точки z_m, использует еще оболочку K_n, которой принадлежит рассматриваемая точка:

$$\Phi_m(z) = V_m^{s+1}(z)\frac{B(z,E_n)}{B(z_m,E_n)}, \quad V_m(z) = \frac{(1-z^2)(1-z_m^2)}{(1-z_m z)^2}. \tag{5.4}$$

Основное свойство импульса состоит в том, что

$$\Phi_m(z_m) = 1, \quad \Phi_m(z_k) = 0, \quad z_k \in E_n.$$

Кроме того, приведенная выше оценка (5.3) гарантирует, что все эти функции равномерно ограничены. Если бы мы не удалили из произведения все множители, отвечающие кластеру элемента z_m, то такая оценка могла бы исчезнуть. Вторая серия вспомогательных функций, которые можно назвать ступенями, строится только для точек z_n нулевого слоя ($n \in N_0$):

$$\Psi_n(z) = \left(\frac{1-z}{1-z_n z}\right)^2 \prod_{k>n_*} b_k(z), \qquad \text{где} \quad n_* = \max(m : z_m \in K_n). \tag{5.5}$$

Последовательно исправляя ступеньку с помощью импульсов, мы получим искомые функции F_n. Для точек с большими номерами $k > n_*$ исправлений не требуется, так как по построению $\Psi_n(z_k) = 0$. Приступим к описанию исправлений.

Модификация ступени на нулевом слое. Чтобы гарантировать нужные оценки для функций F_n, нам придется проводить исправления достаточно плавно. На первом шаге мы построим настоящую ступень – переделаем функцию Ψ_n в функцию G_1 (для сокращения обозначений мы не указываем в обозначениях на ее зависимость от n) такую, что $G_1(z_m) = 1$ при $m \in N_0, \quad m \leqslant n$. Этого легко добиться, положив

$$G_1(z) = \Psi_n(z) + \sum_{m<n,\ m\in N_0} d_m^{(1)} \Phi_m(z), \quad d_m^{(1)} = 1 - \Psi_n(z_m). \tag{5.6}$$

На следующем шаге мы построим функцию G_2 такую, что $G_2(z_m) = z_m - z_{n+1}$ при $m \in N_0$, $m \leqslant n$:

$$G_2(z) = (z - z_{n+1}) \frac{1-z}{1-z_{n+1}z} G_1(z) + \sum_{m<n,\ m\in N_0} d_m^{(2)} \Phi_m(z),$$

$$d_m^{(2)} = G_1(z_m) - a_{n+1}(z_m);$$

$$\text{здесь} \quad a_{n+1}(z) = (z - z_{n+1}) \frac{1-z}{1-z_{n+1}z}.$$

Введение в функции a_k множителя $\frac{1-z}{1-z_k z}$ излишне для выполнения равенства $G_2(z_m) = z_m - z_{n+1}$, но крайне важно для последующих оценок. Отметим, что по тем же причинам подобные множители введены в состав импульса и ступени. Дальнейшее построение происходит по индукции. Допустим, что построена функция $G_{\rho-1}$ такая, что $G_{\rho-1}(z_m) = (z_m - z_{n+1}) \cdots (z - m - z_{n+\rho-2})$. Построим далее функцию G_ρ такую, что $G_\rho(z_m) = (z_m - z_{n+1}) \cdots (z - m - z_{n+\rho})$ при $m \in N_0$, $m \leqslant n$:

$$G_\rho(z) = a_{n+\rho-1}(z) G_{\rho-1}(z) + \sum_{m<n,\ m\in N_0} d_m^{(\rho)} \Phi_m(z) \qquad (5.7)$$

$$a_{n+\rho-1}(z) = (z - z_{n+\rho-1}) \frac{1-z}{1 - z_{n+\rho-1} z},$$

$$d_m^{(\rho)} = \prod_{r=1}^{\rho-1} (z_m - z_{n+r}) - a_{n+\rho-1}(z_m) G_{\rho-1}(z_m). \qquad (5.8)$$

Отметим простую, но важную перезапись выражения для коэффициентов

$$d_m^{(\rho)} = \prod_{r=1}^{\rho-1} (z_m - z_{n+r}) \frac{z_m(1-z_n)}{1 - z_m \cdot z_{n+\rho-1}}. \qquad (5.9)$$

