Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

А. Вагаршакян

О ВЗАИМОСВЯЗИ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Введение. Линейная система – это устройство, преобразующее входной сигнал $x(t), t \in (-\infty, \infty)$, в выходной сигнал $y(t), t \in (-\infty, \infty)$, т.е.

$$(\Phi x)(t) = y(t),$$

где Φ – ограниченный линейный оператор, действующий в $L_2(-\infty, \infty)$. В дальнейшем предполагается, что оператор Φ причинно-обусловлен и инвариантен относительно сдвигов.

При определении систем с дискретным временем берется пространство l_2 вместо $L_2(-\infty, \infty)$.

В некоторых приложениях квадрат нормы сигнала в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ равен значению переносимой сигналом энергии.

Опишем идею, играющую существенную роль в переходе от систем с непрерывным временем к системам с дискретным временем.

Пусть $x(n), \quad n = 0, \pm 1, \dots,$ – последовательность, в которой есть лишь конечное число ненулевых элементов. По этой последовательности будет построено семейство сигналов при непрерывном времени $\hat{x}_m(t), -\infty < t < \infty, \quad m = 0, \pm 1, \dots$. Очень существенно заметить, что в построении каждого сигнала $\hat{x}_m(t)$ используются только числа $x(n)$ с $n \leq m$.

Далее, построенный сигнал $\hat{x}_m(t)$ подается на вход системы с непрерывным временем, и регистрируется соответствующий сигнал $y(m)$ на выходе в момент времени $t = m$. Таким образом получается система, которая связывает последовательность $y(m), \quad m = 0, \pm 1, \dots,$ с каждой последовательностью $x(n), \quad n = 0, \pm 1, \dots$.

Для того, чтобы получить $y(m)$, в этой конструкции для различных моментов времени m строятся различные сигналы, подаваемые на вход системы с непрерывным временем.

Система с дискретным временем зависит не только от исходной системы с непрерывным временем, но также и от формулы, используемой при построении сигнала $\hat{x}(t)$ по числам $x(n), n \leq t$.

Про переход говорится, что он происходит без потери информации, если по передаточной функции получающейся системы с дискретным временем можно единственным образом восстановить передаточную функцию системы с непрерывным временем. Если это не так, то при переходе теряется информация.

В этой статье доказывается, что переход к системе с дискретным временем можно осуществить без потери информации при помощи подходящего выбора входного сигнала при непрерывном времени. Желательно, конечно, получить систему с дискретным временем с ограниченной передаточной функцией. Это условие связано с тем, что $\mathbf{H}^\infty$-норма передаточной функции соотносится с энергией, затраченной нашей системой за время работы. При нашем переходе передаточная функция построенной системы с дискретным временем может быть неограниченной. Наши параметры задаются таким образом, чтобы передаточная функция системы с дискретным временем была настолько близка к ограниченной функции, насколько возможно. Даются достаточные условия на систему с непрерывным временем, позволяющие сделать эту функцию ограниченной.

Полученные результаты можно интерпретировать еще и как тестовый алгоритм для проверки работы устройств с непрерывным временем.

2. Общие схемы интерполяции. При переходе от систем с непрерывным временем к системам с дискретным временем можно использовать разные формулы. Чтобы проиллюстрировать возникающие здесь проблемы, рассмотрим простейший пример.

Пусть входной и выходной сигналы $x(t)$ и $y(t)$ системы с непрерывным временем связаны формулой

$$y(t) = \int\limits_0^\infty x(t-s)\varphi(s)ds,$$

где $\varphi(s)$ – обобщенная функция, преобразование Лапласа которой принадлежит пространству $\mathbf{H}^\infty$. Введем обозначение

$$S(z) = \int\limits_0^\infty e^{-tz}\varphi(t)dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{1}$$

Допустим, что имеется последовательность $x(n)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, из пространства l_2. Применяя формулу

$$\tilde{x}(t) = x(m)(t - m + 1) + x(m-1)(m-t), \quad m - 1 \le t \le m, \qquad (2)$$

