Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

В. А. Барт

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА–ГОЛУЗИНА–КРЫЛОВА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ГЛАДКИЕ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

1. Введение

Формула Карлемана–Голузина–Крылова (CGK) появилась впервые в работе [1]. Она восстанавливает аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию f класса Харди $H^1(\mathbb{D})$ по ее граничным значениям на произвольном подмножестве $E \subset \mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ положительной меры Лебега. Именно,

$$f(z) = \lim_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} Q^{-\sigma}(z) \int\limits_E \frac{f(t)Q^{\sigma}(t)\,dt}{t-z}, \qquad \text{(CGK)}$$

где $z \in \mathbb{D}$, Q – внешняя функция в $\mathbb{D}$, причем

$$|Q(z)| = \begin{cases} e & \text{п.в. на } E \\ 1 & \text{п.в. на } \mathbb{T}\setminus E. \end{cases}$$

В [1] установлено, что предел в (CGK) – равномерный на каждом круге $r\mathbb{D}$, $0 < r < 1$.

Формуле (CGK) и ее многомерным обобщениям посвящены многие публикации (в [2] имеется обширный список литературы). Упомянем только монографию [3] и статьи [4–6].

В дальнейшем, если особо не оговорено противное, E будет обозначать компактную дугу, $E = E_\delta \subset \mathbb{T}$, такую, что

$$CE := \mathbb{T}\setminus E = \{e^{i\theta} : |\theta| < \delta\}, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Точки $e^{+i\delta}$ и $e^{-i\delta}$ мы будем обозначать, соответственно, через P и $\overline{P}$, а $\varepsilon-$окрестность пары $\{P, \overline{P}\}$ – через $V(\varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$.

Цель настоящей статьи – исследовать сходимость описанного классического варианта формулы (CGK) на пространствах аналитических функций с граничными значениями на $\mathbb{T}$, обладающими определенной гладкостью. А именно, нас будут интересовать

Работа поддержана грантом НШ-2266.2003.1 и грантом РФФИ 03-01-00377.

аналитические функции, производные которых (порядка $k \geqslant 0$) удовлетворяют некоторому условию Липшица.

Интегральное ядро в формуле (CGK) разрывно в точках P и $\overline{P}$ на $\mathbb{T}$ (на концах дуги E), поэтому естественно рассматривать сходимость формулы в простанствах гладких функций на (компактных) дугах, не содержащих двух этих точек.

Основным итогом нашего исследования являются теоремы 1, 2 и 3 (см. пп. 4, 5 и 6), которые, в частности, отвечают на следующие вопросы.

1. Сходится ли формула (CGK) в метрике Липшица на компактной дуге окружности $\mathbb{T}$, не содержащей P и $\overline{P}$, при условии, что восстанавливаемая функция f удовлетворяет условию Липшица того же или большего порядка на всей окружности $\mathbb{T}$?

2. Можно ли сказать то же самое о сходимости k-х производных правой части формулы (CGK), если $f^{(k)} \in \operatorname{Lip}_{\alpha}(\mathbb{T})$ или $f^{(k)} \in \operatorname{Lip}_{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{T})$?

3. Какова скорость сходимости (или расходимости)?

Схема доказательств теорем 1 и 3 напоминает прием из статьи [7], посвященной некоторым операторам свертки на окружности. Но если, например, в монографии [8, гл. IV] автор использует ее для установления сходимости аппроксимационных последовательностей только с высокими порядками гладкости, то переход в комплексную плоскость позволяет применить ее и в пространствах Липшица малых порядков.

За рамками этой статьи осталась аналогия формулы (CGK) с суммами Фурье (замеченная В. П. Хавиным), которую можно проследить во всех основных утверждениях и даже в их доказательствах. По этому поводу см. также [6], где получены результаты отрицательного характера (формула (CGK) не обязана сходиться в метрике пространства X – даже на дуге, "укороченой" так, как указано выше – если $f \in X$, а X есть диск-алгебра или $H^1(\mathbb{D})$).

Впрочем, сходство с теорией сингулярных интегралов (в смысле монографии [9]) весьма приблизительно: операторы, участвующие в (CGK), далеки от сверточных, и это приводит к значительному усложнению формул и оценок (см., напр., "формулу понижения" для производной остатка в (CGK), лемма 3).

Введем обозначения:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\};$$

$$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\};$$

m – нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$:

$$dm(z) = \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Через A мы обозначаем диск-алгебру, то есть множество всех функций, непрерывных в $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$ и аналитических в $\mathbb{D}$; нормой функции $f \in A$ считается $\|f\|_\infty = \max\limits_{\mathbb{T}} |f|$.

Символ H^p обозначает пространство Харди функций, аналитических в $\mathbb{D}$, с нормой

$$\|f\|_{H^p} = \sup\left\{ \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \, d\theta \right)^{1/p}, \ 0 < r < 1 \right\},$$

где $1 \leqslant p < +\infty$;

H^∞ обозначает пространство всех аналитических функций, ограниченных в $\mathbb{D}$, с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{D}} |f|.$$

Говоря о функции класса H^p, мы будем отождествлять ее с ее предельными радиальными значениями, которые существуют почти всюду на $\mathbb{T}$ и полностью определяют саму функцию (см., например, [10–12]).

Пусть $M \subset \mathbb{T}$. Обозначим через $\operatorname{dist}(z, M)$ расстояние от точки $z \in \mathbb{D}$ до M; кроме того, $\varrho(z) := \operatorname{dist}(z, \mathbb{T})$.

Замыкание произвольного множества $S \subset \mathbb{C}$ будем обозначать через $\operatorname{Clos} S$.

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $L \subset \mathbb{T}$ – компактная дуга или объединение конечного числа компактных дуг.

Пространством Липшица $\operatorname{Lip}_\alpha(L)$ называется линейное банахово пространство функций на L с конечной нормой

$$\|f\|_{\operatorname{Lip}_\alpha(L)} = \\ = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : \, x, y \in L, \, x \neq y \right\} + \max\{|f(x)| : \, x \in L\}.$$

Введем еще пространства:

$$\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L) : = A \cap \operatorname{Lip}_\alpha(L); \quad \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} := A \cap \operatorname{Lip}_\alpha(\mathbb{T}).$$

(См. замечание о граничных значениях выше).

Через $C_k^{\mathrm{A}}(L)$ обозначим пространство функций из диск-алгебры таких, что их k-я производная непрерывна в $\mathbb{D}$ вплоть до дуги L. Нормой в $C_k^{\mathrm{A}}(L)$ служит величина

$$\|f\|_{L,\infty} + \|f'\|_{L,\infty} + \ldots + \|f^{(k)}\|_{L,\infty}, \quad \big\|\xi\big\|_{L,\infty} := \max_L |\xi|.$$

Если $f \in H^1$, то для $z \in \mathbb{D}$ и $\sigma > 0$ имеем

$$f(z) = Q^{-\sigma}(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_E \frac{f(t)Q^{\sigma}(t)}{t-z} dt +$$

$$+ Q^{-\sigma}(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{CE} \frac{f(t)Q^{\sigma}(t)}{t-z} dt = (\mathrm{CGK})_{\sigma}^{z}(f) + R_{\sigma}^{z}(f). \qquad (1)$$

Нам понадобится классическая теорема Харди–Литтлвуда, характеризующая функцию класса $\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$ в терминах роста ее производной (см., например, [12, 13]).

Теорема (Харди–Литтлвуда). *Для того, чтобы функция f, регулярная в круге $\mathbb{D}$, была непрерывна в замыкании $\mathbb{D}$ и на $\mathbb{T}$ удовлетворяла условию Липщица порядка α, $0 < \alpha \le 1$:*

$$\left|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})\right| \leqslant K \cdot |\theta_1 - \theta_2|^{\alpha}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы при $\zeta \in \mathbb{D}$ выполнялось неравенство

$$|f'(\zeta)| \leqslant \frac{M}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}},$$

где M – некоторая постоянная.

Если выполнено последнее условие, то $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$.

Мы воспользуемся следующей леммой для доказательства удобного нам варианта теоремы Харди–Литтлвуда.

Лемма 1. *Пусть $0 < \alpha \le 1$, $p \in \mathbb{R}$, $\zeta \notin \mathbb{T}$, $\widetilde{\zeta} = \zeta/|\zeta|$. Положим*

$$I_{\alpha,p}(\zeta) := \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|t - \widetilde{\zeta}|^{\alpha}}{|t-\zeta|^{p}} dm(t).$$

Существует постоянная $C = C(p,\alpha) > 0$ такая, что при всех $\zeta \in \mathbb{D}$ справедливы следующие неравенства:

при $p > 1+\alpha$:

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le \frac{C}{(\varrho(\zeta))^{p-1-\alpha}};$$

при $p = 1+\alpha$:

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le C|\ln \varrho(\zeta)|;$$

при $p < 1+\alpha$:

$$I_{\alpha,p}(\zeta) \le C.$$

Доказательство леммы 1 предоставляем читателю.

Теорема (Харди–Литтлвуда, локальный вариант). *Предположим, что γ – компактная дуга на $\mathbb{T}$, функция f регулярна в $\mathbb{D}$, $0 < \alpha \leqslant 1$.*

(а) *Если найдется такая константа $M > 0$, что для всех $\zeta \in \gamma$, $0 < r < 1$, верна оценка*

$$|f'(r\zeta)| \leqslant \frac{M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \tag{2}$$

то предельные радиальные значения $f(\zeta)$, $\zeta \in \gamma$, функции f существуют всюду на γ, и найдется такая константа $C_\alpha > 0$, зависящая только от α, что

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}\ \alpha(\gamma)} \leqslant C_\alpha \cdot M + |f(0)|.$$

(б) *Обратно, пусть $\varepsilon > 0$, $f \in H^1(\mathbb{D})$, функция f непрерывна вплоть до ε-окрестности γ_ε (на $\mathbb{T}$) дуги γ, и $\|f\|_{\mathrm{Lip}\ \alpha(\gamma_\varepsilon)} = M$.*

Тогда существует константа C_α, зависящая только от α, такая, что

$$|f'(r\zeta)| \le \frac{\|f\|_{H^1} + M}{\varepsilon^2} + \frac{C_\alpha \cdot M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \quad 0 \le r \le 1,\ \zeta \in \gamma.$$

Доказательство. Из (2) следует существование предела

$$f(\zeta) := \lim_{r\uparrow 1} f(r\zeta) = \int\limits_0^1 f'(r\zeta)dr + f(0) \tag{3}$$

равномерно относительно $\zeta \in \gamma$.

