Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

**М. Т. Караев**

# НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДЮАМЕЛЯ

## Введение

**1.** Пусть $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ – пространство голоморфных в единичном диске $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функций с компактной сходимостью. В $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ произведение Дюамеля определяется как производная свертки Микусинского:

$$(f\circledast g)(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{d}{dz}\int\limits_0^z f(z-t)g(t)dt=\int\limits_0^z f'(z-t)g(t)dt+f(0)g(z),$$

где интегрирование ведется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки 0 и $z$ (см. [1]).

Произведение Дюамеля широко применяется в различных вопросах анализа, например, в теории дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в решениях некоторых краевых задач математической физики, а его вещественный аналог занимает важное место в операторном исчислении Микусинского (см. [1–3]). В работе [1] Уигли впервые применял произведение Дюамеля в описании замкнутых идеалов алгебры $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$, а в работах автора [4, 5] оно применялось, соответственно, в описании циклических векторов оператора интегрирования $J$, $(Jf)(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$, в некоторых конкретных пространствах функций, и в доказательстве одноклеточности того же оператора в банаховом пространстве голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. О других применениях произведения Дюамеля см. [6–8].

**2.** В §2 настоящей работы мы используем произведение Дюамеля в изучении кратности спектра прямых сумм операторов. В §3, используя аналог произведения Дюамеля для функций от двух переменных, мы даем описание циклических векторов сужения оператора двойного интегрирования

$$f(x,y) \mapsto \int_0^x \int_0^y f(t,\tau)d\tau\,dt$$

на инвариантное подпространство специального вида.

Часть результатов настоящей статьи получены довольно давно, и они приведены в диссертации автора [9]. Автор решил опубликовать их сейчас в журнальной статье, в частности, и потому, что у них появились новые приложения.

**3.** Используемые в статье обозначения более или менее стандартны. $L(X)$ – алгебра ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $X$; $\operatorname{Lat} A$ – решетка инвариантных подпространств оператора $A \in L(X)$; $\operatorname{span}\{x_i\}$ – замкнутая линейная оболочка векторов $x_i$.

Напомним, что подпространство $E \subset X$ называют циклическим (порождающим) подпространством оператора $A \in L(X)$, если $\operatorname{span}\{A^n E : n \geqslant 0\} = X$. Вектор $x \in X$ называют циклическим, если

$$\operatorname{span}\{A^n x : n \geqslant 0\} = X.$$

Множество циклических векторов оператора $A$ обозначим $\operatorname{Cyc}(A)$. Кратностью спектра оператора $A \in L(X)$ называют число (или символ $\infty$)

$$\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\bigl\{\dim E : \operatorname{span}\{A^n E : n \geqslant 0\} = X\bigr\}.$$

Оператор $A \in L(X)$ цикличен, если $\mu(A) = 1$, и одноклеточен, если решетка $\operatorname{Lat} A$ линейно упорядочена относительно включения.

## §1. Произведение Дюамеля и некоторые его свойства

Пусть $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ – пространство голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций с топологией равномерной сходимости на каждом компактном подмножестве круга $\mathbb{D}$. Произведение Дюамеля для двух функций $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n)z^n$, $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} \widehat{g}(n)z^n \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ (где

$\widehat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ – $n$-й коэффициент Тейлора функции $f$) определяется (см. [1]) равенством

$$(f \circledast g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz} \int\limits_0^z f(z-t)g(t)dt, \tag{1}$$

где интегрирование ведется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки 0 и $z$. Нетрудно видеть, что произведение Дюамеля удовлетволяет всем аксиомам умножения, что $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ является алгеброй также относительно $\circledast$, и что функция $f(z) \equiv \mathbb{1}$ является единичным элементом алгебры $(\mathrm{Hol}(\mathbb{D}), \circledast)$.

Пусть $B$ – преобразование Бореля, действующее из $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ в пространство формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}]]$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, определяемое формулой

$$B\left(\sum_{n\geqslant 0} \widehat{f}(n) z^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} n!\widehat{f}(n)\mathbb{Z}^n.$$

Обратное преобразование Бореля $B^{-1}$ действует по формуле

$$B^{-1}\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathbb{Z}^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Отметим следующую простую, но полезную лемму.

**Лемма 1.** *Пусть $f$, $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Имеют место следующие формулы для произведения $\circledast$ в $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$:*

(a) $f \circledast g = \sum\limits_{n\geqslant 0} \sum\limits_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{g}(n-k)k!\,(n-k)!\dfrac{1}{n!} z^n$;

(b) $f \circledast g = (Bf)(J)g = (Bg)(J)f$, *где $J$ – оператор интегрирования в $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ и* $(Bf)(J)g \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} n!\,\widehat{f}(n)(J^n g)(z)$;

(c) $f \circledast g = B^{-1}(Bf \cdot Bg)$.