получаем новый сигнал. Подадим этот сигнал на вход системы с непрерывным временем. Соответствующий сигнал на выходе равен

$$y(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \tilde{x}(m-t)\varphi(t)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n}^{n+1} (x(m-n)(t-m+n+1) + x(m-n-1)(m-n-t))\varphi(n+t)dt =$$

$$= x(m) \int_{0}^{1} (t - m + 1)\varphi(t)dt +$$

$$+ x(m-1) \int_{0}^{1} ((t - m + 2)\varphi(t+1) + (m-t)\varphi(t))dt + \ldots +$$

$$+ x(m-n) \int_{0}^{1} ((t-m+n+1)\varphi(n+t) + (m-n-t+1)\varphi(n+1+t))dt + \ldots .$$

Из этой формулы следует, что по передаточной функции полученной системы с дискретным временем можно определить только моменты

$$\int_{0}^{1} \varphi(n+t)dt, \quad \int_{0}^{1} t\varphi(n+t)dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, при таком переходе информация не теряется лишь для очень небольшого класса систем.

Естественно возникает вопрос: как выбрать входной сигнал, чтобы выходной сигнал, регистрируемый в дискретные моменты времени, давал как можно больше информации о линейной системе?

Отметим, что линейная система при работе накапливает некоторую часть энергии входного сигнала и выбрасывает ее через определенное время. Естественно предположить, что входные сигналы, которые "сильнее" накапливаются в линейной системе, лучше годятся для нашей цели, т.е. могут нести больше информации о системе. Оказывается, что такие сигналы имеют особую структуру.

Пусть линейная система Φ имеет передаточную функцию $\phi(z)$, $\mathrm{Re}\,(z) > 0$, такую, что $\phi(z_0) = 0$ при некотором z_0, $\quad \mathrm{Re}\,(z_0) > 0$. Рассмотрим входной сигнал

$$x(t) = \begin{cases} e^{z_0 t}, & \text{если} \quad -\infty < t < t_0, \\ 0, & \text{если} \quad t \geq t_0. \end{cases}$$

Имеем

$$X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} x(t) dt = \frac{1}{iu - z_0}, \quad u \in (-\infty, \infty).$$

Соответствующий выходной сигнал $y(t)$, $\quad t \in (-\infty, \infty)$, имеет представление

$$Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} y(t) dt = X(u)\phi(iu) = \frac{\phi(iu)}{iu - z_0}.$$

Таким образом, $Y(u)$ допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,(u) < 0$, которое там принадлежит классу $\mathbf{H}^2$. Следовательно, $y(t) = 0$, $\quad t < 0$, и, значит, в момент времени 0 весь входной сигнал был уже накоплен внутри устройства.

После сделанных замечаний естественно рассмотреть следующие сигналы в качестве тестовых:

$$x(t) = \begin{cases} e^{zt}, & \text{если} \quad -\infty < t < t_0, \\ 0, & \text{если} \quad t \geq t_0, \end{cases}$$

где $\mathrm{Re}\,(z) > 0$; также можно рассматривать их линейные комбинации.

Чтобы избежать технических проблем, в этой статье предполагается, что система с непрерывным временем BIBO-стабильна, т.е. на ее вход может быть подан произвольный ограниченный сигнал, причем соответствующий сигнал на выходе также будет ограничен.

Пусть $\lambda_n, n = 1, \ldots,$ — последовательность комплексных чисел в правой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$. Введем обозначение

$$z_n = e^{-\lambda_n}, \quad n = 1, \ldots .$$

Пусть $f_n(z)$ – последовательность аналитических функций из пространства H^∞ таких, что

$$f_k(z_n) = \delta_{kn},$$

где δ_{kn} – символ Кронекера и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| < \infty, \quad |z| < 1.$$

Для упрощения дальнейших обозначений запишем функции $f_n(z)$ в следующем виде:

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n .$$

Пусть m – целое число. Построим сигнал $x_m(t)$ при непрерывном времени по последовательности $x(n), \quad n = m, m-1, \ldots,$ следующим образом:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k (t-m)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} x(m-n) \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(m-n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} e^{\lambda_k (t-m)} \right), \quad t < m. \tag{3}$$

При $t \geq m$ полагаем $x_m(t) = 0$.

Заметим, что в этой конструкции рассматриваются только конечные входные сигналы $x(n), \quad n = m, m-1, \ldots,$ т.е. такие, которые принимают нулевые значения при больших индексах. Следовательно, сигнал $x_m(t), \quad -\infty < t < \infty$, ограничен.