Из построения видно, что функция G_s принимает нужные значения в точках нулевого слоя. Запишем явное выражение для этой функции:

$$\begin{gathered} G_s = g_1 \Psi_m + \sum_{r=1}^{s} g_r \sum_{m\leqslant n, m\in N_0} d_m^{(\rho)} \Phi_m, \\ g_r = \prod_{\rho=r}^{s-1} a_{n+\rho}, \quad 1 \leqslant r < s, \quad g_r = 1,\ r = s. \end{gathered} \qquad (5.10)$$

Иными словами, нужная функция на нулевом слое построена.

Модификация ступени на старших слоях. Исправление функции снова будет происходить постепенно, в данном случае – послойно. По-прежнему, считаем фиксированной точку z_n, $n \in N_0$. На первом шаге мы переделаем функцию G_s в функцию H_1 так, что $H_1(z_m) = \prod_{r=1}^{s-1} (z_m - z_{n+r})$, $m \in N_1 \cup N_0$, $m \leqslant n_*$. Напомним, что веденная нами нумерация точек множества E такова, что $z_{m-1} \in$

N_0, $z_m \in K_{m-1}$. Если проводить исправления так же, как на нулевом слое, рассматривая функцию $G_s(z)+\sum_{m\leqslant n_*, m\in N_1} d_m\Phi_m(z)$, то, исправив функцию в точке z_m, мы испортим ранее достигнутое равенство в точках нулевого слоя $G_s(z_{m-1}) = \prod_{r=1}^{s-1}(z_{m-1}-z_{n+r})$, так как $\Phi_m(z_{m-1}) \neq 0$. Этот недостаток устраняется следующим определением:

$$H_1(z) = G_s(z) + \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_1} d_m \frac{z-z_{m-1}}{z_m - z_{m-1}}\Phi_m(z),$$

$$d_m = \prod_{r=1}^{s-1}(z_m - z_{n+r}) - G_s(z_m).$$

Домножение на функцию V_n, определенную в формуле (5.4), пока несущественно, но будет необходимо для оценки норм в H^1. Еще раз проведем индукцию. Предположим, построена функция $H_{\rho-1}$ такая, что

$$H_{\rho-1}(z_m) = \prod_{r=1}^{s-1}(z_m - z_{n+r}), \quad m\in N_\sigma, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant\rho-1,$$

и введем следующую функцию

$$H_\rho(z) = H_{\rho-1}(z) + \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_\rho} d_m h_m(z)\Phi_m(z), \tag{5.11}$$

$$h_m(z) = \prod_{k=1}^{\rho}\frac{z-z_{m-k}}{z_m - z_{m-k}}, \quad m\in N_\rho; \tag{5.12}$$

$$d_m = \prod_{r=1}^{s-1}(z_m - z_{n+r}) - H_{\rho-1}(z_m), \quad m\in N_\rho. \tag{5.13}$$

Легко проверить, что $F_n = H_s$ и есть искомая функция, в том смысле, что

$$F_n(z_m) = \prod_{r=1}^{s-1}(z_m - z_{n+r}) \quad \text{при} \quad m\leqslant n_*.$$

Запишем явное выражение для построенной функции F_n:

$$F_n = g_1\cdot\Psi_n + \sum_{r=1}^{s} g_r \sum_{m\leqslant n, m\in N_0} d_m^{(r)}\Phi_m +$$

$$+\sum_{r=1}^{s}\sum_{m\leqslant n+s, m\in N_r} d_m\cdot h_m\cdot\Phi_m, \qquad (5.14)$$

$$g_r(z)=a_{n+s-1}(z)\cdots a_{n+r}(z),\quad r=1,2,..,s-1,\quad g_s(z)=1.$$

Вспомогательные функции построены, и можно переходить к доказательству непрерывности оператора T.