**Доказательство.** Так как утверждения (a) и (c) леммы содержатся в [1], то приводим лишь доказательство пункта (b). Для этой цели, сначала покажем, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!\,\widehat{f}(n)(J^n g)(z)$ определяет некоторую функцию из $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Для этого докажем, что этот ряд равномерно сходится на каждом компактном подмножестве круга $\mathbb{D}$.

Пусть $r$, $0 < r < 1$, – произвольное фиксированное число. Достаточно показать, что на каждом круге $|z| < r < 1$ ряд абсолютно и равномерно сходится.

Действительно, учитывая формулы

$$(J^n g)(rz) = r^n J^n(g(rz)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и оценки

$$|(J^n g)(z)| = \left| \int\limits_0^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{(n-1)!} \sup_{|t| \leqslant |z|} |g(t)|,$$

получаем:

$$\sum_{n \geqslant 0} n!\, |\widehat{f}(n)|\, |(J^n g)(rz)| = \sum_{n \geqslant 0} n!\, |\widehat{f}(n)| r^n |J^n(g_r(z))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \geqslant 0} n!\, |\widehat{f}(n)| \frac{1}{(n-1)!} r^n \sup_{|z|<r} |g_r(z)| = \sup_{|z|<r} |g_r(z)| \sum_{n \geqslant 0} n |\widehat{f}(n)| r^n < +\infty$$

(так как из включения $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ следует, что $\sum\limits_{n \geqslant 0} n |\widehat{f}(n)| r^n < +\infty$). Требуемое утверждение доказано. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
(Bf)(J)g &= \sum_{n \geqslant 0} n!\, \widehat{f}(n)(J^n g) = \sum_{n \geqslant 0} n!\, \widehat{f}(n) \left( J^n \sum_{m \geqslant 0} \widehat{g}(m) z^m \right) = \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(m) n!\, (J^n z^m) = \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(m) \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)} z^{n+m} = \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(m) \frac{n!\, m!}{(n+m)!} z^{n+m} = f \circledast g.
\end{aligned}$$

В силу симметрии второе равенство в формуле (b) проверяется аналогично. $\square$

Наконец, отметим следующее основное свойство произведения Дюамеля, доказанное в работе Уигли [1].

**Лемма 2.** *Функция $f$ из* $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ *является $\circledast$-обратимой в* $\mathrm{Hol}\,(\mathbb{D})$ *тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.*

Более подробно с произведением Дюамеля можно ознакомиться в [1].

## §2. Специальные признаки сложения кратностей спектра

В этом разделе мы используем произведения Дюамеля для вычисления кратности спектра прямых сумм вида $J \oplus A$, где $J$ – оператор интегрирования, действующий в алгебре Винера $W(\mathbb{D})$ всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n) z^n$, для которых $\sum\limits_{n \geqslant 0} |\widehat{f}(n)| < +\infty$, $A$ – оператор, действующий в подходящем банаховом пространстве $X$ (теорема 3). Полученный результат является, по-видимому, новым и для оператора $J \oplus J$ в $W(\mathbb{D}) \oplus W(\mathbb{D})$, хотя аналогичный результат в $L^p[0,1] \oplus L^p[0,1]$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ был приведен в работе М. М. Маламуда [10].

Отметим, что $(W(\mathbb{D}), \circledast)$ является банаховой алгеброй. Единственный максимальный идеал этой алгебры состоит из функций $f$ из $W(\mathbb{D})$, для которых $f(0) = 0$. Поэтому пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(W(\mathbb{D}), \circledast)$ этой алгебры состоит из одного гомоморфизма, а именно, из эволюционного функционала в точке 0 (т.е., $\mathfrak{M}(W(\mathbb{D}), \circledast) = \{0\}$), и, следовательно, преобразование Гельфанда тривиально. (Подробнее об алгебре $(W(\mathbb{D}), \circledast)$ см., например, в работе автора [7].)

**Теорема 3.** *Пусть $X$ – сепарабельное банахово пространство и $J$, $(Jf)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, – оператор интегрирования в алгебре Винера $W(\mathbb{D})$. Если оператор $\mathcal{K} \in L(X)$ таков, что $\|\mathcal{K}^n\| \leqslant c\dfrac{1}{n!}$, $n \geqslant 0$, для некоторого $c > 0$, то*

$$\mu(J \oplus \mathcal{K}) = \mu(J) + \mu(\mathcal{K}) = 1 + \mu(\mathcal{K}).$$

**Доказательство.** Так как для любых $A_1 \in L(X_1)$, $A_2 \in L(X_2)$ имеют место оценки

$$\max\big\{\mu(A_1), \mu(A_2)\big\} \leqslant \mu(A_1 \oplus A_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

в случае $\mu(\mathcal{K}) = +\infty$ доказательство теоремы очевидно, и поэтому будем считать, что $\mu(\mathcal{K}) = n < +\infty$.