Подадим этот сигнал на вход системы с непрерывным временем. Сигнал на выходе в момент времени $t = m$ равен

$$y(m) = \int_0^{\infty} x_m(m-s)\varphi(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} x(m-n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} S(\lambda_k) a_{kn} \right),$$

где $m = 0, \pm 1, \dots$

Таким образом, получена система с дискретным временем со входным сигналом $x(n)$ и выходным сигналом $y(n)$. Передаточная функция этой системы равна

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} S(\lambda_k) a_{kn} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} S(\lambda_k) f_k(z), \quad |z| < 1.$$

Из этой формулы следует, что для произвольного $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$R(z_k) = S(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots .$$

В дальнейшем рассматриваются только переходы, описанные в этом параграфе. Произвольный переход определяется множеством $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и семейством аналитических функций $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $f_n(z_k) = \delta_{n,k}$.

Проблема состоит в следующем: как выбрать эти параметры таким образом, чтобы сохранить как можно больше информации в системе с дискретным временем об исходной системе с непрерывным временем?

3. Переход с предварительной информацией.

Здесь будут даны некоторые определения и классические результаты.

Определение. Говорят, что множество $\{z_k\}$ из единичного круга – интерполяционное множество для пространства H^{∞}, если для произвольной ограниченной последовательности чисел a_k, $k = 1, 2, \dots$, существует функция $f(z) \in H^{\infty}$ такая, что

$$f(z_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Для произвольного множества $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k \neq 0$, из единичного круга, удовлетворяющего условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty,$$

через $B(z)$ обозначается произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}.$$

Для произвольного натурального числа j по определению

$$B_j(z) = B(z)\frac{1-\bar{z}_j z}{z_j - z}\frac{z_j}{|z_j|}.$$

Сначала приведем теорему Л. Карлесона, включив в формулировку оригинальную конструкцию интерполирующей функции, принадлежащую П. Джонсу; об интерполяционных последовательностях в пространстве H^∞ см. [2, стр. 285].

Теорема (Л. Карлесон, П. Джонс). *Множество $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ является интерполяционным для пространства H^∞ тогда и только тогда, когда*

$$\inf_n |B_n(z_n)| > 0. \tag{5}$$

Семейство функций

$$f_j(z) = \frac{1-|z_j|^2}{1-\bar{z}_j z}\frac{B_j(z)}{B_j(z_j)}\times$$

$$\times \exp\left\{C\sum_{k=j}^\infty\left(\frac{1+\bar{z}_k z_j}{1-\bar{z}_k z_j} - \frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z}\right)(1-|z_k|^2)\right\}, \tag{6}$$

где $C > 0$ и $j = 1, \ldots,$ было введено П. Джонсом [4]. Отметим, что $f_j(z_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots$. Известно, см. [4], что

$$\sum_{k=1}^\infty |f_k(z)| \le M < \infty, \quad |z| < 1,$$

если выполнено условие (5).

Теорема 1. *Пусть $\{z_n\}$ – интерполяционная последовательность для пространства H^∞, удовлетворяющая условию (5), и пусть передаточная функция $S(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, системы с непрерывным временем принадлежит пространству H^∞.*

Пусть $R(z)$ – передаточная функция системы с дискретным временем, полученной из системы с непрерывным временем с помощью формулы (3), где $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность в единичном круге, удовлетворяющая условию (5), и $f_j(z)$, $j = 1, \ldots,$ – функции Джонса (6).

Тогда $R(z) \in H^\infty$ *и*

$$R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S(-\log z_n) f_n(z), \quad |z| < 1.$$

Заметим, что в переходе, описанном в теореме 1, информация о системе с непрерывным временем всегда теряется. Действительно, если о передаточной функции S системы с непрерывным временем известно только, что $S(\lambda) \in H^\infty$, то ее нельзя восстановить по числам $S(\lambda_k)$, $\quad k = 1, 2, \ldots,$ поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty,$$

что всегда выполнено для интерполяционных последовательностей.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена обсуждению вопроса о предварительной информации о передаточной функции $S(\lambda)$, которая обеспечивала бы единственность.