§6. Оценки вспомогательных функций и коэффициентов

Нам надо показать, что для множеств E, удовлетворяющих необходимому условию теоремы, абсолютно сходятся ряды, восстанавливающие последовательность по ее разделенным разностям, и доказать непрерывность оператора T. Доказательство будет проведено так, что из оценки нормы оператора будет следовать утверждение о сходимости рядов. Нам надо оценить все коэффициенты и вспомогательные функции, формирующие функции F_n. Работа с множеством, удовлетворяющим условию Штольца, позволяет нам строить оператор продолжения с большим запасом аналитичности. Функции F_n аналитичны всюду, кроме точек $\{z : 1/z\in E, 1/\bar z\in E\}$. Это сильно упростит оценку нормы оператора – она полностью определяется поведением функций в окрестности точки $z=1$.

Оценки для элементов нулевого слоя.

Предложение 6.1. *Пусть m, $n\in N_0$, $m<n$, число $d_m^{(1)}$ определено формулой* (5.6). *Тогда справедлива оценка*

$$|d_m^{(1)}|\leqslant C\left|\frac{1-z_n}{1-z_m}\right|.$$

Доказательство. Проведем предварительно тождественные преобразования

$$d_m^{(1)}=1-\left(\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right)^2\prod_{k>n_*}b_k(z_m)=$$

$$\left(1-\left(\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right)^2\right)+\left(\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right)^2\left(1-\prod_{k>n_*}b_k(z_m)\right); \qquad (6.1)$$

здесь $n_* = \max(m : z_m \in K_n)$. Продолжим разложение во втором слагаемом

$$1-\prod_{k>n_*} b_k(z_m) = \left((1-b_{n_*+1}(z_m)) + b_{n_*+1}(z_m)\left(1-\prod_{k>n_*} b_k(z_m)\right)\right) =$$

$$(1-b_{n_*+1}(z_m)) + \sum_{n_1>n_*+1}\prod_{k=n_*+1}^{n_1} b_k(z_m)(1-b_{n_*+1}(z_m)).$$

Чтобы получить оценку, надо преобразовать фрагменты полученных выражений

$$1-\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m} = \frac{z_m(1-\bar z_n)}{(1-z_m)+z_m(1-\bar z_n)},$$

$$1-b_k(z_m) = \frac{(1-|z_k|)(z_m|z_k|+z_k)}{z_k((1-z_k)+\bar z_k(1-z_m))}.$$

Напомним, что $m,\ n,\ k \in N_0$, $m < n < k$, а нумерация точек нулевого слоя проведена так, что $|1-z_m| \geqslant |1-z_n| \geqslant |1-z_k|$. Это дает возможность оценить рассмотренные выше фрагменты:

$$\left|1-\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right| \leqslant C\frac{|1-z_n|}{|1-z_m|}, \tag{6.2}$$

$$|1-b_k(z_m)| \leqslant C\frac{|1-z_k|}{|1-z_m|}. \tag{6.3}$$

По построению, множество $\{z_m\}_{m\in N_0}$ является редким, поэтому выполняются неравенства

$$\left|\frac{1-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right| \leqslant C\left|\frac{z_n-z_m}{1-\bar z_n z_m}\right| \leqslant C. \tag{6.4}$$

Оценки (6.2) и (6.4) позволяют получить нужную оценку первого слагаемого в равенстве (6.1). Воспользуемся неравенством (6.3) для оценки элементов второго слагаемого в равенстве (6.1). При этом окончательная оценка суммы оказывается возможной, поскольку специальная структура множества E гарантирует, что в каждом из колец $\{2^{-k-1} \leqslant |1-z| \leqslant 2^{-k}\}$ содержится не более M точек множества. Следовательно, сумма вида $\sum_{k>n}|1-z_k|$ оценивается величиной первого слагаемого. С учетом сказанного, мы получаем оценку

$$|1-\prod_{k>n_*} b_k(z_m)| \leqslant C\sum_{k>n_*}|1-b_k(z_m)| \leqslant$$

$$\frac{C}{|1-z_m|}\sum_{k>n_*}|1-z_k|\leqslant C\frac{|1-z_n|}{|1-z_m|}.$$

Вместе с оценкой (6.4) это завершает оценку второго слагаемого в (6.1). Объединяя оценки обоих слагаемых в (6.1), получим неравенство

$$|d_m^{(1)}|\leqslant C\left|\frac{1-z_n}{1-z_m}\right|. \qquad \square$$

Оценка коэффициентов $d_m^{(r)}$, $r>1$, происходит много проще.