Пусть $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$, $\zeta_2 = e^{i\theta_2}$, ζ_1, $\zeta_2 \in \gamma$. Будем считать, что $h := |\theta_1 - \theta_2| < 1$. Интегрируя вдоль пути, состоящего из радиальных отрезков $\left[(1-h)e^{i\theta_j}, e^{i\theta_j}\right]$, $j = 1, 2$, и смыкающей их дуги окружности $(1-h)\gamma$, имеем

$$\left|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})\right| \leqslant \int\limits_{1-h}^{1} \left|f'(e^{i\theta_1})\right| dr + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} (1-h)\left|f'(he^{it})\right| dt +$$

$$+ \int\limits_{1-h}^{1} \left|f'(e^{i\theta_2})\right| dr \leqslant \int\limits_{1-h}^{1} \frac{2M dr}{(1-r)^{1-\alpha}} + \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Mh}{(1-h)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= M\left(\frac{2}{\alpha} + h\right) h^{\alpha} \leqslant M\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) |\theta_1 - \theta_2|^{\alpha} \leqslant C_\alpha |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Далее, предположим, что $\max\limits_{\gamma} |f| = f(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \gamma$. Тогда

$$\max_{\gamma} |f| \leqslant \int\limits_{0}^{1} |f'(r\zeta_0)|\, dr + |f(0)| \leqslant \int\limits_{0}^{1} \frac{M dr}{(1-r)^{1-\alpha}} + |f(0)| \leqslant \frac{M}{\alpha} + |f(0)|,$$

что и доказывает утверждение (а).

Утверждение (б) при $0 < \alpha < 1$ доказывает следующая цепочка неравенств:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t) - f(\widetilde{z})}{(t-z)^2} dt \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma_\varepsilon} \frac{|f(t)| + |f(\widetilde{z})|}{|t-z|^2} dm + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{|f(t) - f(\widetilde{z})|}{|t-z|^2} dm \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f\|_{H^1} + |f(\widetilde{z})|\right) + M \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|t-\widetilde{z}|^{\alpha}}{|t-z|^2} dm \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f\|_{H^1} + M\right) + \frac{MC_\alpha}{(\varrho(z))^{1-\alpha}},$$

по лемме 1 (здесь $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{z} = z/|z|$).

Пусть $\alpha = 1$. Имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

При $z \notin \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ интеграл справа обращается в нуль по интегральной теореме Коши. Пусть снова $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{z} \in \gamma_\varepsilon$; обозначив через z^* точку, симметричную z относительно $\mathbb{T}$, получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)dt}{(t-z^*)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma_\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(t-z^*)^2} \right) f(t)dt = I + II,$$

причем, очевидно,

$$|I| \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot \|f\|_{H^1}.$$

Функция f – липшицева 1-го порядка и имеет производную $(f(e^{i\theta}))'_\theta$, $t = e^{i\theta} \in \gamma_\varepsilon$, m-почти всюду на γ_ε, причем $|f'_\theta| \leqslant M$ m-почти всюду на γ_ε. Поэтому, вводя обозначения $f'(t) := itf'_\theta(t)$, $t = e^{i\theta}$, интеграл II можно взять по частям:

$$II = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-z^*} - \frac{1}{t-z} \right) f(t)\Big|_{t=A}^{t=B} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z^*} \right) f'(t)dt = II_1 + II_2,$$

где A и B – концы дуги γ_ε;

$$|II_1| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \cdot \max_{\gamma_\varepsilon} |f| \leqslant \frac{M}{\pi\varepsilon};$$

$$|II_2| = \left| \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f'(t)(\mathcal{P}(t,z))dm(t) \right| \leqslant M \int\limits_{\mathbb{T}} (\mathcal{P}(t,z))dm(t) = M,$$

где $\mathcal{P}(t,z) = (1-|z|^2)/|t-z|^2$, $t \in \mathbb{T}$, $z \in \mathbb{D}$ – ядро Пуассона с полюсом z. $\square$

2. Свойства функции Q

В формуле (CGK) в качестве Q, вообще говоря, можно взять любую внешнюю в круге $\mathbb{D}$ функцию, для которой $|Q| \equiv 1$ почти

всюду на CE и
$$\int_E \log|Q|\,dm > 0.$$

Эти условия обеспечивают равенство
$$\lim_{\sigma\to\infty} R_\sigma^z(f) = 0$$
при $|z| < 1$. Мы же остановимся на классическом варианте формулы (CGK), положив $|Q| \equiv e$ на множестве E.

В этом случае
$$Q(z) = e^{\Phi(z)}, \quad z \in \mathbb{D},$$
где отображение Φ поддается простому геометрическому описанию, конформно и однолистно отображает замкнутый круг $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$ без точек $P = e^{i\delta}$ и $\overline{P}$ на полосу $\Pi = \{x + iy\colon 0 \le x \le 1\}$ (см. Рис. 1). При этом прямые $\{x = \alpha/\pi\}$, где $0 \le \alpha \le \pi$, суть образы соответствующих дуг окружностей, опирающихся на P и $\overline{P}$, образующих с единичной окружностью углы величины α.

Вот некоторые свойства функции Φ, вытекающие из определения.

Свойство 1. Пусть $z \in \mathbb{D}\cup\mathbb{T}\setminus\{P,\overline{P}\}$. Обозначим через γ_z дугу окружности, лежащую в $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$, опирающуюся на точки P и $\overline{P}$ и проходящую через точку z.

Из определения функции Φ следует, что величина $\operatorname{Re}\Phi(z)$ остается постоянной на каждой из дуг γ_z (см. Рис. 1). Легко видеть, что семейство дуг $\{\gamma_x\colon x \in [-1, 1]\}$ заполняет весь круг $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$. При этом значение $\operatorname{Re}\Phi(x)$ монотонно убывает от 1 до 0 при x, возрастающем от -1 до 1.

Обозначим через Ω_z область, заключенную между дугами γ_z и CE. При любом $t \in \operatorname{Clos}\Omega_z$, $t \ne P, \overline{P}$, имеем $|Q(t)/Q(z)| \leqslant 1$, так как $\operatorname{Re}\Phi(t) \leqslant \operatorname{Re}\Phi(z)$.

Рассмотрим функцию $\Psi\colon \Pi \to (\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus\{P,\overline{P}\}$, обратную к Φ. Нам удобно представить ее в виде
$$\Psi(w) = M(e^{i\pi w}), \quad w \in \Pi,$$
где
$$M(\tau) = \frac{1 + P\tau}{P + \tau}$$

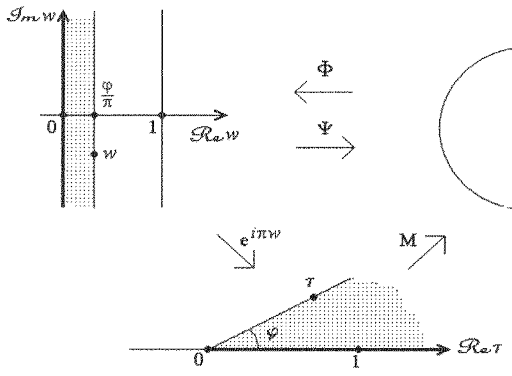

Рис. 1: к свойству 1.

конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$ на $(\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus\{P,\overline{P}\}$, причем луч $[0,+\infty)$ отображается на дугу CE, а точки 0, ∞ отвечают точкам $\overline{P}$, P соответственно.

Свойство 2. Полагая
$$\tau = e^{i\pi w}, \quad M := M(\tau),$$
получим
$$\tau = \frac{1-MP}{M-P},$$
так что
$$\Psi'(w) = i\pi\tau\cdot M'(\tau) = i\pi\tau\frac{P^2-1}{(P+\tau)^2} = i\pi(P^2-1)\cdot\frac{\frac{1-MP}{M-P}}{(P+\frac{1-MP}{M-P})^2} =$$
$$= i\pi(P^2-1)\cdot\frac{(M-P)(1-MP)}{(1-P^2)^2} = \frac{i\pi P}{1-P^2}(M-P)(M-\overline{P}),$$
где мы учли равенство $\overline{P} = 1/P$.

Далее,
$$\frac{P^2-1}{P} = e^{i\delta} - e^{-i\delta} = 2i\sin\delta,$$
откуда
$$\Psi'(w) = \frac{-\pi}{2\sin\delta}\left(M(e^{i\pi w}) - P\right)\left(M(e^{i\pi w}) - \overline{P}\right) =$$
$$= \frac{-\pi}{2\sin\delta}\left(\Psi(w) - e^{i\delta}\right)\left(\Psi(w) - e^{-i\delta}\right).$$

По формуле для производной обратной функции имеем

$$\frac{1}{\Phi'(z)} = \Psi'(w) = \frac{-\pi}{2\sin\delta}(z - e^{i\delta})(z - e^{-i\delta}), \quad z = \Psi(w),$$

откуда следует, что *функция* $1/\Phi'(z)$ *есть аналитический многочлен второй степени с простыми нулями* $e^{+i\delta}$ *и* $e^{-i\delta}$.

Свойство 3. Функция $\Phi(z)$, $z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T} \setminus \{P, \overline{P}\}$, конформно отображает дугу CE на мнимую ось, и по принципу симметрии Римана-Шварца допускает аналитическое продолжение через эту дугу:

$$\Phi(\zeta) = -\Phi(1/\overline{\zeta}), \quad \zeta \neq P, \overline{P},$$

так что подобное продолжение имеет и функция Q:

$$Q(\zeta) = \frac{1}{\overline{Q(1/\overline{\zeta})}}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \cup \mathbb{T}. \tag{4}$$

При любом $\delta \in (0, \pi)$ область $\Omega_{1/2}$, отсекаемая от $\mathbb{D}$ дугой $\gamma_{1/2}$, отображается функцией Φ на полосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < c_\delta\}$, где $c_\delta = \Phi(1/2) \in (0, 1)$. Легко видеть, что радиальные отрезки $[0, P]$ и $[0, \overline{P}]$ не пересекаются с $\Omega_{1/2}$, и значит их Φ-образы находятся вне указанной полосы. *Таким образом, на этих отрезках*

$$\operatorname{Re}\Phi \geqslant c_\delta, \quad |Q| \geqslant e^{c_\delta}, \quad \textit{и} \quad |Q(\zeta)| = \frac{1}{|Q(1/\overline{\zeta})|} \leqslant e^{-c_\delta} < 1,$$

если $|\zeta| > 1$ *и* ζ *лежит на лучах с началом в точке* 0 *и проходящих через* P, $\overline{P}$.

Свойство 4. *Функция* Φ *продолжима с отрезка* $(-1; 1)$ *до вещественно-аналитической вещественной монотонно убывающей функции на всей вещественной прямой. Кроме того, найдутся положительные константы* $C_1(\delta)$, $C_2(\delta)$ *такие, что*

$$C_1(1-t) < \Phi(t) < C_2(1-t), \quad t \in [0, 2].$$

Это следует из определения функции Φ, а также из того, что

$$\Phi(1) = 0; \; \Phi'(t) = \frac{2\sin\delta}{-\pi(t^2 - 2t\cos\delta + 1)} < 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \delta < \pi$$

(см. свойство 2).