Нам понадобятся следующие элементарные сведения из теории гильбертовых пространств. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – семейство линейно-независимых элементов гильбертова пространства H. Единственный элемент y_n из H с минимальной нормой, удовлетворяющий условиям

$$(y_n, x_k) = -c_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $c_1, \ldots, c_n$ – заданные комплексные числа, допускает представление

$$y_n = \frac{1}{G(x_1, \ldots, x_n)} \det(A_n), \tag{7}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ c_1 & (x_1, x_1) & \cdots & (x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & (x_n, x_1) & \cdots & (x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

и

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \det |(x_i, x_j)|_{i,j=1:n}$$

– определитель Грама.

Обозначим через D^2_α, $\quad 0 \le \alpha \le 1$, пространство аналитических в правой полуплоскости функций из пространства $\mathbf{H}^2$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1} |f'(x+iy)|^2 x^\alpha dxdy < \infty.$$

По теореме Пэли–Винера (см. [2]) имеем

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}F(t)dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Так как $f(z) \in D^2_\alpha$, получаем

$$\int_0^\infty |F(t)|^2(1+t^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}dt < \infty.$$

В пространстве D^2_α введем скалярное произведение

$$(f,g)_\alpha = \int_0^\infty F(t)\bar{G}(t)(1+t^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}dt,$$

где $f(z)$ и $g(z)$ – преобразования Лапласа функций $F(t)$ и $G(t)$.

Введем специальную функцию

$$K_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^\infty e^{-xz}(1+x^2)^{\alpha-1/2}dx.$$

Заметим, что для произвольного z, $\operatorname{Re} z > 0$, имеем

$$f(z) = 2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)\left(f(w), \frac{K_{\alpha/2-1}(w+z)}{(w+z)^{\alpha/2-1}}\right)_\alpha.$$

Определение. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность в правой полуплоскости и σ, $\quad 0 \le \sigma \le 1$, – фиксированное число. Введем обозначение

$$\rho_\sigma(iy,\Lambda) = \inf_n \frac{|\lambda_n - iy|}{(\operatorname{Re}\lambda_n)^\sigma}, \quad -\infty < y < \infty.$$

При $\sigma = 0$ число $\rho_0(iy, \Lambda)$ является расстоянием от точки iy до множества Λ. В случае $\sigma = 1$ имеем

$$\rho_1(iy, \Lambda) \geq 1$$

при всех $-\infty < y < \infty$.

Аналог теоремы 2 для функций, определенных в единичном круге, можно найти в [3]; теорема 2 доказывается тем же способом.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in H^2$ не равна тождественно нулю и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 |f'(x+iy)|^2 x^\alpha dx \right) dy < \infty,$$

где $0 \leq \alpha < 1$. Пусть Λ – множество нулей функции f. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(iy, \Lambda) \frac{dy}{1+y^2} > -\infty.$$

Оказывается, что в рамках этих конструкций, вообще говоря, невозможно добиться того, чтобы передаточная функция получающейся системы с дискретным временем была ограниченной. Естественно возникает вопрос: можно ли добиться этого, если наложить дополнительные условия на передаточную функцию системы с непрерывным временем? Желательно, чтобы эти дополнительные условия были как можно слабее. Поэтому в следующей теореме параметр α должен быть близок к 1. Для более тонких семейств весов таких, как $(1+x)\log^\sigma(2+x)$, $x > 0$, этот вопрос остается открытым.

Теорема 3. *Пусть передаточная функция $S(\lambda), \operatorname{Re}\lambda > 0$, системы с непрерывным временем принадлежит пространству $\mathbf{H}^\infty$ и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |S'(x+iy)|^2 x^\alpha dx dy < \infty,$$

где $0 \leq \alpha < 1$. Тогда существует последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$, такая, что переход, основанный на формуле (3), где $f_j(z)$ – функции Джонса (6), дает систему с дискретным временем с передаточной функцией $R(z) \in H^\infty, |z| < 1$.

Функция $S(\lambda)$ может быть восстановлена единственным образом по $R(z)$. Для этого в формуле (7) положим

$$x_k = \frac{K_{\alpha/2-1}(\lambda_k + z)}{(\lambda_k + z)^{\alpha/2-1}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

и

$$c_k = \frac{R(z_k)}{2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha + 1/2)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $z_k = e^{-\lambda_k}$, и построим последовательность $y_n \in D^2_\alpha$. Тогда предел функций y_n по норме пространства D^2_α есть функция $S(\lambda)$.

Доказательство. Достаточно построить интерполяционное множество для H^∞, которое не удовлетворяет условиям из теоремы 2.