Предложение 6.2. *Пусть m, $n\in N_0$, $m<n$, число $d_m^{(r)}$ определено формулой* (5.8). *Тогда справедлива оценка*

$$|d_m^{(r)}|\leqslant C|1-z_n|\cdot|1-z_m|^{r-2}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой (5.9):

$$d_m^{(r)}=\prod_{k=1}^{r-1}(z_m-z_{n+k})\frac{z_m(1-z_n)}{1-z_m\cdot z_{n+r-1}}$$

и тем, что в условиях предложения для точек $z_{n+r}\in K_n$ справедливы оценки

$$|z_m-z_{n+r}|\leqslant C|1-z_m|,\qquad |1-z_m z_{n+r}|\asymp|1-z_m|,$$

из которых легко получить требуемое. $\square$

Мы переходим к оценке функции G_s. Для ее проведения потребуются следующие вспомогательные неравенства.

Предложение 6.3. *Пусть множество E удовлетворяет условию Штольца и является объединением конечного числа редких множеств. Пусть точки множества $E=\{z_n\}$ занумерованы так, что из условия $n>m$ следует, что $|1-z_n|\leqslant C|1-z_m|$. Для определенности мы считаем, что $z=1$ – предельная точка множества. Тогда для любых положительных a и b справедливы оценки*

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M}\frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}}\leqslant C\left|\frac{1-z_N}{1-z_N z}\right|^b$$

$$\text{при}\quad |1-z|\geqslant|1-z_N|, \qquad (6.5)$$

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M}\frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}}\leqslant C\left|\frac{1-z}{1-z_M z}\right|^a$$

$$\textit{при}\quad |1-z_M|\geqslant|1-z|, \tag{6.6}$$

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M}\frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}}\leqslant C$$

$$\textit{при}\quad |1-z_N|\geqslant|1-z|\geqslant|1-z_M|, \tag{6.7}$$

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\frac{|1-z_m|^{a+b}}{|1-z_m z|^b}\leqslant C\quad \textit{при}\quad z\in D. \tag{6.8}$$

Доказательство. Все эти утверждения основаны на том, что последовательность $|1-z_m|$ похожа на геометрическую прогрессию, что позволяет получить оценки

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M}|1-z|^a\asymp|1-z|^N,\qquad \sum_{N\leqslant m\leqslant M}\frac{1}{|1-z_m|^a}\asymp\frac{1}{|1-z_M|^a}.$$

В условиях предложения справедливы равномерные по m оценки

$$|1-z_m z|\asymp|1-z|+|1-z_m|.$$

Преобразуем общий член ряда. Для первых трех сумм запишем

$$\frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}}=\left|\frac{1-z}{1-z_m z}\right|^a\left|\frac{1-z_m}{1-z_m z}\right|^b,$$

а для последней суммы –

$$\frac{|1-z_m|^{a+b}}{|1-z_m z|^b}=|1-z_m|^a\left|\frac{1-z_m}{1-z_m z}\right|^b.$$

Если $|1-z|\geqslant|1-z_N|$, то $|1-z_m z|\asymp|1-z|$ и

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M}\frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}}\leqslant$$

$$C\sum_{N\leqslant m\leqslant M}\left|\frac{1-z_m}{1-z}\right|^b\leqslant C\left|\frac{1-z_N}{1-z}\right|^b,$$

что, в действующих предположениях, равносильно неравенству (6.5).

Если $|1-z| \leqslant |1-z_N|$, то $|1-z_m z| \asymp |1-z_m|$ и

$$\sum_{N\leqslant m\leqslant M} \frac{|1-z|^a|1-z_m|^b}{|1-z_m z|^{a+b}} \leqslant$$

$$C \sum_{N\leqslant m\leqslant M} \left|\frac{1-z}{1-z_m}\right|^a \leqslant C\left|\frac{1-z}{1-z_M}\right|^a,$$

и неравенство (6.6) доказано. Неравенство (6.7) получается из двух предыдущих. Надо разбить сумму на индексе P таком, что $|1-z| \asymp |1-z_P|$, тогда каждая из двух сумм оценится константой в силу предыдущих неравенств.