Свойство 5. *При любом ε_0 найдется такое число $c(\varepsilon_0) > 0$, что, если $\sigma > 0$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и $\zeta \in (CE \setminus V(\varepsilon_0))_{1/\sigma}$, где $(CE \setminus V(\varepsilon_0))_\lambda$, $\lambda > 0$, обозначает двумерную λ-окрестность множества $(CE \setminus V(\varepsilon_0))$, то*

$$|Q^\sigma(\zeta)| < c(\varepsilon_0).$$

Доказательство. Если $\xi \in CE \setminus V(\varepsilon_0)$, то $\operatorname{Re}\Phi(\xi) = 0$. При $\zeta \in \mathbb{D}$ имеем

$$|Q^\sigma(\zeta)| = e^{\sigma \operatorname{Re}(\Phi(\zeta) - \Phi(\xi))} \leqslant e^{\sigma|\Phi(\zeta) - \Phi(\xi)|}.$$

Если $\sigma > 2/\varepsilon_0$, а $|\zeta - \xi| < 1/\sigma$, то $|\zeta - \xi| < \varepsilon_0/2$ и $|\Phi(\zeta) - \Phi(\xi)| \leqslant \leqslant b(\varepsilon_0)|\zeta - \xi| < b(\varepsilon_0)/\sigma$, так как ζ остается в $(CE \setminus V(\varepsilon_0))_{\varepsilon_0/2}$, где функция $|\Phi'|$ ограничена некоторым числом $b = b(\varepsilon_0)$ (ибо Φ аналитически продолжима через CE, см. свойство 3).

Продолжая оценку, получим: $|Q^\sigma(\zeta)| \leqslant e^{b(\varepsilon_0)}$, если $\zeta \in \mathbb{D}$, $\sigma > 2/\varepsilon_0$, и $\zeta \in (CE \setminus V(\varepsilon_0))_{1/\sigma}$.

Если же $\sigma \leqslant 2/\varepsilon_0$, то $|Q^\sigma(\zeta)| \leqslant e^\sigma \leqslant e^{2/\varepsilon_0}$ при любом $\zeta \in \mathbb{D}$. $\square$

Следующая лемма показывает, как можно использовать симметрию t и z под знаком интеграла в формуле остатка R_σ при дифференцировании (хотя сам остаток и не является оператором свертки).

Лемма 3 (Основная формула понижения). *Предположим, что $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$, $z \in \mathbb{D}$, $x \in \Omega(z)$ (по поводу обозначений см. свойство 1).*

Тогда

$$(R_\sigma f)'(z) = \Phi'(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_x} \frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)' \frac{dt}{(t-z)} + \right.$$

$$\left. + A_\delta(z)(R_\sigma f)(z) + \frac{\pi}{2\sin\delta} R_\sigma(\mathcal{S}(f))(z)\right]; \tag{5}$$

кроме того, на пространстве C_1^{A} верно следующее операторное равенство:

$$\mathcal{D}R_\sigma = \Phi'\left(R_\sigma \mathcal{D}\left(\frac{\cdot}{\Phi'}\right) + A_\delta R_\sigma + \frac{\pi}{2\sin\delta} R_\sigma \mathcal{S}\right), \tag{6}$$

где $\mathcal{D}$ и S – соответственно, операторы дифференцирования и сдвига (умножения на независимую комплексную переменную), $A_\delta(z) = (\pi/(2\sin\delta))(z - 2\cos\delta)$, $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть G – аналитическая функция в окрестности полосы $\Pi = \{x+iy : -1 \le x \le 1\}$. Тогда при $t \in \mathbb{D} \cup CE$, $z \in \mathbb{D}$ и $z \ne t$ имеем

$$\left(\frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_z = \frac{-G'(\Phi(t)-\Phi(z))\Phi'(z)}{t-z} + \frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2} =$$

$$= -\Phi'(z)\left(\frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_t \frac{1}{\Phi'(t)} + \frac{G(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2}\left(1-\frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\right).$$

Положим:

$$G := G_\sigma(z) := e^{\sigma z}.$$

Заменяя дугу CE на γ_x в формуле, определяющей $R_\sigma f$, имеем:

$$2\pi i\,(R_\sigma f)(z) = \int\limits_{\gamma_x}\left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right) f(t)dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
2\pi i\,(R_\sigma f)'(z) &= \int\limits_{\gamma_x}\left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_z f(t)dt = \\
&= -\int\limits_{\gamma_x}\frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\left(\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\right)'_t f(t)dt + \\
&+ \int\limits_{\gamma_x}\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{(t-z)^2}\left(1-\frac{\Phi'(z)}{\Phi'(t)}\right) f(t)dt = \\
&= \Phi'(z)\int\limits_{\gamma_x}\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'_t dt - \\
&- \Phi'(z)\left(\frac{e^{i\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}f(t)}{(t-z)\Phi'(t)}\right)\Bigg|_{e^{-i\delta}}^{e^{+i\delta}} + \\
&+ \int\limits_{\gamma_x}\frac{G_\sigma(\Phi(t)-\Phi(z))}{t-z}\left(\frac{\Phi'(t)-\Phi'(z)}{t-z}\right)\frac{f(t)}{\Phi'(t)}dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Второе слагаемое в правой части возникло при интегрировании по частям, и подразумевает пределы при $t \to e^{\pm i\delta}$ по дуге γ_x, а так как при этом $1/\Phi'(t) \to 0$, то оно исчезает вовсе. Оба интеграла справа сходятся, так как $|f'(t)| \leqslant C(\varrho(t))^{\alpha-1}$, а $1/\Phi'$ есть многочлен (см. свойство 2).

Множитель в скобках в последнем интеграле можно упростить:

$$\left(\frac{\Phi'(t)-\Phi'(z)}{t-z}\right)=\left(\frac{1}{(t-P)(t-\overline{P})}-\frac{1}{(z-P)(z-\overline{P})}\right)\cdot\frac{(t-P)(t-\overline{P})}{t-z}=$$

$$=\frac{(z-P)(z-\overline{P})-(t-P)(t-\overline{P})}{(t-z)(z-P)(z-\overline{P})}=\frac{(z^2-t^2)-(P+\overline{P})(z-t)}{(t-z)(z-P)(z-\overline{P})}=$$

$$=\frac{(P+\overline{P})-(z+t)}{(z-P)(z-\overline{P})}=\frac{\pi}{2\sin\delta}\Phi'(z)((z+t)-2\cos\delta)=$$

$$=\Phi'(z)(A_\delta(z)+\frac{\pi}{2\sin\delta}t).$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались свойством 2 и равенством $P+\overline{P}=2\cos\delta$.

Таким образом, мы получим

$$(R_\sigma(f))'(z)=\Phi'(z)\int\limits_{\gamma_x}\frac{Q(t)}{Q(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'\frac{dt}{(t-z)}+R_\sigma\left(f\frac{(\Phi'-\Phi(z))}{(\cdot-z)\Phi'}\right)=$$

$$=\Phi'(z)\Bigg[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_x}\frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\left(\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right)'\frac{dt}{(t-z)}+$$

$$+A_\delta(z)(R_\sigma f)(z)+\frac{\pi}{2\sin\delta}(R_\sigma\mathcal{S}f)(z)\Bigg].$$

Мы деформировали дугу интегрирования γ_x в последнем интеграле в (7) в дугу CE, воспользовавшись тем, что подынтегральная функция голоморфна и ограничена в области Ω_x (и даже непрерывна вплоть до ее границы, за исключением двух точек P и $\overline{P}$).

Если предположить дополнительно, что $f'\in A$, то описанная замена дуги интегрирования возможна и для первого слагаемого. Отсюда следует формула (6). □

Лемма 4. *При любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$\left(Q^\lambda\right)^{(n)}(\zeta) = Q^\lambda(\zeta) \sum_{j=0}^{n} \lambda^j a_{j,n}(\zeta),$$

где функции $a_{j,n}$ аналитичны в $(\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V_\varepsilon$.

Доказательство. Индукция по n.

1. При $n = 0$ утверждение очевидно для точек $\zeta \in \mathbb{D}$.

При $\zeta \in \mathbb{T}$ заметим, что из определения функции Q следует ее аналитическая продолжимость за любую дугу окружности $\mathbb{T}$ вне множества $V(\varepsilon)$.

2. Пусть лемма верна при некотором целом неотрицательном n. Имеем: $Q = e^\Phi$;

$$\left(Q^\lambda\right)^{(n+1)} = \left(\left(Q^\lambda\right)^{(n)}\right)' = \left(Q^\lambda \sum_{j=0}^{n} \lambda^j a_{j,n}\right)' =$$

$$= Q^\lambda \sum_{j=0}^{n} \lambda^j a'_{j,n} + \left(Q^\lambda\right)' \sum_{j=0}^{n} \lambda^j a_{j,n} = Q^\lambda \sum_{j=0}^{n} \left(\lambda^j a'_{j,n} + \lambda^{j+1} a_{j,n} \Phi'\right),$$

и утверждение леммы следует из аналитичности всех производных функции Φ вне кругов $V(\varepsilon)$. $\square$

Лемма 5. *Существует такая константа $C = C(n, \varepsilon, \delta) > 0$, не зависящая от $\sigma > 1$, что*

$$\forall \varepsilon > 0, \left|\left(Q^{-\sigma}\right)^{(n)}(\zeta)\right| \leqslant C \left|Q^{-\sigma}(\zeta)\right| \sigma^n,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \zeta \in (\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V_\varepsilon, \quad \sigma > 1.$$

Доказательство: следствие предыдущей леммы. $\square$

Лемма 6. *Пусть $h > 0$, функция $f \in H^1$ аналитична в $(CE)_h$, где $(CE)_\lambda$ при $\lambda > 0$ обозначает λ-окрестность дуги CE в $\mathbb{C}$; пусть $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Тогда

$$\left|\left(R_\sigma f\right)^{(n)}(\zeta)\right| \leqslant \|f\|_{\infty, h/2}\, C\, \sigma^{-n}\, e^{-c\sigma},$$

где $\zeta \in (\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V(\varepsilon)$*; константы* $c = c(\varepsilon, \delta, h)$ *и* $C = C(n, \varepsilon, \delta)$ *положительны и не зависят от* $\sigma > 1$ *и* f*;* $\|f\|_{\infty, h/2}$ *обозначает максимум функции* $|f|$ *на замыкании множества* $(CE)_{h/2}$.

Доказательство. Рассмотрим множество K, состоящее из круговой дуги

$$\{\zeta : |\zeta| = 1 + \frac{h}{2}, \, \frac{\zeta}{|\zeta|} \in CE\}$$

и двух отрезков

$$\left[P; P\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right], \, \left[\overline{P}; \overline{P}\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right]$$

(см. Рис. 2).

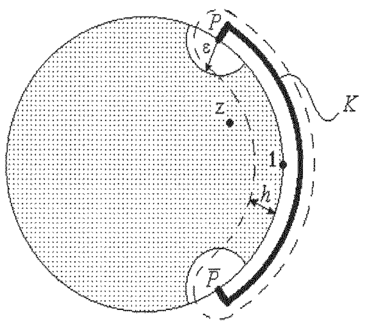

Рис. 2: к лемме 6.