Пусть σ – число такое, что

$$\frac{1+\alpha}{2} < \sigma < 1.$$

Пусть $\lambda_{nk} = 2^{-n} + ik2^{-\sigma n}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots, [2^{\sigma n}]$.

Хорошо известно, см. [2, стр. 285], что множество $\Lambda = \{\lambda_{nk}\}$ является интерполяционным тогда и только тогда, когда существует константа $a > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\lambda_{lm} - \lambda_{kn}}{\bar{\lambda}_{lm} + \lambda_{kn}}\right| \geq a > 0$$

при всех $(n, k) \neq (l, m)$, и для любого квадрата

$$Q = \{x + iy; \quad 0 < x < \delta, \quad |y - y_0| < \delta\}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{\lambda_{kn} \in Q} \operatorname{Re} \lambda_{kn} \leq A\delta,$$

где a, A не зависит от y_0 и от δ.

Если $m = n$ и $k \neq l$, имеем

$$\left|\frac{\lambda_{ml} - \lambda_{nk}}{\bar{\lambda}_{ml} + \lambda_{nk}}\right|^2 = \frac{(k-l)^2}{(k-l)^2 + 4^{1-n+\sigma n}} \geq \frac{1}{5};$$

если $m \neq n$, то

$$\left|\frac{\lambda_{ml} - \lambda_{nk}}{\bar{\lambda}_{ml} + \lambda_{nk}}\right|^2 \geq \left(\frac{2^{-n} - 2^{-m}}{2^{-n} + 2^{-m}}\right)^2 \geq \frac{1}{9}.$$

Далее, имеем

$$\sum_{\lambda_{kn}\in Q} \operatorname{Re}\lambda_{kn} \le 2\delta \sum_{n=[\lg_2 \frac{1}{\delta}]}^{\infty} 2^{-(1-\sigma)n} \le A\delta,$$

где A – константа.

Пусть β – некоторое число, для которого

$$\frac{1+\alpha}{2} < \frac{1+\alpha}{2} + \beta < \sigma.$$

Введем обозначение

$$\Delta_{kn} = \{iy; \quad |y - k2^{-\sigma n}| < 2^{-(\frac{1+\alpha}{2}+\beta)n}\},$$

где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots, [2^{\sigma n}]$. Легко видеть, что для всякого $y \in (0,1)$ имеем

$$iy \in \bigcup_{k=1}^{[2^{\sigma n}]} \Delta_{kn},$$

если n – достаточно большое число.

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(iy, \Lambda) \le |iy - (2^{-n} + ik2^{-\sigma n})| 2^{\frac{1+\alpha}{2}n} < 2^{-\beta n+1},$$

где $iy \in \Delta_{kn}$ и n – большое число. Таким образом, для произвольного n верна оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(iy, \Lambda) \frac{dy}{1+y^2} \le (1-\beta n) \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(iy, \Lambda) \frac{dy}{1+y^2} = -\infty.$$

4. Переход без потери информации.

В этом параграфе вместо функций (6) будет построено новое семейство функций, которое позволит осуществить переход без потери информации. В таком случае всегда будет получаться система с дискретным временем, передаточная функция которой неограничена.

Задача состоит в таком выборе параметров перехода, чтобы передаточная функция полученной системы с дискретным временем была как можно ближе к H^∞. Рассмотрим физический смысл такой постановки вопроса. Система с неограниченной передаточной функцией должна иметь бесконечный источник энергии. Тем не менее, если на вход такой системы подать сигналы $\{x_n\}_\infty^\infty$, для которых $x_n = 0$, $|n| \geq N$, то при образовании соответствующего выходного сигнала учитывается только часть

$$S_N(z) = \sum_{k=-N}^{N} g_k z^k$$

передаточной функции

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^k$$

заданной системы. Таким образом, чем лучше оценка функции $S(z)$, тем медленнее нормы $||S_N||_\infty$ растут при увеличении N. Грубо говоря, это означает, что можно добиться требуемой погрешности вычисления выходного сигнала, при этом оценивая необходимые затраты энергии.