Допустим, что $\mu(J\oplus\mathcal{K})=\mu(\mathcal{K})=n$. Пусть $\left\{f_i\oplus x_i\right\}_{i=1}^n$ – циклический набор векторов для оператора $J\oplus\mathcal{K}$. Тогда $\left\{f_i(z)\right\}_{i=1}^n\in$ Cyc$(J)$. Поэтому существует номер $i_0$, $1\leqslant i_0\leqslant n$, такой, что $f_{i_0}(0)\neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $i_0=1$, то есть $f_1(0)\neq 0$. Так как при этом условии элемент $f_1$ является обратимым в $(W(\mathbb{D}),\circledast)$, существует функция $F_1\in W(\mathbb{D})$ такая, что $(F_1\circledast f_1)(z)\equiv\mathbb{1}$, и поэтому $F_1(0)\neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{F}(z)=\begin{pmatrix} F_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O}\\ -f_2\circledast F_1 & \mathbb{1} & \mathbb{O} & & \mathbb{O}\\ -f_3\circledast F_1 & \mathbb{O} & \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{O}\\ \vdots & & & & \vdots\\ -f_n\circledast F_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{1}\end{pmatrix}.$$

В силу пункта (b) леммы 1 ясно, что

$$(B\mathcal{F})(J)f\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} (BF_1)(J) & \mathbb{O} & \cdots & & \mathbb{O}\\ (B(-f_2\circledast F_1))(J) & I & \cdots & & \mathbb{O}\\ (B(-f_3\circledast F_1))(J) & \mathbb{O} & I & \cdots & \mathbb{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (B(-f_n\circledast F_1))(J) & \mathbb{O} & & \cdots & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (BF_1)(J)f_1\\ (B(-f_2\circledast F_1))(J)f_1+f_2\\ (B(-f_3\circledast F_1))(J)f_1+f_3\\ \vdots\\ (B(-f_n\circledast F_1))(J)f_1+f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\circledast f_1\\ (-f_2\circledast F_1)\circledast f_1+f_2\\ (-f_3\circledast F_1)\circledast f_1+f_3\\ \vdots\\ (-f_n\circledast F_1)\circledast f_1+f_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbb{1}\\ \mathbb{O}\\ \mathbb{O}\\ \vdots\\ \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Так как $\circledast$-$\det(B\mathcal{F})(0)=(BF_1)(0)\neq 0$, то ясно, что операторы $(B\mathcal{F})(J)$ и $(B\mathcal{F})(\mathcal{K})$ обратимы соответственно в $W^n(\mathbb{D})\stackrel{\text{def}}{=}W(\mathbb{D})\times\cdots\times W(\mathbb{D})$ и $X^n\stackrel{\text{def}}{=}X\times\cdots\times X$. Теперь из доказательства леммы 1.2.3 работы автора [9] нетрудно видеть, что

$$\left\{\left((B\mathcal{F})(J)f\right)_i\oplus\left((B\mathcal{F})(\mathcal{K})x\right)_i : i=1,2,\ldots,n\right\}$$

является циклическим набором для оператора $J \oplus \mathcal{K}$. Таким образом, получаем новый циклический набор вида $\{\mathbb{I} \oplus \overline{x}_1, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_2, \dots, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_n\}$. Поэтому существует семейство полиномов $\{P_{m,i}\}_{i=1}^n$ такое, что

$$\lim_{m\to\infty} P_{m,1}(J)\mathbb{I} = \mathbb{O} \quad \text{в} \quad W(\mathbb{D}),$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n P_{m,i}(\mathcal{K})\overline{x}_i = x \quad \text{в} \quad X,$$

где $x \in X$ – произвольный элемент. Отсюда, используя формулу (b) из леммы 1, получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} q_{m,1}(z) = 0 \quad \text{в} \quad W(\mathbb{D}),$$

где

$$q_{m,1}(z) \overset{\text{def}}{=} (B^{-1}P_{m,1})(z) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\widehat{P}_{m,1}(k)z^k,$$

$B^{-1}$ – обратное преобразование Бореля. Тогда, используя условие теоремы, имеем:

$$\|P_{m,1}(\mathcal{K})\| = \left\| \sum_{k\geqslant 0} \widehat{P}_{m,1}(k)\mathcal{K}^k \right\| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} |\widehat{P}_{m,1}(k)| \, \|\mathcal{K}^k\| =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} |\widehat{P}_{m,1}(k)| k! \, \|\mathcal{K}^k\| \leqslant c \sum_{k\geqslant 0} |\widehat{q}_{m,1}(k)| = c \big\| q_{m,1} \big\|_{W(\mathbb{D})} \to 0, \ \ m\to\infty.$$