Очевидно, $K \subset \operatorname{Clos} CE_{h/2}$. Благодаря аналитичности функции f в окрестности множества CE_h мы можем перенести путь интегрирования в выражении для остатка R_σ с дуги CE на K:

$$(R_\sigma f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{Q^\sigma(\zeta) f(\zeta)}{Q^\sigma(z)(\zeta - z)} d\zeta,$$

и таким образом, по лемме 5, получаем

$$\left| (R_\sigma f)^{(n)} \right| (z) =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_K \left[\sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\, l!} (Q^{-\sigma}(z))^{(k)} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) \right] Q^\sigma(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \frac{1}{2\pi} \left(\sigma^n C|Q^{-\sigma}(z)|\right) \frac{(n+1)!}{(\mathrm{dist}(\mathbb{D}\setminus V_\varepsilon,\, K))^{(n+1)}} \times$$

$$\times (2\pi(1+h/2)+h)\|f\|_{\infty,h/2} \left(\sup_{\zeta\in K}|Q(\zeta)|\right)^\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_0(n,\varepsilon,\delta)}{(\min\{\varepsilon, h/2\})^{n+1}}\|f\|_{\infty,h/2}\left(\sup_{\zeta\in K}|Q(\zeta)|\right)^\sigma .$$

Из определения функции Q и свойств 1 и 3 следует, что найдется такое число $q=q(h)$, что $|Q(\zeta)|\leqslant q(h)<1$ для всех ζ, лежащих на круговой дуге $|\zeta|=1+h/2$ множества K. В то же время, на отрезках радиальных лучей круга $\mathbb{D}$, лежащих в K, модуль Q также ограничен сверху числом, меньшим 1, по свойству 3. Таким образом, на всем K сохраняется оценка

$$|Q(\zeta)|^\sigma \leqslant (q(h))^\sigma = e^{-c\sigma}$$

(константа $c>0$ не зависит от σ и z), из которой и следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 7. *Пусть ε, $\sigma>0$, $f\in\Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha$, $\|f\|_\alpha\leqslant 1$, где $0<\alpha\leqslant 1$.*
Тогда

$$|(R_\sigma f)(z)|\leqslant C\,,\, z\in(\mathbb{D}\cup\mathbb{T})\setminus V_\varepsilon,$$

где $C>0$ не зависит от σ и f.

Доказательство. Последовательно применяя леммы 6 и 1, получим

$$|(R_\sigma f)(z)|\leqslant|(R_\sigma[f-f(\widetilde z)])(z)|+|f(\widetilde z)(R_\sigma 1)(z)|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{CE}\frac{|t-\widetilde z|^\alpha dm(t)}{|t-z|}+f(\widetilde z)C(0,\varepsilon,\delta)\,e^{-c\sigma}\leqslant(C_\alpha+\widetilde C),$$

где C_α и $\widetilde C$ не зависят от σ, f, z. $\square$

Из леммы 5 также вытекает следующее утверждение.

Лемма 8. *Предположим, что L^{**} – произвольная компактная дуга, $L^{**}\subset E\setminus V(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$; $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда $R_\sigma : f\mapsto R_\sigma f$ есть линейный непрерывный оператор $R_\sigma : H^1\to C^{\mathrm{A}}_k(L^{**})$, и существует константа $C=C(k,\delta,\varepsilon)>0$, не зависящая от σ, такая, что для нормы указанного оператора верна оценка*

$$\|R_\sigma\|_{H^1\to C^{\mathrm{A}}_k(L^{**})}\leq Ce^{-\sigma}\sigma^k.$$

Доказательство. Оператор R_σ имеет вид

$$R_\sigma f(z) = \frac{1}{2\pi i} Q^{-\sigma}(z) \cdot \int\limits_{CE} \frac{f(t)Q^\sigma(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Предположим, что $k \in \mathbb{N}$ и $\widetilde{z}$ – ближайшая к z точка на окружности $\mathbb{T}$.

Функция Q аналитически продолжима через дугу L^{**} изнутри круга $\mathbb{D}$, и следовательно, при $z \to \widetilde{z} \in L^{**}$ изнутри $\mathbb{D}$ производная порядка $k > 0$ остатка (CGK) имеет граничные значения:

$$(R_\sigma f)^{(k)}(\widetilde{z}) =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(Q^{-\sigma}\right)^{(j)}(\widetilde{z}) \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{k-j} \int\limits_{CE} \frac{f(t)Q^\sigma(t)dt}{(t-\widetilde{z})^{k-j+1}}, \quad \widetilde{z} \in L^{**}.$$

Здесь все интегралы равномерно ограничены по $\widetilde{z}$ и σ, так как $|t - \widetilde{z}| > \varepsilon$, в то время как $|Q| \equiv 1$ на CE. Учитывая равенство $|Q(\widetilde{z})| = e$ (см. начало п. 2), по лемме 5 имеем при произвольном $k > 0$:

$$\left|(R_\sigma f)^{(k)}(\widetilde{z})\right| \leqslant C_1 \cdot |Q(\widetilde{z})|^{-\sigma} \sigma^k \cdot \|f\|_{H^1} = C_1 e^{-\sigma} \sigma^k \|f\|_{H^1};$$

$$\left\|(R_\sigma f)^{(k)}\right\|_{C_k^A(L^{**})} = \sum_{i=1}^{k} \left\|(R_\sigma f)^{(i)}\right\|_{\infty, L^{**}} \leqslant C e^{-\sigma} \sigma^k \|f\|_{H^1}$$

для произвольной функции $f \in H^1$, где константы C, C_1, $C_2 > 0$ зависят только от k, δ, ε. $\square$

2.1. Основная теорема о гладкой сходимости.

Далее мы будем рассматривать формулу (CGK) только для функций $f \in \Lambda_\alpha^A$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и тем самым, отображения $(\mathrm{CGK})_\sigma$: $f \mapsto (\mathrm{CGK})_\sigma(f)$ и $R_\sigma : f \mapsto R_\sigma(f)$ (см. формулу (1)) будут иметь смысл линейных операторов, определенных на указанном пространстве функций.

Теорема 1. *Предположим, что L^*, L^{**} – произвольные компактные дуги, лежащие, соответственно, в CE и E, не содержащие точек $e^{i\delta}$ и $e^{-i\delta}$, и удаленные от них не меньше, чем на $\varepsilon > 0$. Пусть $\sigma > 2$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $L = L^* \cup L^{**}$.*

Тогда при любом β, $0 < \beta \leqslant \alpha$, отображение $R_\sigma : f \mapsto R_\sigma f$, определяемое формулой (CGK), *есть линейный непрерывный оператор*

$R_\sigma : \Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha \to \Lambda^{\mathrm{A}}_\beta(L)$, и существует константа $C = C(\alpha,\beta,\delta,\varepsilon) > 0$, не зависящая от σ, такая, что для нормы указанного оператора верна оценка

$$\|R_\sigma\|_{\Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha \to \Lambda^{\mathrm{A}}_\beta(L)} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Доказательство. Мы по отдельности докажем оценки

$$\|R_\sigma\|_{\Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha \to \Lambda^{\mathrm{A}}_\beta(L^{**})} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}} \quad \text{и} \quad \|R_\sigma\|_{\Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha \to \Lambda^{\mathrm{A}}_\beta(L^{*})} \le C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}, \tag{8}$$

из которых, очевидно, будет следовать нужный результат.

Предположим, что функция f лежит в $\Lambda^{\mathrm{A}}_\alpha$, $\|f\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha} \leqslant 1$. Тогда первое из утверждений (8) следует из леммы 8, если учесть, что найдутся абсолютные константы C_1, $C_2 > 0$, такие, что

$$\|f\|_{H^1} \leqslant C_1\|f\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha} \quad \text{и} \quad \|R_\sigma f\|_{\Lambda^{\mathrm{A}}_\beta(L^{**})} \leqslant C_2\|R_\sigma f\|_{C^{\mathrm{A}}_1(L^{**})}.$$

Докажем второе утверждение в (8).

Мы разобьем доказательство на два пункта. В п. **А** при фиксированном $\varepsilon' > 0$ мы установим оценку

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant C(\alpha,\delta,\varepsilon')\frac{|\ln\varrho(z)|}{(\varrho(z))^{1-\alpha}}, \tag{9}$$

равномерную по $\sigma > 2$, f, и $z \in \mathbb{D}\backslash V(\varepsilon')$, которую в п. **Б** применим вместе с локальной теоремой Харди–Литтлвуда для получения окончательного результата.

А. Зафиксируем $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и $\sigma > 2$, и выберем число x, $0 < x < 1$, так, чтобы оно (а значит, и дуга γ_x) лежало в области Ω_z (см. определение Ω_z в свойстве 1). Мы находимся в условиях леммы 3 и по формуле (5) имеем:

$$\begin{aligned}\left|(R_\sigma f)'(z)\right| &\leqslant C_1\left|\int\limits_{\gamma_x}\frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\cdot\left(\frac{f}{\Phi'}\right)'(t)\frac{dt}{t-z}\right| + C_2 \leqslant \\ &\leqslant C_1\left|\int\limits_{\gamma_x}\frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\cdot\left(\frac{f'}{\Phi'}\right)(t)\frac{dt}{t-z}\right| + C_3,\end{aligned} \tag{10}$$

где константы C_1, C_2, C_3 положительны и не зависят от σ, f и z. Оба неравенства (10) следуют из леммы 7 и того, что произ-

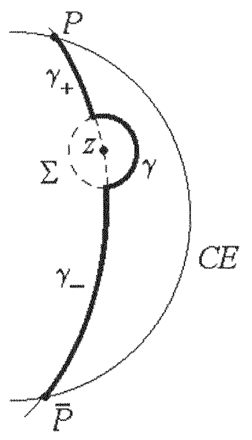

Рис. 3: к Теореме 1.

водная квадратного трехчлена $1/\Phi'$ ограничена на γ_x, а значение $\Phi'(z)$ ограничено равномерно по $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ (см. свойство 2).

Для оценки первого слагаемого построим вспомогательный путь интегрирования Γ (см. Рис. 3), состоящий из двух сегментов γ_+ и γ_- дуги γ_z, идущих от окружности $\Sigma := \{t : |t-z| = \varrho(z)/2\}$ к точкам P и $\overline{P}$ соответственно, а также из той части γ окружности Σ, которая лежит в области Ω_z.

Подынтегральная функция в (10) аналитична во всей области Ω_z и равномерно ограничена там вне Σ. Поэтому возможна замена пути интегрирования на Γ.

Итак, наша задача сводится к оценке интеграла

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{Q^{\sigma}(t)}{Q^{\sigma}(z)} \cdot \left(\frac{f'}{\Phi'}\right)(t)\frac{dt}{t-z}\right| \leqslant C_\delta \int\limits_{\Gamma} \left|\frac{Q^{\sigma}(t)}{Q^{\sigma}(z)} \cdot \frac{f'(t)}{t-z}\right| dt$$

(снова напомним, что $1/\Phi'$ – многочлен, и значит, ограничен в $\mathbb{D}$). Правая часть неравенства не превосходит величины

$$C_{\alpha,\delta} \cdot \max_{z \in \mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')} \left(\int\limits_{\gamma} + \int\limits_{\gamma_-} + \int\limits_{\gamma_+} \frac{(\varrho(t))^{\alpha-1}}{|t-z|}|dt|\right) =$$
$$= C_{\alpha,\delta} \cdot \max_{z \in \mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')} (X+Y+Z). \qquad (11)$$

Мы воспользовались теоремой Харди–Литтлвуда и тем, что кривая Γ целиком лежит в замыкании области Ω_z и, следовательно,

$$\left|\frac{Q^\sigma(t)}{Q^\sigma(z)}\right| \leqslant 1, \quad t \in \Gamma$$

(см. свойство 1).