Теорема 4. *Пусть $h(t) \geq 2$, $t > 0$, – произвольная убывающая неограниченная функция. Тогда существует последовательность z_n, $n = 1, 2, \ldots$, в единичном круге, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) = \infty,$$

и существуют аналитические функции $f_k(z)$, $|z| < 1$, удовлетворяющие условиям $f_j(z_k) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots,$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)| \leq Mh(1 - |z|), \quad |z| < 1.$$

Для произвольной ограниченной последовательности c_n, $n = 1, 2, \ldots$, аналитическая функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(z)$$

решает интерполяционную задачу

$$f(z_n) = c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и

$$|f(z)| \le M_1 h(1 - |z|), \quad |z| < 1.$$

Доказательство. Пусть m_n, $n = 1, 2, \dots,$ – возрастающая последовательность положительных чисел, причем $m_n \ge n m_k$, если $n > k$, и

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{m_n} \le \ln h(1 - |z|), \quad |z| < 1.$$

Положим

$$r_n = 1 - \frac{1}{m_n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Интерполяционное множество состоит из точек

$$z_{n,k} = r_n e^{\frac{2\pi i k}{m_n}}, \quad k = 1, \dots, m_n, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{8}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (1 - |z_{n,k}|) = +\infty.$$

Через $C(z)$ обозначим функцию

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{z}{r_n}\right)^{m_n}}{1 - (z r_n)^{m_n}}, \quad |z| < 1.$$

Из следующих формул вытекают сходимость этого бесконечного произведения и оценка для величины функции $C(z)$:

$$|C(z)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - z^{m_n} \frac{r_n^{-m_n} - r_n^{m_n}}{1 - (z r_n)^{m_n}} \right| \le$$

$$\le \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + |z|^{m_n} \frac{r_n^{-m_n} - r_n^{m_n}}{1 - r_n^{m_n}} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z|^{m_n} (1 + r_n^{-m_n})) \le$$

$$\le \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 4|z|^{m_n}) \le \exp\{4 \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{m_n}\} \le h(1 - |z|), \quad |z| < 1.$$

Для функций

$$C_m(z)=\frac{1-zr_m}{1-\frac{z}{r_m}}C(z),\quad m=1,2,\dots,$$

имеем

$$|C_k(r_k)|=\left(\prod_{n=1}^{k-1}\frac{\left(\frac{r_k}{r_n}\right)^{m_n}-1}{1-(r_kr_n)^{m_n}}\right)\frac{(1-r_k^2)m_k}{1-r_k^{2m_k}}\left(\prod_{n=k+1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{r_k}{r_n}\right)^{m_n}}{1-(r_nr_k)^{m_n}}\right)\geq$$

$$\geq\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-(r_kr_n)^{m_n})\right)^{-1}\prod_{n=1}^{k-1}\left(\left(\frac{r_k}{r_n}\right)^{m_n}-1\right)\prod_{n=k+1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{r_k}{r_n}\right)^{m_n}\right)$$

$$\geq c_1\prod_{n=1}^{k-1}\left(\frac{(r_k^{m_k})^{\frac{m_n}{m_k}}}{r_n^{m_n}}-1\right)\prod_{n=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{(r_k^{m_k})^{\frac{m_n}{m_k}}}{r_n^{m_n}}\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-(r_1r_n)^{m_n})\right)^{-1}.$$

Принимая во внимание, что $m_n\geq nm_k$ при $n>k$ и $\lim\limits_{n\to\infty}r_n^{m_n}=e^{-1}$, получаем

$$|C_k(r_k)|\geq c_2(e^{1-\frac{1}{k}}-1)^{k-1}\prod_{n=k+1}^{\infty}(1-e^{1-n}),\quad k=1,2,\dots.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|C_k(r_k)|}$$

сходится.

Введем обозначение

$$f_{n,k}(z)=\left(\frac{1-r_n^2}{1-\bar{z}_{n,k}z}\right)^2\frac{C_n(ze^{-\frac{2\pi ik}{m_n}})}{C_n(r_n)}.\tag{9}$$

Для произвольной пары (n,k) имеем

$$f_{n,k}(z_{n,k})=1,$$

а для любых различных пар $(n,k)\neq(p,q)$ имеем

$$f_{n,k}(z_{p,q})=0.$$

Далее, при $|z|<1$ справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}|f_{n,k}(z)|\leq$$

$$\leq h\left(\frac{1-|w|}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|C_n(r_n)|}\left(\frac{4}{m_n}\sum_{k=1}^{m_n}\frac{1-r_n^2}{|1-\bar z_{n,k}z|^2}\right)\leq Ch(1-|w|),$$

где C – константа.