Отсюда, в частности, получаем, что $\lim\limits_{m\to\infty} P_{m,1}(\mathcal{K})\overline{x}_1 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=2}^n P_{m,i}(\mathcal{K})\overline{x}_i = x$. Так как вектор $x$ произволен, это означает, что $\{\overline{x}_i\}_{i=2}^n$ – циклический набор для оператора $\mathcal{K}$, и, стало быть, $\mu(\mathcal{K}) \leqslant n-1$. Но это невозможно, поскольку по условию $\mu(\mathcal{K}) = n$. $\square$

**Замечание 1.** Существует более непосредственное построение циклического набора вида $\{\mathbb{I} \oplus \overline{x}_1, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_2, \dots, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_n\}$. В самом деле, пусть $f_k(0) \neq 0$ для $k = 1, 2, \dots, l$ и пусть $f_k(0) = 0$ для $k = l+1, \dots, n$. Положим $g_k = f_k$, $y_k = x_k$ при $k = 1, \dots, l$, $g_k = f_k - f_1$, $y_k = x_k - x_1$ при $k = l+1, \dots, n$. Тогда набор векторов $\{g_i \oplus y_i\}_{i=1}^n$ будет циклическим, и так как $g_k(0) \neq 0$ для $k = 1, 2, \dots, n$, то существуют функции $F_k$, $F_k \in W(\mathbb{D})$ такие, что $F_k \circledast g_k = \mathbb{1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим $\widetilde{x}_k = \sum\limits_{m \geqslant 0} m!\,\widehat{F}_k(m)\mathcal{K}^m y_k$, тогда

$$g_k \oplus y_k = \sum_{m \geqslant 0} m!\,\widehat{g}_k(m)(J \oplus \mathcal{K})^m(\mathbb{1} \oplus \widetilde{x}_k).$$

Поэтому

$$g_k \oplus y_k \in \operatorname{span}\big\{(J \oplus \mathcal{K})^m(\mathbb{1} \oplus \widetilde{x}_i) : m \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\big\}$$

для $k = 1, \ldots, n$, и набор векторов $\big\{\mathbb{1} \oplus \widetilde{x}_i\big\}_{i=1}^n$ будет циклическим. Наконец, положим $\overline{x}_1 = \widetilde{x}_1$, $\overline{x}_k = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_k$, $k = 2, \ldots, n$, получим циклический набор векторов вида $\{\mathbb{1} \oplus \overline{x}_1, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_2, \ldots, \mathbb{O} \oplus \overline{x}_n\}$.

**Замечание 2.** Из доказательства теоремы 3 видно, что условие теоремы можно несколько ослабить, потребовав лишь, чтобы для любого $x \in X$ существовала постоянная $C_x > 0$ такая, что $\|\mathcal{K}^n x\| \leqslant C_x \frac{1}{n!}$ для любого $n \geqslant 0$.

В следующей теореме мы приведем один специальный признак сложения кратностей спектра. А пока отметим следующее. Пусть $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра с единицей $e$. Для унификации терминологии, будем говорить, что элемент $x \in \mathfrak{A}$ является циклическим для $\mathfrak{A}$, если $\operatorname{clos}\{\mathfrak{A}x\} = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}x \stackrel{\text{def}}{=} \{ax : a \in \mathfrak{A}\}$. В этом случае будем также писать $x \in \operatorname{Cyc}\mathfrak{A}$. Очевидно, что элемент $x$ цикличен для $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда он обратим; в частности, $e \in \operatorname{Cyc}\mathfrak{A}$. Поэтому естественно считать, что $\mu(\mathfrak{A}) = 1$.

**Теорема 4.** *Пусть $X$ – сепарабельное банахово пространство, $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра относительно двух умножений, обозначаемых символами $\cdot$ и $*$, причем $(\mathfrak{A}, *)$ – коммутативная алгебра. Пусть $\tau$ – генератор алгебры $(\mathfrak{A}, *)$ с единицей $e$, и пусть $A \in L(X)$ – оператор с простым спектром (т.е. $\mu(A) = 1$) такой, что:*

1) *$A$ допускает $(\mathfrak{A}, \cdot)$-исчисление;*
2) *$\|P(\tau)(A)x\| \leqslant c\|P(A)x\|$ для любого полинома $P$ относительно умножения $*$ и для всех $x \in X$, при некотором $c > 0$;*
3) *если $\varphi$ – обратимый элемент алгебры $(\mathfrak{A}, *)$, то $\varphi(A) \neq \mathbb{O}$.*