Интегрирование в первом слагаемом в правой части неравенства (11) происходит вдоль дуги окружности радиуса $\varrho(z)/2$ с центром в точке z, и мы имеем

$$X < 2\pi\frac{\varrho(z)}{2}\left(\frac{\varrho(z)}{2}\right)^{\alpha-1}\frac{2}{\varrho(z)} \leqslant C(\alpha)\cdot\varrho(z)^{\alpha-1}(z). \qquad (12)$$

Оценки интегралов Y и Z мы проведем в плоскости τ (см. Рис. 1), для чего используем подстановки, соответственно, $t = M(\tau)$ и $t = \widetilde{M}(\tau) = M(1/\overline{\tau})$, где отображение M было определено перед формулировкой свойства 2.

Отображения

$$M : \tau \mapsto M(\tau) \quad \text{и} \quad \widetilde{M} : \tau \mapsto M(1/\overline{\tau})$$

переводят в дуги γ_- и γ_+ отрезки вида $I = [0;\tau_0]$, $\operatorname{Im}\tau_0 > 0$ (см. Рис. 1, 3 и 4).

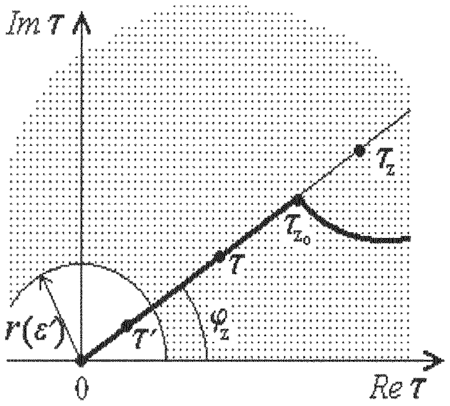

Рис. 4: к Теореме 1.

Когда z изменяется в $\mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$, прообраз $M^{-1}(z)$ остается в некотором полукольце

$$0 < r(\varepsilon') \leqslant |\tau| \leqslant R(\varepsilon'), \quad \operatorname{Im}\tau > 0 \tag{13}$$

(так как точкам P, $\overline{P}$, окруженным дисками $|z-P| < (\varepsilon'/2)$, $|z-\overline{P}| < (\varepsilon'/2)$, при отображении M отвечают точки ∞ и 0).

Дробно-линейное отображение M регулярно даже в окрестности полукруга $|\tau| \leqslant R(\varepsilon')$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ (полюс функции M находится в точке $-P$, лежащей в нижней полуплоскости). Поэтому, полагая $z' = M(\tau')$, $z'' = M(\tau'')$, имеем

$$C_1|z'-z''| \leqslant |\tau'-\tau''| \leqslant C_2|z'-z''|, \tag{14}$$

для всех z', $z'' \in \mathbb{D}\setminus V^+(\varepsilon')$, где $V^+(\varepsilon')$ есть ε'-окрестность точки P, а C_1, $C_2 > 0$ зависят только от ε' и δ.

Положим $\tau_z = M^{-1}(z) = |\tau_z|e^{i\varphi_z}$, $z \in \mathbb{D}\setminus V^+(\varepsilon')$.

Из (14) следует, что равномерно по $z \in \mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$ и τ_z

$$\operatorname{dist}(z,\mathbb{T}) = \varrho(z) \asymp |\operatorname{Im}\tau_z| = \operatorname{dist}(\tau_z,\mathbb{R}).$$

Заметим, что, если $\tau = |\tau|e^{i\varphi}$ находится в полукольце (13), то

$$r(\varepsilon')\sin\varphi \leqslant \operatorname{Im}\tau \leqslant R(\varepsilon')\sin\varphi. \tag{15}$$

Пусть I – отрезок, соединяющий точки 0 и $\tau_{z_0} = |\tau_{z_0}|e^{i\varphi_z}$, где z_0 – общий конец дуг γ_- и γ. Тогда

$$Y \leqslant C(\delta)\int\limits_I \frac{d|\tau|}{(\operatorname{Im}\tau)^{1-\alpha}|\tau_z-\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\left(\int\limits_0^{r'} \frac{d|\tau|}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}|\tau|^{1-\alpha}|\tau_z-\tau|} + \right.$$

$$\left. + (r')^{\alpha-1}\int\limits_{r'}^{|\tau_{z_0}|} \frac{d|\tau|}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}(|\tau_z|-|\tau|)}\right) =$$

$$= C(\delta)\left(I + (r')^{\alpha-1}\,II\right).$$

Здесь число $r' = r'(\varepsilon')$ таково, что M-образ отрезка $[0; r'e^{i\varphi_z}]$ совпадает с $\gamma_- \cap V(\varepsilon'/2)$ ($\tau' := r'e^{i\varphi_z}$ на Рис. 4), так что (по формуле (14)) $\operatorname{dist}(\tau_z, [0; r'e^{i\varphi_z}]) > c = c(\varepsilon') > 0$ при $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и

$$I \leqslant \frac{1}{c\,(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}} \int_0^{r'} \frac{d|\tau|}{|\tau|^{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(r'(\varepsilon'))^{\alpha}}{c\alpha} \frac{1}{(\operatorname{Im}\,\tau_z)^{1-\alpha}(r(\varepsilon'))^{1-\alpha}} \leqslant C''' \frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}};$$

$$II \leqslant \frac{1}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}} \int_0^{|\tau_{z_0}|} \frac{du}{|\tau_z| - u} = \frac{1}{(\sin\varphi_z)^{1-\alpha}} \log \frac{|\tau_z|}{|\tau_z| - |\tau_{z_0}|}. \qquad (16)$$

Но, учитывая то, что τ_z и τ_{z_0} лежат на одном луче, исходящем из начала координат, мы получаем $|\tau_z| - |\tau_{z_0}| = |\tau_z - \tau_{z_0}| \asymp |z - z_0| = \varrho(z)/2$ (см. оценку (14)), тогда как $|\tau_z| \leqslant R(\varepsilon')$. Из оценки (16) следует

$$II \leqslant C^{IV}(\alpha, \varepsilon') \frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}} \log \frac{C'_\varepsilon}{(\varrho(z))}.$$

На дуге γ_+ наш интеграл оценивается совершенно аналогично, и вместе с (12), в конечном итоге, мы получаем (9).

В заключение п. **А** заметим, что полученная оценка никак не связана с дугой L^* и числом ε из условия теоремы.

Б. Пусть θ обозначает радианную меру дуги PD на $\mathbb{T}$, где D – ближайшая к P точка дуги L^*, а $S^* := \{r\zeta \colon \zeta \in L^*, 0 \leqslant r < 1\}$ есть сектор, соответствующий этой дуге.

Кроме того, при любом $z \in \mathbb{D}$ через K_z мы будем обозначать окружность $\{\zeta : |\zeta - z| = \varrho(z)/2\}$.

Замечание 1. Легко видеть, что расстояние между точками P и D, $|PD| = \varepsilon = 2\sin(\theta/2)$, может превосходить расстояние от P до сектора S^* (равное $\sin\theta$, если $0 < \theta < \pi/2$, и равное 1 при бо́льших θ) не более, чем вдвое.

Таким образом, $S^* \subset \mathbb{D} \backslash V(\varepsilon/2)$ (напомним, что $V(\lambda)$ обозначает $\lambda-$окрестность множества $\{P, \overline{P}\}$, где $P = e^{i\delta}$).

Замечание 2. Если $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon^*)$ при некотором $\varepsilon^* > 0$, то для любой точки ζ, лежащей на окружности K_z, справедливо неравенство

$$|\zeta - P| \geqslant \Big||P-z| - |z-\zeta|\Big| = |P-z| - \frac{\varrho(z)}{2} \geqslant |P-z|\left(1-\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{\varepsilon^*}{2}$$

(очевидно, $|P-z| \geqslant \varrho(z)$). Это означает, что *окружность* K_z *целиком лежит в* $\mathbb{D}\setminus V(\varepsilon^*/2)$, *если* $z \in \mathbb{D}\setminus V(\varepsilon^*)$.

С этого момента и до конца доказательства положим в (9) $\varepsilon' := \varepsilon/4$. Из замечаний 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Замечание 3. Неравенство (9) справедливо для произвольного z, лежащего в секторе S^*, и для любого $\zeta \in K_z$, причем константа C в правой части неравенства (9) зависит лишь от α, δ и ε.

Для дальнейших оценок мы вычислим производную в левой части неравенства (9) непосредственно: для любой константы $c \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned}
(R_\sigma f)'(z) &= (R_\sigma(f-c))'(z) + c(R_\sigma 1)'(z) = \\
&= \left(Q^{-\sigma}(z)\cdot \int\limits_{CE} \frac{(f(t)-c)Q^\sigma(t)}{(t-z)^2}dt + \right. \\
&\left. + Q^{-\sigma}(z)\,\sigma\,\Phi'(z)\int\limits_{CE}\frac{(f(t)-c)Q^\sigma(t)}{t-z}dt\right) + c(R_\sigma 1)'(z) = \\
&= Q^{-\sigma}(z)\cdot\int\limits_{CE}\frac{(f(t)-c)\cdot Q^\sigma(t)}{(t-z)^2}dt + \sigma\Phi'(z)\,(R_\sigma f)\,(z) + \\
&+ (-\sigma\cdot\Phi'(z)\cdot c\cdot(R_\sigma 1)\,(z)) + c(R_\sigma 1)'(z).
\end{aligned} \tag{17}$$

Выбрав $c = f(\widetilde{z})$, $\widetilde{z} = z/|z|$, заключаем, что при $\alpha < 1$ первое слагаемое в (17) по модулю не превосходит величины

$$\int\limits_{CE}\frac{|f(t)-f(\widetilde{z})|dm(t)}{|t-z|^2} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}}\frac{|t-\widetilde{z}|^\alpha dm(t)}{|t-z|^2} \leqslant C_\alpha\cdot\varrho^{\alpha-1}(z),$$

а при $\alpha = 1$ – величины $C_\alpha\cdot|\ln\varrho(z)|$, $z \in \mathbb{D}$ (см. лемму 1), в то время как два последних слагаемых ограничены равномерно по σ, f и z по лемме 6, с учетом ограниченности $f(\widetilde{z})$ и $\Phi'(z)$ при $z \in \mathbb{D}\setminus V(\varepsilon')$.

Таким образом, для $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ имеем

$$(R_\sigma f)'(z) = \frac{F_{\sigma,f}(z)}{\varrho^{1-\alpha}(z)} + \sigma \Phi'(z) \cdot R_\sigma f(z), \tag{18}$$

где функция $F_{\sigma,f}$ (при $\alpha < 1$) и функция $F_{\sigma,f}/|\ln \varrho(z)|$ (при $\alpha = 1$) ограничены в $(\mathbb{D} \cup \mathbb{T}) \setminus V(\varepsilon')$ равномерно по σ и f константой $C_2 = C_2(\alpha, \delta, \varepsilon)$ (напомним, что $\|f\|_{\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}} \leqslant 1$, и $\varepsilon' = \varepsilon/4$).