Докажем неравенство (6.8). Если $|1-z| \leqslant |1-z_M|$, то

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant M} \frac{|1-z_m|^{a+b}}{|1-z_m z|^b} \leqslant \sum_{1\leqslant m\leqslant M} |1-z_m|^a \leqslant C.$$

Если $|1-z| \geqslant |1-z_M|$, то $|1-z| \asymp |1-z_P|$ и

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant M} \frac{|1-z_m|^{a+b}}{|1-z_m z|^b} \leqslant \sum_{1\leqslant m\leqslant P} |1-z_m|^a +$$

$$\sum_{P\leqslant m\leqslant M} |1-z_m|^a \left|\frac{1-z_m}{1-z}\right|^b \leqslant C(1+|1-z|^b). \qquad \square$$

Предложение 6.4. *Пусть функция* G_s *определена равенством* (5.10)*. Тогда справедлива оценка*

$$|G_s(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_n z|^2}.$$

Доказательство. Напомним определение функции G_s:

$$G_s = g_1\Psi_n + \sum_{r=1}^{s} g_r \sum_{m\leqslant n, m\in N_0} d_m^{(\rho)}\Phi_m,$$

$$g_r = \prod_{\rho=r}^{s-1} a_{n+\rho}, \quad 1\leqslant r<s, \quad g_s = 1,$$

$$a_{n+\rho-1}(z) = (z - z_{n+\rho-1})\frac{1-z}{1-z_{n+\rho-1}z}.$$

Выпишем оценки для компонент этого выражения, большинство из которых тривиальны. Поскольку множество E удовлетворяет условию Штольца, величины $\dfrac{|z-z_{n+k}|}{|1-z_{n+k}z|}$ ограничены и мы получаем оценку

$$|g_r(z)| \leqslant C|1-z|^{s-r}.$$

Свойства произведения Бляшке и оценка (3.6) гарантируют, что

$$|\Psi_n(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^2}{|1-z_nz|^2}, \quad |\Phi_m(z)| \leqslant C\left(\frac{|1-z||1-z_m|}{|1-z_mz|^2}\right)^{s+1}.$$

Воспользуемся оценками чисел $d_m^{(r)}$ из предложений 6.1, 6.2 и эквивалентностью

$$|1-z_mz| \asymp |1-z| + |1-z_m|,$$

чтобы записать предварительную оценку

$$|G_s(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_nz|^2}\Bigg(1 + |1-z_n||1-z_nz|^2\sum_{r=1}^{s}|1-z|^{s-r}\cdot$$

$$\sum_{m\leqslant n,\ m\in N_0}\frac{|1-z_m|^{s+r-1}}{|1-z|^{2s+2}+|1-z_m|^{2s+2}}\Bigg).$$

Внутренняя сумма оценивается на основании предложения 6.3. При $|1-z| \geqslant |1-z_n|$ получаем оценку

$$|G_s(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_nz|^2}\left(1 + \frac{|1-z_n||1-z_nz|^2}{|1-z|^3}\right).$$

Соответственно, при $|1-z| \leqslant |1-z_n|$ получаем оценку

$$|G_s(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_nz|^2}\left(1 + \frac{|1-z_n||1-z_nz|^2}{|1-z_n|^3}\right).$$

Видно, что в обоих случаях второй сомножитель ограничен. Предложение доказано. □

Оценка элементов старших слоев. Оценка коэффициентов d_m, $m \in N_r$, $r > 0$, основана на равенстве $d_m = f(z_m)$, где $f(z) = \prod_{k=1}^{s-1}(z-z_{n+k}) - H_{r-1}(z)$. Из определения функций H_r следует, что $f(z_{m-k}) = 0$, $k = 1, 2, .., r$. Следующее вспомогательное предложение содержит локальную оценку для таких функций, из которой прямо следует нужное неравенство.