*Тогда $\mu(M_\tau \oplus A) = 2$, где $M_\tau$ обозначает оператор умножения на $\tau$.*

**Доказательство.** Допустим, что $\mu(M_\tau \oplus A) = 1$. Пусть $f \oplus x$ – циклический вектор для $M_\tau \oplus A$. Тогда существуют полиномы $P_n$

такие, что
$$\lim_n P_n(M_\tau \oplus A)(f \oplus x) = e \oplus \mathbb{O}.$$
Отсюда
$$\lim_n P_n(\tau)f = e \quad \text{и} \quad \lim_n P_n(A)x = \mathbb{O}. \tag{2}$$
Так как $f \in \mathrm{Cyc}\,(\mathfrak{A}, *)$ и $P_n(\tau)f = P_n(\tau) * f$, то элемент $f$ обратим в $(\mathfrak{A}, *)$. Поэтому $\lim\limits_n P_n(\tau) = f^{-1*}$. Так как в силу условия 1) оператор $A$ допускает исчисление относительно умножения $\cdot$, то $\lim\limits_n P_n(\tau)(A) = f^{-1*}(A)$, и поэтому $\lim\limits_n P_n(\tau)(A)x = f^{-1*}(A)x$. Из (2) в силу условия 2) следует, что $\lim\limits_n P_n(\tau)(A)x = \mathbb{O}$. Поэтому $f^{-1*}(A)x = \mathbb{O}$. Наконец, используя условие 3), заключаем, что $f^{-1*}(A) \neq \mathbb{O}$. Но так как $f^{-1*}(A)$ и $A$ коммутируют, получим, что $x \notin \mathrm{Cyc}\,(A)$ – противоречие. $\square$

**Следствие 5.** *Пусть $A \in L(X)$ – циклическое необратимое сжатие, и пусть $J$ – оператор интегрирования в пространстве $W(\mathbb{D})$. Если*
$$\|q(A)x\| \leqslant c\|P(A)x\| \tag{3}$$
*для любого $x \in \mathrm{Cyc}\,(A)$ и для любого полинома $P$, где $q = B^{-1}P$, то $\mu(J \oplus A) = 2$.*

**Доказательство.** Сначала заметим, что условие $0 \in \sigma(A)$ является необходимым условием для сложения кратностей спектра. Для доказательства следствия проверим выполнение условий теоремы 4. Для этого положим $\mathfrak{A} = W(\mathbb{D})$, а в качестве умножения $*$ принимаем произведение Дюамеля $\circledast$:
$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^z f(z-t)g(t)dt.$$
То, что $W(\mathbb{D})$ – банахова алгебра относительно $\circledast$, нами уже было отмечено; впрочем, это также ясно из следующих соображений: для $f$, $g \in W(\mathbb{D})$ ясно, что $\|J^n g\| = \left\|\dfrac{z^n}{n!} \circledast g\right\| \leqslant \dfrac{1}{n!}\|g\|$, и поэтому из пункта (b) леммы 1 выводим
$$\|f \circledast g\| = \|(Bf)(J)g\| = \left\|\sum_{n \geqslant 0} n!\,\widehat{f}(n)(J^n g)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| \sum_{n \geqslant 0} |\widehat{f}(n)| = \|f\|\,\|g\|.$$

Условие 1) теоремы 4, очевидно, выполнено. В силу неравенства (3) условие 2) теоремы 4 также выполнено. А условие 3) выполнено ввиду теоремы об отображении спектра: $\varphi(0) \in \sigma(\varphi(A))$, и если функция $\varphi$ обратима в $(W(\mathbb{D}), \circledast)$, то $\varphi(0) \neq 0$, и поэтому $\varphi(A) \neq \mathbb{O}$. Теперь, учитывая, что оператор интегрирования $J$ является оператором умножения на $z$ в смысле умножения $\circledast$, остается применить теорему 4. $\square$

**Следствие 6.** *Пусть $X$ – банахово пространство аналитических в $\mathbb{D}$ функций, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ *– полная система в $X$;*
2) *оператор сдвига $S$, $Sf = zf$, непрерывно действует в $X$;*
3) *для всех $z$, $z \in \mathbb{D}$, функционал $f \mapsto f(z)$, $X \to \mathbb{C}$ непрерывен;*
4) *для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждого $x \in X$ справедлива формула*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\big\|z^n x\big\|_X < +\infty.$$

*Пусть $J$ – оператор интегрирования в пространстве $l^1_A(\|S^n\|)$. Тогда $\mu(J \oplus S) = 2$.*