Выразив последнее слагаемое в (18) через первое слагаемое в правой части и $(R_\sigma f)'(z)$, а затем применив (9), получим

$$\sigma\, |R_\sigma f(z)| \leqslant C_3 \frac{|\ln \varrho(z)|}{\varrho^{1-\alpha}(z)} \tag{19}$$

(C_1, C_2, C_3 не зависят от σ при $z \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$); в последнем неравенстве мы учли, что функция $|1/\Phi'(z)|$ ограничена в $\mathbb{D}$, см. свойство 2.

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось проверить, что

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant C_4 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta} (\varrho(z))^{1-\beta}} \tag{20}$$

и

$$|R_\sigma f(0)| \leqslant C_5 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha}}, \tag{21}$$

где $\widetilde{z} \in L^*$, $\sigma > 2$, $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$; C_4, C_5 зависят только от α, β, δ, ε. В самом деле, из (20), в силу пункта (а) локальной теоремы Харди–Литтлвуда (см. Введение), получим

$$\|R_\sigma f\|_{\Lambda_\beta^{\mathrm{A}}(L^*)} = \|R_\sigma f\|_{\mathrm{Lip}\,\beta(L^*)} \leqslant C_6 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Заметим, что неравенство (21) (и даже намного более сильное) нетрудно вывести, например, из леммы 6, но мы получим его попутно при доказательстве оценки (20).

Вывод последней проведем в два шага, причем нам потребуется промежуточная оценка

$$|R_\sigma f(z)| \leqslant C_7 \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha}} \quad (z \in S^*,\ \sigma > 2,\ 0 < \alpha \leqslant 1). \tag{22}$$

При $z = 0$ она превращается в (21).

Зафиксируем точку $z \in S^*$.

На первом шаге мы предположим, что $\varrho(z) \geqslant \frac{1}{\sigma}$, а на втором – что $\varrho(z) < \frac{1}{\sigma}$.

1) Рассмотрим произвольную точку $\zeta \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$, для которой $\varrho(\zeta) \geqslant 1/2\sigma$. Например, по замечанию 3 в качестве ζ мы можем выбрать произвольную точку окружности K_z (см. начало п. **Б** доказательства).

Из (9) при $\sigma > 2$, $0 < \alpha \leqslant 1$, заключаем, что

$$|(R_\sigma f)'(\zeta)| \leqslant C\frac{|\ln \varrho(\zeta)|}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}} \leqslant C\frac{\ln 2\sigma}{(\varrho(\zeta))^{1-\alpha}}, \tag{23}$$

а из (19) и из ограниченности многочлена $1/\Phi'$ в $\mathbb{D}$ и в силу неравенства $1/\varrho(z) \leqslant 2\sigma$ получаем оценку

$$|R_\sigma f(\zeta)| \leqslant C_3\frac{1}{\sigma}2^{1-\alpha}\sigma^{1-\alpha}\ln 2\sigma \leqslant C_7\frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha}, \tag{24}$$

которая совпадает с (22) (при ограничении $\varrho(\zeta) \geqslant 1/2\sigma$).

Продолжая оценку, получим:

$$|R_\sigma f(\zeta)| \leqslant C_8\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}\frac{1}{\sigma^\beta} \leqslant C_8\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}(2\varrho(\zeta))^\beta \leqslant C_9\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}(\varrho(\zeta))^\beta, \tag{25}$$

где $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\varrho(\zeta) \geqslant 1/2\sigma$, $\sigma > 2$, $\zeta \in \mathbb{D} \setminus V(\varepsilon')$. Здесь и дальше, до конца доказательства, считаем, что все константы C_i, $i = 1, 2, \ldots$, зависят только от α, β, δ, ε.

Запишем теперь $(R_\sigma f)'(z)$ как производную в точке z интеграла Коши функции $R_\sigma f$ по окружности K_z. Получим (в силу (24))

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant \frac{2}{\varrho(z)} \cdot \max_{\zeta\in K_z}|R_\sigma f(\zeta)|.$$

Так как все точки $\zeta \in K_z$ удовлетворяют неравенству $\varrho(\zeta) \geqslant 1/2\sigma$, то к каждой из них применима оценка (25), и мы получаем

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant \frac{2}{\varrho(z)} \cdot \max_{\zeta\in K_z} 2\varrho(\zeta))^\beta.$$

Но при $\zeta \in K_z$ имеем $\varrho(\zeta) \leqslant (3/2)\varrho(z)$, и мы получаем (20) – при условии $\varrho(z) \geqslant 1/\sigma$.

2) Пусть $\varrho(z) < 1/\sigma$. Обозначим через z_σ ближайшую к z точку окружности $\{|\zeta| = 1 - \sigma^{-1}\}$. Заменив в (19) z на z_σ, получим

$$|(R_\sigma f)(z_\sigma)| \leqslant \frac{C_3}{\sigma}\ln\sigma\cdot\sigma^{1-\alpha}$$

и

$$|(R_\sigma f)(z)| = |(R_\sigma f)(z_\sigma)| + |(R_\sigma f)(z) - (R_\sigma f)(z_\sigma)| \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha} + \int\limits_{|z_\sigma|}^{|z|} |(R_\sigma f)'(r\widetilde{z})|\, dr \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha} + C_2 \int\limits_0^{1/\sigma} \frac{\ln(1/r)}{r^{1-\alpha}}\, dr \leqslant C_4 \frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha}, \tag{26}$$

(предпоследнее неравенство следует из (9)).

При $\alpha < 1$ оценка (20) теперь легко следует из (18): в этом случае множитель $F_{\sigma,f}$ ограничен равномерно относительно σ и $z \in S^*$, и, в силу (26) и условия $\sigma < 1/\varrho(z)$,

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant C_{10} \left(\frac{1}{(\varrho(z))^{1-\alpha}(z)} + \sigma \frac{\ln\sigma}{\sigma^\alpha} \right) \leqslant C_{11} \frac{\ln\sigma}{(\varrho(z))^{1-\alpha}(z)} =$$
$$= C_{11} \frac{\ln\sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}(z)} (\varrho(z))^{\alpha-\beta} < C_{11} \frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}(z)} \frac{1}{(\varrho(z))^{1-\beta}(z)},$$

где $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\sigma > 2$, $z \in S^*$.

В случае $\alpha = 1$ возможная неограниченность величин $F_{\sigma,f}$ заставляет нас вернуться к формуле (17) и заново оценить $(R_\sigma f)'(z)$, положив $c = f(z)$:

$$\left|(R_\sigma f)'(z)\right| \leqslant \left| \int\limits_{CE} \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} \right| + \sigma\, |\Phi'(z)|\, |(R_\sigma f)(z)| + p(z), \tag{27}$$

где

$$\psi_z(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z},$$

а величина $p(z)$ ограничена равномерно по $z \in S^*$ и $\sigma > 2$. Из (26) следует, что при $z \in S^*$ второе слагаемое в правой части (27) не больше $C_4 \ln\sigma$. Проверим, что и первое слагаемое мажорируется величиной вида $const \cdot \ln\sigma$. При фиксированном $z \in S^*$ функция ψ_z аналитична во всем круге $\mathbb{D}$ и непрерывна вплоть до $\mathbb{T}$ (мы считаем, что $\psi_z(z) = f'(z)$). Поэтому

$$\int\limits_{CE} \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} =$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{\gamma}\right) \psi_z(t) Q^\sigma(t) \frac{dt}{t-z} + 2\pi\psi_z(z) Q^\sigma(z) = I + II + III,$$

где

$$\Gamma = CE \cap \{\zeta : |\zeta - \widetilde{z}| > \frac{2}{\sigma}\}, \quad \gamma = \mathbb{D} \cap \{\zeta : |\zeta - \widetilde{z}| = \frac{2}{\sigma}\}.$$

Слагаемое III по модулю не превосходит константы, зависящей лишь от ε, по свойству 5 (где мы выберем $\varepsilon_0 := \varepsilon' = \varepsilon/4$, и условия свойства 5 будут выполнены по замечанию 1), так как $|z - \widetilde{z}| = \varrho(z) < 1/\sigma$, а $|f'(z)| \leqslant 1$. Далее, $|\psi_z(t)| \leqslant 1$ $(t \in \mathbb{D})$, так как $\|f\|_{\mathrm{Lip}\,1} \leqslant 1$, и $|Q^\sigma| \equiv 1$ на CE, так что

$$|I| \leqslant \int\limits_{\Gamma} \frac{|dt|}{|t-z|} \leqslant 2 \int\limits_{\Gamma} \frac{|dt|}{|t-\widetilde{z}|} \leqslant B \ln \sigma,$$

где B – абсолютная постоянная (заметим, что $|t - \widetilde{z}| \geqslant 2/\sigma$ при $t \in \Gamma$, и

$$|t-z| \geqslant |t-\widetilde{z}| - |z-\widetilde{z}| = |t-\widetilde{z}| \left(1 - \frac{|z-\widetilde{z}|}{|t-\widetilde{z}|}\right) \geqslant |t-\widetilde{z}| \left(1 - \frac{1/\sigma}{2/\sigma}\right)).$$

Наконец, при $t \in \gamma$ имеем:

$$|z-t| \geqslant |\widetilde{z}-t| - |z-\widetilde{z}| \geqslant \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma},$$

и $|II| \leqslant c(\varepsilon)\pi$, где $c(\varepsilon)$ – константа из свойства 5 (мы считаем $\sigma > \sigma(\varepsilon)$, а $z \in S^*$).

Собирая эти оценки и возвращаясь к (27), заключаем, что при $\alpha = 1$, $z \in S^*$ и $\varrho(z) < 1/\sigma$ справедливо неравенство

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant C_{12} \ln \sigma.$$

При любом $\beta \in (0, 1)$

$$|(R_\sigma f)'(z)| \leqslant C_{12} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}} (\varrho(z))^{1-\beta} \leqslant C_{12} \frac{\ln \sigma}{(\varrho(z))^{1-\beta}} \frac{1}{\sigma^{1-\beta}},$$

и мы доказали оценку (20) при $\alpha = 1$ (и любом положении точки z в S^*).

Теорема 1 доказана. $\square$

3. О точности оценки в теореме 1

Будем считать, что дуга L^* имеет вид

$$L^* = \left[e^{-i\delta^*}, e^{i\delta^*}\right] \subset \mathbb{T}, \quad 0 < \delta^* < \delta,$$

и обозначим норму в $\mathrm{Lip}_\alpha(L^*)$ через $\|\cdot\|_\alpha^*$.

Оказывается, что теорема 1 точна в том смысле, что существует (неограниченно возрастающая) последовательность σ_n такая, что нормы операторов $(\mathrm{CGK})_{\sigma_n}$,

$$(\mathrm{CGK})_{\sigma_n} : \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} \to \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

растут при $n \to \infty$ не медленнее, чем $C(\delta, \delta^*) \ln \sigma_n$, то есть верна следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого α, $0 < \alpha \leqslant 1$, существует последовательность σ_n такая, что равномерно по n выполняется оценка*

$$\|R_{\sigma_n}\|_{\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}} \to \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*)} \geqslant C_{\alpha,\delta,\delta^*} \cdot \ln \sigma_n,$$

где $n = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. 1) Пусть $0 < \alpha < 1$. В этом случае можно считать, что $\sigma_n = n$.