Предложение 6.5. *Пусть функция f аналитична в круге D, $f(a_k) = 0$, $k = 1, \dots, r$, и существуют точка a_0 и постоянная $\delta < 1$ такие, что круг $D(a_0, \delta) = \{w : |w - a_0| < \delta(1 - |a_0|)\}$ содержит все точки a_k, а в круге $D(a_0, (1 + \delta)/2)$ выполнено неравенство $|f(w)| \leqslant C|1 - w|^{s-1}$. Тогда для любой точки $z \in D(a_0, \delta)$ справедлива оценка $|f(z)| \leqslant C|z - a_1| \cdots |z - a_r| \cdot |1 - z|^{s-r}$.*

Доказательство. Условие $f(a_k) = 0$ и представление (3.1) для разделенных разностей позволяют записать равенство

$$f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_r) \cdot [z, a_1, \dots, a_r]_f.$$

Далее на основании формулы (3.3) получаем

$$f(z) = \prod_{k=1}^{r}(z - a_k) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z)\prod_{k=1}^{r}(w - a_k)};$$

здесь $\Gamma = \partial D(a_0, \delta)$. Условия предложения ведут к оценке

$$|f(z)| \leqslant C \prod_{k=0}^{r-1} |z - a_k||1 - z|^{s-r}. \qquad \square$$

Предложение 6.6. *Пусть $m \in N_r$, $1 \leqslant r \leqslant s$, тогда справедливы оценки*

$$|d_m| \leqslant C \prod_{k=1}^{r} |z_m - z_{m-k}| \cdot |1 - z_m|^{s-r-1}, \tag{6.9}$$

$$|H_r(z)| \leqslant C \frac{|1 - z|^{s+1}}{|1 - z_n z|^2}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Доказательство представляет собой цикл. Получаем оценку для d_m, $m \in N_1$, из нее выводим оценку для H_1, что в свою очередь позволяет получить оценку для d_m, $m \in N_2$, и т. д.

1) По определению (5.13) для $m \in N_1$ имеем

$$d_m = \prod_{r=1}^{s-1}(z_m - z_{n+r}) - G_s(z_m).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = \prod_{r=1}^{s-1}(z - z_{n+r}) - G_s(z)$. Структура множества E и введенная нумерация его точек таковы, что эта функция удовлетворяет условиям предыдущего предложения, в котором следует положить $a_0 = a_1 = z_{m-1}$, $r = 1$, подходящее число δ существует, его точное значение вычисляется по значениям постоянных в условиях редкости и Штольца для множества E, условие $|f(w)| \leqslant C|1 - w|^{s-1}$ для $w \in D(z_{m-1}, (1+\delta)/2)$ тоже выполнено, но требует некоторых пояснений. Для второго слагаемого во всем единичном круге верна оценка $|G_s(w)| \leqslant C\frac{|1-w|^{s+1}}{|1-z_n w|^2}$ (предложение 6.4) и остается заметить, что в круге $D(a_0, (1+\delta)/2)$ справедливо соотношение $|1 - z_n w| \asymp |1 - z|$. Для первого слагаемого функции f оценка следует из того, что уже упомянутые свойства множества E гарантируют неравенства $|z - a_{n+\rho}| < |1 - z|$. Отметим, что для $m < n$ эта оценка двусторонняя, так как кластеры K_n и K_{m-1} хорошо разделены, если же $m = n$, то оценка следует прямо из определения кластера, но никакой оценки снизу уже не будет. Поэтому мы можем воспользоваться оценкой предложения 6.5 и получить

$$|d_m| = |f(z_m)| \leqslant C|z_m - z_{m-1}||1 - z|^{s-2}.$$

2) Докажем оценку для функции H_1. По определению (формула (5.11))

$$H_1(z) = G_s(z) + \sum_{m \leqslant n_*, m \in N_1} d_m \frac{z - z_{m-1}}{z_m - z_{m-1}} \Phi_m(z).$$

Требуемая оценка для первого слагаемого функции G_s уже доказана (предложение 6.4). Модуль функции V_n ограничен. Остается оценить сумму

$$\sum_{m \leqslant n_*, m \in N_1} |d_m| \frac{|z - z_{m-1}|}{|z_m - z_{m-1}|} |\Phi_m(z)| \leqslant$$

$$C \sum_{m \leqslant n_*, m \in N_1} |z_m - z_{m-1}||1 - z|^{s-2} \frac{|z - z_{m-1}|}{|z_m - z_{m-1}|} \left(\frac{|1 - z^2||1 - z_m^2|}{|1 - z_m z|^2} \right)^{s+1} \leqslant$$

$$C|1-z|^{2s-1} \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_1} \frac{|1-z_m|^{s+2}}{|1-z_m z|^{2s+2}} \leqslant$$

$$C|1-z|^{2s-1} \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_1} \frac{|1-z_m|^{s}}{|1-z_m z|^{2s}}.$$