**Доказательство.** Достаточно проверить, что

$$\|q(S)x\| \leqslant c\|p(S)x\|$$

для любого полинома $p$ и для любого $x \in X$, $x(0) \neq 0$, где $q(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\widehat{p}(n)}{n!} z^n$. С этой целью, пусть $x \in X$ и $x(0) \neq 0$. Пусть $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, – произвольное число. Выберем $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $\inf\limits_{|z|\leqslant\delta} |x(z)| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha > 0$. По теореме о замкнутом графике вложение пространства $X$ в $C(|z| \leqslant \delta)$ непрерывно. Тогда

$$\big\|p(z)x(z)\big\|_X \geqslant c \max_{|z|\leqslant\delta} |p(z)x(z)| \geqslant c\alpha \max_{|z|\leqslant\delta} |p(z)| \geqslant \delta^n c\alpha |\widehat{p}(n)|.$$

Теперь можно получить непосредственно требуемую оценку:

$$\big\|q(S)x\big\|_X = \Big\| \sum_{n\geqslant 0} \frac{\widehat{p}(n)}{n!} z^n x \Big\|_X \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{\widehat{p}(n)}{n!} \big\|z^n x\big\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c\alpha} \big\|p(z)x\big\|_X \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!\delta^n} \big\|z^n x\big\|_X = c_1 \big\|p(S)x\big\|_X.$$

Остается заметить, что $l^1_A(\|S^n\|)$ – банахова алгебра также относительно произведения Дюамеля $\circledast$. Действительно,

$$\left\|f \circledast g\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} = \left\| \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{g}(n-k)\frac{k!(n-k)!}{n!} z^n \right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \left| \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{g}(n-k)\frac{k!(n-k)!}{n!} \right| \|S^n\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \left( \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|\,|\widehat{g}(n-k)| \right) \|S^n\| = \left\|f_+ \cdot g_+\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\|f_+\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} \left\|g_+\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} = c\left\|f\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)} \left\|g\right\|_{l^1_A(\|S^n\|)},$$

здесь $f_+(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} |\widehat{f}(n)| z^n$, $g_+(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} |\widehat{g}(n)| z^n$. Доказательство завершено. $\square$

## §3 Об операторе двойного интегрирования

В этом разделе рассматривается аналог произведения Дюамеля для функций от двух переменных. С его использованием дается описание циклических векторов сужения оператора двойного интегрирования на инвариантное подпространство специального вида.

Пусть $C^{(n)}[0,1]\times[0,1]$, где $n \geqslant 2$, – банахово пространство функций, имеющих на $[0,1]\times[0,1]$ все непрерывные частные производные до порядка $n$ включительно. Норма в $C^{(n)}[0,1]\times[0,1]$ вводится по формуле

$$\left\|u\right\|_{C^{(n)}[0,1]\times[0,1]} = \sum_{|\alpha|\leqslant n} \left\|D^\alpha u\right\|_{C[0,1]\times[0,1]},$$

или, подробнее,

$$\left\|u\right\|_{C^{(n)}[0,1]\times[0,1]} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant n} \max_{x\in[0,1]\times[0,1]} |D^\alpha u(x)|.$$

Рассмотрим теперь в пространстве $C^{(n)}[0,1] \times [0,1]$ вольтерров оператор интегрирования от двух переменных

$$(Wf)(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(t,\tau)d\tau\,dt.$$

Через $E_{xy}$ обозначим подпространство функций из $C^{(n)}[0,1]\times[0,1]$, зависящих от произведения аргументов $xy$. Нетрудно показать, что $E_{xy}=\operatorname{span}\{(xy)^k : k\geqslant 0\}$ и $E_{xy}\in \operatorname{Lat} W$. Обозначим $W_{xy}=W|E_{xy}$, т.е. $(W_{xy}f)(xy)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(t\tau)d\tau\,dt$. Определим в пространстве $C^{(n)}[0,1]\times[0,1]$ свертку (аналог произведения Дюамеля для функций от двух переменных) по формуле:

$$(f\circledast g)(x,y)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(x-t,y-\tau)g(t,\tau)d\tau\,dt. \tag{4}$$

Заметим, что формула (4) посредством дифференцирования интеграла представляется в виде соотношения

$$(f\circledast g)(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x-t,y-\tau)g(t,\tau)d\tau\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial x}f(x-t,0)g(t,y)dt+\int\limits_0^y\frac{\partial}{\partial y}f(0,y-\tau)g(x,\tau)d\tau+f(0,0)g(x,y).$$

Отсюда видно, что если $f,\ g\in E_{xy}$, то

$$(f\circledast g)(xy)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f((x-t)(y-\tau))g(t\tau)d\tau\,dt+f(0)g(xy)=$$

$$=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\left[f'((x-t)(y-\tau))+(x-t)(y-\tau)f''((x-t)(y-\tau))\right]g(t\tau)d\tau\,dt+$$

$$+f(0)g(xy). \tag{5}$$

В частности, если $f,\ g\in E_{xy}$, то, делая замены переменных $u=\frac{t}{x}$, $v=\frac{\tau}{y}$, из (5) получаем, что функция $f\circledast g$ зависит только от произведения $xy$.