Подставив $z = 1 - \frac{1}{n}$ в равенство (18), при любой функции $f \in \Lambda_\alpha^A$ получим

$$(R_n f)'\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(n^{1-\alpha}\right) + n\Phi'\left(1 - \frac{1}{n}\right) R_n f\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n \to +\infty.$$

Значит, в свете локальной теоремы Харди–Литтлвуда и того, что $\Phi'\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \Phi'(1) \neq 0$, утверждение теоремы будет доказано (при $\sigma_n = n$), если мы найдем такие функции $G_n \in \Lambda_\alpha^A$, $\|G_n\|_\alpha \leqslant C$, где C не зависит от n, что выполнено

$$\left|R_n G_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \geqslant C_{\alpha,\delta} \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Последовательность функций g_n, $n = 2, 3, \ldots$ определим так (здесь $t = e^{i\theta}$):

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha} Q^n(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \delta^*, \\ \dfrac{1}{n^\alpha} Q^{-n}(t) & \text{при} \quad \delta^* \leqslant \theta \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{n^\alpha} Q(\delta^*) & \text{при} \quad t \in \mathbb{T} \setminus L^*. \end{cases}$$

Иными словами, на дуге L^* справедливо равенство

$$g_n(t) = \frac{1}{n^\alpha} e^{in|\Phi(t)|},$$

а вне L^* функции g_n продолжены константой.

Благодаря нечетности $\Phi(e^{i\theta})$ по θ функции g_n непрерывны на $\mathbb{T}$, а вследствие ограниченности производной Φ на L^* функции g_n принадлежат классу Lip_α на $\mathbb{T}$.

Для проверки неравенства

$$\|g_n\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} \leqslant C_{\alpha,\delta^*}, \tag{28}$$

где C_{α,δ^*} не зависит от n, достаточно рассмотреть две возможности.

Если x, y лежат на L^* по одну сторону от 1, то

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left| e^{in\Phi(x)} - e^{in\Phi(y)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^\alpha} \cdot \|e^{i(\cdot)}\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R})} \cdot |n\Phi(x) - n\Phi(y)|^\alpha \leqslant C_{\alpha,\delta^*} \cdot |x-y|^\alpha.$$

Если x, $y \notin L^*$, то $g_n(x) - g_n(y) = 0$, откуда следует (28).

При любом $n \in \mathbb{N}$, $z \in [0,1)$, имеем

$$2\pi i Q^n(z) R_n g_n(z) = \int\limits_{CE} \frac{g_n(t)Q^n(t)}{t-z} dt =$$

$$= \int\limits_{CE \setminus L^*} + \int\limits_{L^*} \frac{g_n(t)Q^n(t)}{t-z} dt = I + II.$$

Интеграл I легко оценить сверху:

$$|I| \leqslant \frac{\widetilde{C}_{\delta^*}}{n^\alpha},$$

так как $|g_n(t)| \leqslant 1/n^\alpha$, $|t-z| > \widetilde{C}_{\delta^*} > 0$, $t \in \mathbb{T}$. Здесь $\widetilde{C}_{\delta^*}$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и от $z \in [0,1)$.

Легко видеть также, что

$$\left| \left(Q\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^n \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c_\delta,$$

где $c_\delta \in \mathbb{R}$. Действительно, $|Q| = e^{\mathrm{Re}\,\Phi}$, и по свойству 4 имеем (так как $\Phi(1) = 0$):

$$n\,\mathrm{Re}\,\Phi\left(1-\frac{1}{n}\right) = n\Phi\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{\Phi(1)-\Phi(1-1/n)}{1-(1-1/n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\Phi'(1).$$

Далее,

$$II(z) = \int\limits_{e^{-i\delta^*}}^{1} \frac{Q^n(t)dt}{n^\alpha Q^n(t)(t-z)} + \int\limits_{1}^{e^{i\delta^*}} \frac{Q^{2n}(t)dt}{n^\alpha(t-z)} =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left[\int\limits_{e^{-i\delta^*}}^{1} \frac{dt}{t-z} + \int\limits_{1}^{e^{i\delta^*}} \frac{Q^{2n}(t)dt}{t-z}\right] = \frac{1}{n^\alpha}\left[IIA(z) + IIB(z)\right].$$

Положим $z = 1 - \frac{1}{n}$.

Для оценки интеграла IIB мы можем деформировать дугу интегрирования во внешность круга $\mathbb{D}$ и интегрировать по отрезку $[1,2]$, затем по дуге окружности $\{|z| = 2\}$ и отрезку $[e^{i\delta^*}, 2e^{i\delta^*}]$.

При этом интеграл вдоль двух последних частей будет ограничен равномерно по n, так как, очевидно, на них выполняются неравенства $|t-z| > C(\delta^*) > 0$ и $|Q(z)| \le 1$ (последнее верно всюду во внешности круга $\mathbb{D}$).

Для первого отрезка имеем:

$$\left|\int\limits_{1}^{2} \frac{Q^{2n}(t)dt}{t-z}\right| \le \int\limits_{1}^{2} \frac{e^{2n\ \mathrm{Re}\ \Phi(t)}}{t-1+1/n}dt \leqslant \int\limits_{1}^{2} \frac{e^{C_\delta(1-t)2n}}{t-1+1/n}dt = \int\limits_{0}^{n} \frac{e^{-2C_\delta s}}{s+1}ds,$$

с заменой переменной $s = n(t-1)$. Первые два неравенства вытекают из свойства 4.

Таким образом, интеграл $IIB(z)$ ограничен равномерно по n, если принять $z = 1 - \frac{1}{n}$.

Но при том же z верно равенство

$$|IIA(z)| = \left|\ln\left|\frac{1-z}{e^{-i\delta^*}-z}\right| + i\arg\left(\frac{1-z}{e^{-i\delta^*}-z}\right)\right| \geqslant \widetilde{C}_{\delta^*}\cdot\ln n.$$

В итоге, весь интеграл II в точке $z = 1 - \frac{1}{n}$ стремится к нулю не быстрее, чем $\ln n/n^\alpha$, и мы получили

$$\left|R_n g_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \geqslant \tilde{\tilde{C}}_{\delta^*}\cdot\frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Наша теорема ($0 < \alpha < 1$) была бы доказана, если бы при любом $n \in \mathbb{N}$ функции g_n лежали бы в диск-алгебре, что, конечно, не так.

Воспользуемся известным разложением Сохоцкого–Привалова (см., например, [10]) для функции из $\operatorname{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$:

$$g_n = F_n^+ - \overline{F_n^-},$$

где функции F_n^+ и F_n^- принадлежат $\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$, причем $F_n^-(0) = 0$, а нормы $\|F_n^+\|_\alpha, \|F_n^-\|_\alpha$ не превосходят норм $\|g_n\|_\alpha$, умноженных на константу, зависящую только от α, если $0 < \alpha < 1$. Для $z \in [0,1)$ получаем

$$R_n F_n^+(z) = R_n g_n(z) + R_n \overline{F_n^-}(z).$$

Мы покажем, что последнее слагаемое очень быстро стремится к нулю при $n \to +\infty$, равномерно по $z \in [0,1)$, откуда будет следовать результат теоремы 2 при $0 < \alpha < 1$.

Действительно,

$$R_n \overline{F_n^-}(z) = \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \int\limits_{CE} \frac{\overline{F_n^-}(t) Q^n(t)}{t-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \int\limits_{CE} \frac{\overline{F_n^-}(t)\overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) \left[\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{F_n^-}(t)\overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt - \int\limits_{E} \frac{\overline{F_n^-}(t)\overline{Q^{-n}(t)}}{t-z} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} Q^{-n}(z) [I_0 + II_0].$$

По формуле Коши

$$I_0 = \overline{F_n^-(0) Q^{-n}(0)} = 0,$$

в то же время,

$$|II_0| \leqslant \frac{C_\delta \max\{|F_n^-(t)| : t \in E\}}{e^n} \leqslant C_\delta \cdot e^{-n} \cdot \|F_n^-\|_\alpha \leqslant C_\delta \cdot e^{-n}.$$

Так как $Q^{-n}(z) \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$, то

$$|R_n \overline{F_n^-}(z)| \leqslant \widetilde{C}_\delta \cdot e^{-n},$$

$\widetilde{C}_\delta$ не зависит от n.

2) Предположим, что $\alpha = 1$.

Пусть $f \in C_1^{\mathrm{A}}$; формула (6) из леммы 3 при любом $z \in \mathbb{D}$ дает:

$$(R_\sigma f)'(z) = \Phi'(z) \cdot \left(R_\sigma \left[\mathcal{D}\left(\frac{f}{\Phi'}\right)\right](z) + \right.$$
$$\left. + A_\delta(z) \cdot (R_\sigma f)(z) + \frac{\pi}{2\sin\delta} \cdot R_\sigma(\mathcal{S}f)(z)\right), \qquad (29)$$

где $(\mathcal{S}f)(\zeta) = \zeta f$, $\zeta \in \mathbb{D}$, а функции Φ' и A_δ регулярны в окрестности дуги L^*. В этом случае производная функции f непрерывно продолжима изнутри круга на дугу CE, и функции

$$(R_\sigma f)'(z) = f'(z) - \frac{1}{2\pi}(Q^{-\sigma})'(z) \int\limits_E \frac{f(t)Q^\sigma(t)}{t-z}dt -$$
$$- \frac{1}{2\pi} Q^{-\sigma}(z) \int\limits_E \frac{f(t)Q^\sigma(t)}{(t-z)^2}dt$$

и

$$(R_\sigma f')(z) = f'(z) - \frac{1}{2\pi} Q^{-\sigma}(z) \int\limits_E \frac{f'(t)Q^\sigma(t)}{t-z}dt$$

(см. формулу (CGK)) также непрерывно продолжимы на CE. В частности, это означает, что формула (29) имеет смысл при $z = 1$, если под $(R_\sigma f')(1)$ мы понимаем граничное значение $\lim (R_\sigma f')(r)$, $r \uparrow 1$.

Мы найдем последовательность функций G_n и последовательность $\sigma_n \uparrow +\infty$, при любом $n = 2, 3, \ldots$ удовлетворяющих условиям:

- $G_n \in C_1^{\mathrm{A}}$;
- $\|G_n\|_{\Lambda_1^{\mathrm{A}}} \leqslant C_\delta$, где C_δ не зависит от n;
- радиальные граничные значения $|(R_{\sigma_n} G_n)'(1)|$ превосходят величину $\widetilde{C}_\delta \cdot \ln \sigma_n$, где $\widetilde{C}_\delta$ также не зависит от n.

Легко видеть, что эти свойства вместе с теоремой Харди–Литтлвуда (локальный вариант, п. (б)) обеспечивают оценку снизу

$$\|R_{\sigma_n}\|_{\Lambda_1^{\mathrm{A}}(L^*)} \geqslant \sup\{|(R_{\sigma_n} G_n)'(z)| : 0 < z < 1\} \geqslant \widetilde{C}_\delta \ln \sigma_n,$$

из которой следует результат теоремы 2.