Последняя оценка основана на неравенстве $|1-z_m| \leqslant C|1-z_m z|$, вытекающем из условия Штольца. После этого мы можем воспользоваться предложением 6.3 и получить неравенство

$$C|1-z|^{2s-1} \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_1} \frac{|1-z_m|^{s}}{|1-z_m z|^{2s}} \leqslant$$

$$C\frac{|1-z|^{2s-1}}{|1-z_n z|^s} \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_n z|^2}.$$

Требуемая оценка функции H_1 доказана.

3) Переходим к индукции и предположим, что уже доказаны оценки для $m \in N_{r-1}$:

$$|d_m| \leqslant C\prod_{k=1}^{r-1} |z_m - z_{m-r+1}| \cdot |1-z_m|^{s-r},$$

$$|H_{r-1}(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_n z|^2}.$$

4) Покажем, что тогда выполнена оценка для d_m при $m \in N_r$. Воспроизведем определение коэффициента (5.13):

$$d_m = \prod_{k=1}^{s-1}(z_m - z_{n+k}) - H_{r-1}(z_m), \quad m \in N_r.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = \prod_{k=1}^{s-1}(z - z_{n+k}) - H_{r-1}(z)$. Заметим, что $d_m = f(z_m)$ и из индукционного предположения о функции H_{r-1} следует, что $f(z_{m-k}) = 0,\ \ k = 1, 2, .., r-1$. Оценим $|f(z)|$, как и в пункте 2, на основе предложения 6.3. Это и даст требуемую оценку для $|d_m| = |f(z_m)|$.

5) Осталось оценить функцию H_r:

$$H_r(z) = H_{r-1}(z) + \sum_{m\leqslant n_*, m\in N_r} d_m h_m(z)\Phi_m(z),$$

$$h_m(z) = \prod_{k=1}^{r} \frac{z - z_{m-k}}{z_m - z_{m-k}}, \quad m \in N_\rho.$$

Нужная оценка первого слагаемого содержится в индукционном предположении. Второе слагаемое оценивается тем же способом, что и в пункте 2:

$$\sum_{m \leqslant n_*, m \in N_r} |d_m||h_m(z)||\Phi_m(z)| \leqslant$$

$$C \sum_{m \leqslant n_*, m \in N_r} \prod_{k=1}^{r} |z_m - z_{m-k}||1 - z|^{s-r-1}.$$

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{|z - z_{m-k}|}{|z_m - z_{m-k}|} \left(\frac{|1 - z^2||1 - z_m^2|}{|1 - z_m z|^2} \right)^{s+1}.$$

После этого доказательство завершается аналогично тому, как было сделано при оценке функции H_1. Индукция завершена, и предложение полностью доказано. □

Завершение доказательства теоремы. Оценка нормы оператора продолжения. Функции F_n определены в §5 так, что

$$F_n(z_m) = \prod_{r=1}^{s-1} (z_m - z_{n+r}) \quad \text{при} \quad m \leqslant n, \quad F_n(z_m) = 0 \quad \text{при} \quad m > n.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_n y_n (z_n - z_{n+s}) F_n(z),$$

предполагая, что последовательность y_n такова, что ряд абсолютно сходится. Поведение функций F_n в точках z_m таково, что

$$f(z_m) = \sum_n y_n (z_n - z_{n+s}) F_n(z_m) = \sum_{n \geqslant m} y_n (z_n - z_{n+s}) \prod_{r=1}^{s-1} (z_m - z_{n+r}).$$

Тогда по предложению 4.2 получим, что $[z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+s}]_f = y_n$. Остается проверить, что отображение

$$Ty = \sum_n y_n (z_n - z_{n+s}) F_n(z) \tag{6.11}$$

является непрерывным отображением из пространства l^∞ в пространство $H_\infty^{(s)}$. По определению $F_n = H_s$ и, следовательно, в силу предложения 6.6,

$$|F_n(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1}}{|1-z_n z|^2}, \quad z \in D.$$