Положим

$$X^{(s)}\overset{\text{def}}{=}\left\{f\in E_{xy}:\left.\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}\right|_{xy=0}=0,\ i+j=0,1,\dots,s\right\}\ (s=0,1,\dots,n),$$

$$X_\lambda\overset{\text{def}}{=}\left\{f\in E_{xy}:f(xy)=0,\ 0\leqslant xy<\lambda\right\}\ (0<\lambda<1).$$

Ясно, что $X^{(s)}$, $X_\lambda$ являются замкнутыми инвариантными подпространствами оператора $W_{xy}$, и что

$$\{0\} \subset X_\mu \subset X_\lambda \subset X^{(n)} \subset X^{(n-1)} \subset \cdots \subset X^{(0)} \subset C^{(n)}[0,1] \times [0,1] \quad (\mu > \lambda).$$

После раскрытия операторов $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ нетрудно показать, что

$$\left.\frac{\partial^{i+j} f(xy)}{\partial x^i \partial y^j}\right|_{xy=0} = 0 \Longleftrightarrow \left. f^{(\max(i,j))}(xy)\right|_{xy=0} = 0.$$

Поэтому подпространства $X^{(s)}$ имеют следующий вид:

$$X^{(s)} = \{f \in E_{xy} : f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(s)}(0) = 0\} \ (s = 0, 1, \ldots, n).$$

В следующем предложении, используя произведение Дюамеля, мы даем описание циклических векторов суженного оператора $W_{xy}$.

**Предложение 7.** *Пусть $f \in E_{xy}$. Тогда $f \in \mathrm{Cyc}\,(W_{xy})$ в том и только в том случае, если $f(0) \neq 0$.*

**Доказательство.** Пусть $g$ – произвольная функция из $E_{xy}$. Из равенства (5) легко видеть, что $\mathbb{1} \circledast g(xy) = g(xy)$, что

$$W_{xy}^k g(xy) = \frac{(xy)^k}{(k!)^2} \circledast g(xy) \ (k \geqslant 1),$$

и что $\mathcal{D}_f$, $(\mathcal{D}_f g)(xy) \overset{\text{def}}{=} (f \circledast g)(xy)$, является ограниченным оператором в $E_{xy}$ (более того, $E_{xy}$ – банахова алгебра относительно $\circledast$). Учитывая все это, имеем:

$$E_f \overset{\text{def}}{=} \operatorname{span}\left\{W_{xy}^k f(xy) : k \geqslant 0\right\} = \operatorname{span}\left\{\frac{(xy)^k}{(k!)^2} \circledast f(xy) : k \geqslant 0\right\} =$$
$$= \operatorname{span}\left\{\mathcal{D}_f\left(\frac{(xy)^k}{(k!)^2}\right) : k \geqslant 0\right\} = \operatorname{clos}\mathcal{D}_f \operatorname{span}\{(xy)^k : k \geqslant 0\} =$$
$$= \operatorname{clos}\mathcal{D}_f E_{xy}.$$

Поэтому $f \in \mathrm{Cyc}\,(W_{xy}) \Leftrightarrow \operatorname{clos}\mathcal{D}_f E_{xy} = E_{xy}$. Для доказательства предложения покажем, что $\operatorname{clos}\mathcal{D}_f E_{xy} = E_{xy} \Leftrightarrow f(0) \neq 0$. Действительно, если $\operatorname{clos}\mathcal{D}_f E_{xy} = E_{xy}$, т.е. $E_f = E_{xy}$, то $f(0) \neq 0$.

Наоборот, если $f(0) \neq 0$, то покажем, что $\mathcal{D}_f$ является обратимым оператором в $E_{xy}$, из чего, в частности, будет следовать нужное нам утверждение. Действительно, как видно из формулы (5), $\mathcal{D}_f = (\mathcal{K}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} + f(0)I)$, где $I$ – единичный оператор в $E_{xy}$ и

$$\mathcal{K}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} g(xy) =$$
$$= \int_0^x \int_0^y \left[f'((x-t)(y-\tau)) + (x-t)(y-\tau)f''((x-t)(y-\tau))\right] g(t\tau)d\tau\, dt.$$

Нетрудно доказать, что $\mathcal{K}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$ является компактным оператором в $E_{xy}$. С другой стороны, условие $f(0) \neq 0$ в силу теоремы Титчмарша о свертке для функций многих переменных (см. [11]) влечет равенство $\ker \mathcal{D}_f = \{0\}$. Следовательно, по теореме Фредгольма $\mathcal{D}_f$ является обратимым оператором в $E_{xy}$, и поэтому $E_f = E_{xy}$, т.е. $f \in \mathrm{Cyc}\,(W_{xy})$. $\square$