Для определения функций G_n нам понадобятся результаты статьи [6], где показано, что для некоторой последовательности функций $g_n \in A$, $\|g_n\|_A \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, и неограниченно возрастающей последовательности σ_n справедлива оценка снизу

$$|(R_{\sigma_n} g_n)(1)| \geqslant d \log \sigma_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

где $d = d(\delta) > 0$ не зависит от n. Эти функции (так называемые функции Ландау) можно считать конечными произведениями Бляшке.

Мы положим $G_n := M \cdot h_n$, где функции

$$h_n(z) := \int\limits_0^z g_n(z) dz, \quad z \in \mathbb{D},$$

суть первообразные функций Ландау;

$$M := |P_2(1)|, \quad P_2 := 1/\Phi',$$

причем, P_2 есть квадратный трехчлен с корнями $e^{\pm i\delta}$ по свойству 2.

Заметим, что $G_n(0) = 0$, и значит,

$$\|G_n\|_{\mathrm{Lip}\,1} = \|G_n'\|_A \leqslant M. \tag{31}$$

Таким образом, из определения очевидны все нужные нам свойства функций G_n, кроме последнего. Для его проверки рассмотрим первое слагаемое в правой части (29):

$$\Phi'(1) \left(R_{\sigma_n} \left[\frac{G_n}{\Phi'} \right]' \right) (1) =$$

$$= \Phi'(1) \Big(\left(R_{\sigma_n} [M G_n]' \right) (1) + \left(R_{\sigma_n} [G_n (P_2 - M)]' \right) (1) \Big) =$$

$$= \Phi'(1) \Big((R_{\sigma_n} g_n)(1) + (R_{\sigma_n} G_n'(P_2 - M))(1) + (R_{\sigma_n} G_n (P_2 - M)')(1) \Big) =$$

$$= \Phi'(1)(I + II + III). \tag{32}$$

Из (30) получаем $|I| \geqslant d \ln \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Слагаемое II в (32) есть предел интеграла

$$\int\limits_{CE} \frac{G_n'(t) Q_{\sigma_n}(t)(P_2(t) - P_2(1)) dt}{t - z}$$

при $z \uparrow 1$, $0 < z < 1$. Этот интеграл ограничен равномерно по n и $z \in (0;1)$, так как значения $G_n'(t)$, $Q^{\sigma_n}(t)$ и

$$\frac{P_2(t) - P_2(1)}{t - z} \leqslant 2\frac{P_2(t) - P_2(1)}{t - 1} \leqslant 2\|P_2\|_{\mathrm{Lip}\,_1(CE)}$$

ограничены равномерно по $t \in CE$, $z \in (0;1)$ и $n = 2, 3, \ldots$.

Ограниченность величины III следует из теоремы 1, так как функции $G_n(P_2 - P_2(1))$ ограничены в пространстве Λ_1^{A} равномерно по n, что вытекает из (31). Таким образом для первого слагаемого в правой части формулы (29) при $f = G_n$ имеем

$$\left|\Phi'(1)\left(R_{\sigma_n}\left[\frac{G_n}{\Phi'}\right]'\right)(1)\right| \geqslant \widetilde{d}\cdot\ln\sigma_n,$$

где $\widetilde{d}$ не зависит от σ.

Два последних слагаемых в (29) ограничены по лемме 7, и так как $\Phi'(1) \neq 0$ (см. свойство 2), мы имеем

$$\|R_{\sigma_n}G_n\|_1^* \geqslant |(R_{\sigma_n}G_n)'(1)| \geqslant \widetilde{d}\ln\sigma_n,$$

где $\widetilde{d}$ не зависит от n. $\square$

Из принципа сгущения особенностей Банаха–Штейнгауза непосредственно вытекает следующий факт.

Следствие. *При любом α, $0 < \alpha \leqslant 1$, существуют такие функция $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$ и последовательность $\sigma_n \uparrow \infty$, что последовательность норм $\|R_{\sigma_n}f\|_{\Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}(L^*)}$ стремится к бесконечности.*

Это доказывает точность теоремы 1: она устанавливает сходимость функций $\mathrm{CGK}_\sigma(f)$ в $\Lambda_\beta^{\mathrm{A}}$ при $\beta < \alpha$ (если $f \in \Lambda_\alpha^{\mathrm{A}}$), и β здесь нельзя заменить на α.

4. Сходимость формулы (CGK) в пространствах функций высокой гладкости

Введем некоторые новые обозначения.

Пусть L – объединение конечного числа компактных дуг окружности $\mathbb{T}$.

Рассмотрим пространство $C_{k,\alpha}^{\mathrm{A}}(L)$, состоящее из функций f, у которых все производные до порядка k включительно непрерывны в единичном круге вплоть до L, причем $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\,_\alpha(L)$;

положим $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} := C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(\mathbb{T})$. В качестве нормы f в $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(L)$ возьмем величину

$$\|f\|_{L,\infty} + \|f'\|_{L,\infty} + \ldots + \|f^{(k-1)}\|_{L,\infty} + \|f^{(k)}\|_{\mathrm{Lip}\,\alpha(L)}.$$

Замечание. Из этого определения сразу следует, что нормы функций f в $C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}(L)$ и f' в $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(L)$ совпадают.

В частности, операторы вложения I и дифференцирования $\mathcal{D}$

$$I, \mathcal{D} : C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}(L) \to C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(L)$$

непрерывны и их норма равна 1.

Теорема 3 (Сходимость формулы (CGK) в пространствах $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}$)**.** *Предположим, что L^*, L^{**} – произвольные компактные дуги, лежащие, соответственно, в CE и E, не содержащие точек $e^{i\delta}$ и $e^{-i\delta}$, и удаленные от них не меньше, чем на $\varepsilon > 0$. Пусть $\sigma > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $k = 0, 1, 2\ldots$, $L = L^* \cup L^{**}$.*

Тогда при любом β, $0 < \beta \leqslant \alpha$, отображение $R_\sigma : f \mapsto R_\sigma f$, определяемое формулой (CGK) *(см. формулу* (1)*), есть линейный непрерывный оператор $R_\sigma : C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L)$, и существует константа $C = C(k, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon) > 0$, не зависящая от σ, такая, что для нормы указанного оператора верна оценка*

$$\|R_\sigma\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L)} \leq C \frac{\ln \sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}}.$$

Доказательство.

А. Непрерывность R_σ как оператора со значениями в пространстве гладких функций на дуге L^{**} была проверена в лемме 8 при гораздо более свободных допущениях и с оценкой сходимости более сильной, чем требуется в теореме.

Б. Для оценки остатка формулы (CGK) в пространстве $C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)$ применим индукцию по k.

(а) База индукции совпадает с теоремой 1, $k = 0$.

(б) Индукционный переход.

Предположим, что утверждение доказано для k, и $f \in C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}$. Пусть $\|f\|_*$ обозначает норму функции f в этом пространстве.

Поскольку $f' \in A$, мы можем применить операторное равенство (6) из леммы 3, согласно которому

$$(R_\sigma f)' = \Phi' \cdot \left(R_\sigma \left[\mathcal{D} \left(\frac{f}{\Phi'} \right) \right] + A_\delta \cdot R_\sigma f + \frac{\pi}{2 \sin \delta} \cdot R_\sigma(\mathcal{S} f) \right).$$

Оператор $\mathcal{D} : C^{\mathrm{A}}_{k+1,\alpha}(L^*) \to C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}(L^*)$ непрерывен по замечанию, и

$$\left\| \mathcal{D}\left(\frac{f}{\Phi'}\right) \right\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}} \leqslant C(\Phi)\,\|f\|_*$$

(напомним, что $1/\Phi'$ есть квадратный трехчлен по свойству 2). Остальные операторы, участвующие в (6), действуют непрерывно из $C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha}$ в $C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)$. Действительно, оператор R_σ непрерывен по индукционному предположению, причем его норма не превосходит

$$\|R_\sigma\|^* := \|R_\sigma\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\alpha} \to C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)} \leq C\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}},$$

а оставшиеся операторы суть умножения на бесконечно гладкие в окрестности L^* функции, не зависящие от σ (Φ' – рациональная функция с полюсами вне L^*).

Таким образом, с учетом непрерывности тождественного оператора I (см. замечание) имеем

$$\|(R_\sigma f)\|_{C^{\mathrm{A}}_{k+1,\beta}(L^*)} = \|(R_\sigma f)'\|_{C^{\mathrm{A}}_{k,\beta}(L^*)} \leqslant \widetilde{C}(\Phi)(\|R_\sigma\|^* C(\Phi)\|f\|_* +$$

$$+ C_3\|R_\sigma\|^*\|f\|_* + C_4\|R_\sigma\|^* C_5\|f\|_*) \leqslant C_6\frac{\ln\sigma}{\sigma^{\alpha-\beta}},$$

где все C_i, $i = 1\dots 6$, не зависят от σ и f. $\square$

Следствие. *Если $f \in C^\infty(\mathbb{T}) \cap A$, то при $\sigma \to \infty$ все производные функции $R_\sigma f$ стремятся к нулю равномерно на любом замкнутом подмножестве множества $\mathbb{T} \setminus e^{\pm i\delta}$.*

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Хавину за постановку задачи и руководство работой.

Литература

1. Г. М. Голузин,В. И. Крылов, *Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций.* — Мат. сб. **40**, No. 2 (1933), 144–149.
2. Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе.* Наука, Новосибирск (1990).
3. R. J. Partington, *Interpolation, Identification, and Sampling.* Clarendon Press, Oxford (1997).
4. И. В. Виденский, Е. М. Гавурина, В. П. Хавин, *Аналоги интерполяционной формулы Карлемана–Голузина–Крылова.* — Теория операторов и теория функций, Вып. 1 (1983), 21–31.

5. В. А. Барт, В. П. Хавин, *Теоремы Сеге–Колмгорова–Крейна о весовой тригонометрической аппроксимаци.* — Укр. мат. журн. **46**, 1 (1994), 100–127.
6. В. А. Барт, *Оценки норм операторов Карлемана–Голузина–Крылова в диск-алгебре и пространстве Харди H^1.* — ПМА, Вып. 21 (2000), 45–67.
7. И. П. Натансон, *О приближении к многократно дифференцируемым периодическим функциям при помощи сингулярных интегралов.* — ДАН СССР **82**, No. 2 (1952), 337–339.
8. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Наука, М. (1977).
9. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* Наука, М. (1974).
10. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* Гостехтеоретиздат, М.-Л. (1950).
11. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p.* Мир, М. (1984).
12. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука, М. (1966).
13. P. Duren, *Theory of H^p Spaces.* New York, Academic Press (1970).

Bart V. A. The Carleman–Goluzin–Krylov formula and analytic functions smooth up to the boundary.

The classical Carleman–Goluzin–Krylov formula recovers an H^1-function from its boundary values on an arc. We study this formula when it is applied to Lipschitz spaces of order $\alpha \leqslant 1$ and to higher order smoothness spaces. The rate of convergence is estimated and some (counter-) examples are given.

НИИ Кардиологии
им. В. А. Алмазова
г. Санкт-Петербург
E-mail: bart@TB7656.spb.edu

Поступило 10 июля, 2003 г.