Следовательно, решение интерполяционной задачи может быть записано в виде

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m_n}c_{n,k}f_{n,k}(z).$$

Пусть $\{z_k\}$ – последовательность различных точек в D, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)=\infty.$$

Определим последовательность функций $\{g_k\}$ формулами

$$g_1(z)=\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}}{1-\bar z_1 z}$$

и

$$g_k(z)=\frac{\sqrt{1-|z_k|^2}}{1-\bar z_k z}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{z-z_j}{1-\bar z_k z},\quad k=2,3,\ldots.$$

Доказательство следующей классической теоремы можно найти в [4, стр. 363].

Теорема (Walsh J. L.). *Функции $\{g_k(z)\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве H^2. Для любой функции $f\in H^2$ имеется разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k g_k(z),\tag{10}$$

где ряд сходится по норме пространства H^2, и каждый коэффициент c_k определяется значениями $f(z_1),\ldots,f(z_k)$.

Теорема 5. *Пусть $S(\lambda)\in H^\infty$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, – передаточная функция системы с непрерывным временем. Тогда для любой убывающей неограниченной функции $h(t)\geq 1$, $t>0$, существуют переход с параметрами (8) и семейство функций (9) такие, что*

$$|R(z)|\leq Ah(1-|z|),\quad |z|<1,$$

где A – константа, а $R(z)$ – передаточная функция полученной системы с дискретным временем.

Занумеруем множество (8), используя в качестве индексов натуральные числа, т.е.

$$\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{r_n e^{\frac{2\pi i k}{m_n}}, \quad k = 1, \dots, m_n, \quad n = 1, 2, \dots\}.$$

По функции $R(z)$ можно восстановить передаточную функцию $S(\lambda)$ единственным образом с помощью формулы

$$S\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = c_1 \frac{\sqrt{1-|w_1|^2}}{1-\bar{w}_1 z} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{\sqrt{1-|w_n|^2}}{1-\bar{w}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z-w_k}{1-\bar{w}_k z},$$

где ряд сходится в пространстве H^2 и

$$w_n = \frac{\ln(e\zeta_n)}{\ln(\frac{e}{\zeta_n})}.$$

Каждый коэффициент c_n определяется по значениям $R(\zeta_k)$, $\quad k = 1, \dots, n$.

Доказательство. В качестве параметров перехода выберем множество $\{z_{n,k}\}$, построенное в предыдущей теореме, и в качестве семейства функций возьмем (9).

Для передаточной функции полученной системы с дискретным временем имеем

$$R(z_{n,k}) = S(-\ln z_{n,k}).$$

Таким образом, известны значения передаточной функции системы с непрерывным временем $S(\lambda)$ в точках $\lambda = -\ln z_{n,k}$. Далее надо применить классическую формулу (10) и получить представление для $S(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Литература

1. K. Yosida, *Functional analysis.* — Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1965).
2. J. Garnett, *Bounded analytic functions.* — Academic Press, New York–London (1981).
3. A. Vagharshakyan, *On the zeros of analytic functions of some classes.* — Journal of Contemporary Mathematics Analysis, **13**, No. 506 (1978).
4. J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* — AMS, New York (1935).

5. P. W. Jones, L^∞ *estimates for the* $\bar\partial$ *problem in a half-plane.* — Acta Mathematica, **150** (1983), 137–152.

Vagharshakyan A. Relationship between discrete and continuous time systems.

The input and output signals of a continuous-time system can be registered only at fixed time moments, separated at least by a lap $h > 0$. It is natural to ask whether the information obtained permits us to restore the original continuous-time system uniquely. Theoretically, it is possible to solve this problem, by letting $h > 0$ tend to zero. However, the value of h depends upon technical possibilities, and it is important to solve this problem for fixed values of $h > 0$.

In this paper we prove that it is possible to organize the passage to the discrete-time system lossless of information by a suitable choice of input continuous-time signals. It is desirable, of course, that the resulting discrete-time system have bounded transfer function. Here we give conditions on the continuous-time system that provide that property.

Институт Математики
Академии Наук Армении
E-mail: vashot@instmath.sci.am

Поступило 26 мая 2003 г.