**Замечание 3.** С помощью замены переменных можно показать, что

$$(W_{xy} f)(xy) = \int_0^x \int_0^y f(t\tau)d\tau\, dt = \int_0^{xy} \ln \frac{xy}{v}\, f(v)dv, \tag{6}$$

и поэтому предложение 7 фактически описывает циклические векторы оператора

$$(\mathcal{K}_{\ln x} f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \ln \frac{x}{y} f(y)dy$$

в пространстве $C^{(n)}[0,1]$. Действительно, положим $u = t\tau$. Так как $0 \leqslant \tau \leqslant y$, то $0 \leqslant u \leqslant ty \stackrel{\text{def}}{=} v$, $0 \leqslant v \leqslant xy$. Учитывая все это, имеем:

$$(W_{xy} f)(xy) = \int_0^x \int_0^y f(t\tau)d\tau\, dt =$$

$$= \int_0^x \left( \int_0^{ty} f(u)\frac{du}{t} \right) dt = \int_0^x \left( \int_0^{ty} f(u)du \right) d\ln t =$$

$$= \left( \ln t \int_0^{ty} f(u)du \right) \Bigg|_0^x - \int_0^x \left( \ln t \, d \int_0^{ty} f(u)du \right) =$$

$$= \ln x \int_0^{xy} f(u)du - \int_0^x \ln t f(ty) y \, dt =$$

$$= \ln x \int_0^{xy} f(u)du - \int_0^{xy} \ln \frac{v}{y} f(v)dv = \int_0^{xy} \ln \frac{xy}{v} f(v)dv.$$

Таким образом, формула (6) доказана.

В заключение заметим, что обсуждение инвариантных подпространств оператора $W$ двойного интегрирования в пространстве $L^2[0,1] \times [0,1]$ впервые было начато в известной работе Донохью [12], и что $W$ неодноклеточный оператор. Отметим также работу Ацмона и Маноса [13], где доказано, что $\mu(W) = +\infty$ и дано описание всех приводящих подпространств оператора $W$ в $L^2[0,1] \times [0,1]$. Задача полного описания $\operatorname{Lat} W$ до сих пор остается нерешенной.

Я благодарен рецензенту за внимательное чтение работы и многочисленные полезные замечания.

## Литература


1. N. M. Wigley, *The Duhamel product of analytic functions.* — Duke Math. J. **41** (1974), 211–217.
2. Я. Микусинский, *Операторное исчисление.* ИЛ, М. (1956).
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функции комплексного переменного.* Наука, М. (1973).
4. М. Т. Караев, *Использование свертки для доказательства одноклеточности.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **135** (1984), 66–68.
5. М. Т. Караев, *Использование произведения Дюамеля в описании инвариантных подпространств.* — Труды ИММ АН Азерб. (1995), 137–146.
6. I. Dimovski, *Convolution calculus.* Sofia (1982).
7. М. Т. Караев, *Использование произведения Дюамеля в задачах базисности.* — Изв. АН Азерб. ССР, Сер. физ.-техн. матем. наук, No. 3–6 (1990), 145–150.
8. М. К. Фаге, Н. И. Нагнибида, *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* Наука, Новосибирск (1987).
9. М. Т. Караев, *Сложение кратностей спектра и инвариантные подпространства.* Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Баку (1991).

10. М. М. Маламуд, *О воспроизводящих подпространствах вольтерровых операторов.* — Докл. РАН **351,** No. 4 (1996), 454–458.
11. J. Mikusinski, *Convolution of functions of several variables.* — Stidua math. **20** (1961), 253–259.
12. W. F. Donoghue, *The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasinilpotent transformations.* — Pacific J. Math **7,** No. 2 (1957), 1031–1035.
13. A. Atzmon, H. Manos, *The integration operator in two variables.* — Proc. Amer. Math. Soc. **119,** No. 2 (1993), 513–523.

Karaev M. T. Some applications of Duhamel product.

The Duhamel product of functions $f$ and $g$ is defined by formula

$$(f \circledast g)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

In the present paper the Duhamel product is used in the study of the spectral multiplicity for direct sums of operators and in the description of cyclic vectors of the restriction of the integration operator in two variables $f(x, y) \mapsto \int_0^x \int_0^y f(t, \tau) d\tau\, dt$ to its invariant subspace consisting of functions that depend only on the product $xy$.

Suleyman Demirel University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics
32260 Isparta, TURKEY
garayev@fef.sdu.edu.tr

Поступило 25 июня 2003 г.