Условие Штольца для множества E и простой анализ доказательства показывают, что эту оценку можно продолжить в область D_*, содержащую единичный круг, и такую, что

$$\operatorname{dist}(w, D) \asymp |1-w|, \quad w \in \partial D_*.$$

Представляя функцию F_n интегралом Коши по границе области D_*, легко получить оценки

$$|F_n^{(r)}(z)| \leqslant C\frac{|1-z|^{s+1-r}}{|1-z_n z|^2}, \quad z \in D, \ r = 1, 2, .., s.$$

Этого достаточно для неперывности оператора. □

Предложение 6.7. *Оператор T непрерывен при $p = \infty$.*

Доказательство. Заметим, что $|y_n| \leqslant \|y\|$ и

$$|\sum_n y_n(z_n - z_{n+s})F_n(z)^{(s)}| \leqslant$$

$$C\|y\| \sum_n |z_n - z_{n+s}| \frac{|1-z|}{|1-z_n z|^2} \leqslant C\|y\|,$$

последнее неравенство вытекает из оценки, доказанной в предложении 6.3. □

Следствие 6.8. *Пусть $x \in w_\infty^{(s)}(E)$, $P(z) = \sum_{k=0}^{s-1} p_k(z-1)^k$, здесь $p_k = \frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}[z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}]_x$. Тогда оператор*

$$Sx(z) = P(z) + \sum_n [z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+s}]_x (z_n - z_{n+s}) F_n(z)^{(s)}$$

является линейным непрерывным оператором продолжения из пространства $w_\infty^{(s)}(E)$ в пространство $H_\infty^{(s)}$.

Доказательство. Оператор из предыдущего предложения давал нам функцию с нужными разделенными разностями, но обязательно имеющую в точке $z = 1$ ноль кратности $s-1$. Рассмотрим последовательность $v_n = Sx(z_n)$. Она имеет такие же разделенные разности s-го порядка, что и последовательность x_n.

Пределы разделенных разностей меньших порядков у них также совпадают. Из предложения 4.3 следует, что такие последовательности равны. Следовательно, оператор S является оператором продолжения, а предыдущее предложение обеспечивает его непрерывность. Следствие доказано, а вместе с ним завершено и доказательство теоремы.

Литература

1. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions.* — Am.J. Math. **80**(4) (1958), 921–930.
2. H. S. Shapiro, A. Shields, *On some interpolaton problems for analytic functions.* — Am. J. Math. **83** (1961), 513–532.
3. А. М. Коточигов, *Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **30** (1972), 167–169.
4. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гельдера.* — Мат. сб. **109**(1) (1979), 107–128.
5. Н. А. Широков, *Свободная интерполяция в пространствах $C^A_{r,\omega}$.* — Мат. сб. **117**(3) (1982), 337–358.
6. J. Bruna, *Les ensemblees d'interpolation des $A^p(D)$.* — C. R. Acad. Sci. Paris, tAB **290**(1) (1980), A5–27.
7. Е. М. Дынькин, *Свободная интерполяция функциями с производной из H^1.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **126** (1983), 77–87.
8. С. А. Виноградов, *Об интерполяции степенных рядов, абсолютно сходящихся на границе круга сходимости.* – Вестник ЛГУ, сер. матем. **7** (1965), 30–44.
9. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей.* М. (1952).
10. Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич, *Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на его границе.* — Мат. заметки **7**(2) (1970), 165–172.
11. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p.* М. (1984).

Kotochigov A. M. Free interpolation in the spaces of analytic functions with derivative of order s in a Hardy space.

We consider the problem of free interpolation for the spaces of analytic functions with derivative of order s in the Hardy space H^p. For the sets that satisfy the Stolz condition, we obtain a condition necessary for interpolation: if $1 \le p < \infty$, then the set must be a union of s sparse sets. For $p = \infty$, we obtain a necessary and sufficient condition for interpolation: the set must be a union of $s+1$ sparse sets. In this case, we construct an extension operator.

Санкт-Петербургский
электротехнический
университет
kam@peterlink.ru

Поступило 10 ноября 2003 г.