Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 303, 2003 г.

А. Д. Баранов

ОБ ОЦЕНКАХ L^p–НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Оценки нормы производной через норму функции в различных функциональных пространствах – одна из классических тем теории функций. Оценки такого рода часто называют неравенствами (типа) Бернштейна. Классическим результатом в этом направлении, послужившим основой для многочисленных обобщений, является неравенство С. Н. Бернштейна для пространства Пэли-Винера PW_a^p – пространства целых функций экспоненциального типа не выше a, сужение которых на вещественную прямую $\mathbb{R}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ (см. [1]): если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то

$$\|F'\|_p \leqslant a\|F\|_p, \qquad F \in PW_a^p.$$

Следующее красивое и глубокое обобщение неравенства Бернштейна для случая $p = \infty$ было получено Б. Я. Левиным [2]. Пусть целая функция E порядка 1 удовлетворяет неравенству

$$|E(z)| > |E(\overline{z})|, \qquad z \in \mathbb{C}^+, \tag{1}$$

где $\mathbb{C}^+$ – верхняя полуплоскость. Если F – целая функция экспоненциального типа такая, что

$$\max[|F(z)|, |F(\overline{z})|] \leqslant |E(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}^+, \tag{2}$$

то

$$\max[|F'(z)|, |F'(\overline{z})|] \leqslant |E'(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}^+. \tag{3}$$

В настоящей работе изучаются неравенства, подобные неравенству Левина, для пространств целых функций с весовыми L^p-нормами. При этом мы продолжаем исследование, начатое в

Работа частично поддержана грантами РФФИ No. 03-01-00377, Мин. Образования No. E02-1.0-66 и “Ведущие научные школы”, No. НШ-2266.2003.1.

работах [3, 4], где был рассмотрен случай гильбертовых пространств целых функций (пространств де Бранжа). Теперь наша цель состоит в том, чтобы распространить результаты работы [4], обобщающие неравенство Левина, на все показатели $p \in (1, \infty)$.

Пусть целая функция E удовлетворяет неравенству (1) и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathcal{H}^p(E)$ пространство целых функций F таких, что F/E и F^*/E принадлежат классу Харди $H^p(\mathbb{C}^+)$ (здесь $F^*(z) = \overline{F(\overline{z})}$). Положим $\|F\|_{E,p} = \|F/E\|_{L^p(\mathbb{R})}$; наделенное такой нормой, $\mathcal{H}^p(E)$ становится банаховым пространством. Отметим, что пространства $\mathcal{H}^p(E)$ включают в себя как частный случай пространства Пэли–Винера PW_a^p (при $E(z) = \exp(-iaz)$). Особый интерес представляет случай $p = 2$; при этом пространства $\mathcal{H}^2(E)$ суть гильбертовы пространства целых функций, введенные Л. де Бранжем [5]. Пространства де Бранжа имеют важные приложения в теории дифференциальных операторов и математической физике. В то же время имеется ряд работ, где пространства де Бранжа рассматриваются с точки зрения „чистой“ теории функций [6, 7].

Пространства $\mathcal{H}^p(E)$ тесно связаны также с так называемыми модельными подпространствами – коинвариантными подпространствами оператора сдвига в классе Харди $H^p(\mathbb{C}^+)$. Пусть Θ – внутренняя функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, то есть ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}^+$ функция, некасательные граничные значения которой почти везде равны по модулю единице. Каждой внутренней функции Θ соответствует подпространство $K_\Theta^p = H^p \cap \Theta\overline{H^p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Хорошо известно, что при $1 < p < \infty$ подпространства K_Θ^p и только они коинвариантны в H^p относительно действия полугруппы операторов сдвига $(U_t)_{t \geqslant 0}$, где $(U_t f)(x) = e^{itx} f(x)$. Коинвариантные подпространства оператора сдвига играют исключительно важную роль как в теории функций, так и в теории операторов (см. [8, 9]), в частности, при построении функциональной модели Надя–Фойаша для операторов сжатия в гильбертовом пространстве.

Если целая функция E удовлетворяет неравенству (1), то функция $\Theta_E = E^*/E$ — внутренняя, а оператор $F \mapsto F/E$ изометрически отображает $\mathcal{H}^p(E)$ на $K_{\Theta_E}^p$.

Неравенство (2) означает, что $F \in \mathcal{H}^\infty(E)$ и $\|F\|_{E,\infty} \leqslant 1$. Поэтому из неравенства (3) немедленно вытекает, что оператор

$\mathcal{D} : F \mapsto F'$ ограничен на $\mathcal{H}^\infty(E)$ тогда и только тогда, когда

$$E'/E \in H^\infty(\mathbb{C}^+), \tag{4}$$

и $\|\mathcal{D}\| = \|E'/E\|_\infty$ [10].

В настоящей работе найдены условия, необходимые и достаточные для ограниченности оператора $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathcal{H}^p(E)$, $1 < p < \infty$. Эти условия существенно зависят от показателя p, и, в отличие от случая $p = \infty$, условие (4), вообще говоря, не является необходимым; однако, оно становится необходимым и достаточным при дополнительных предположениях о нулях функции E.

Приведем формулировки основных результатов. Прежде всего, отметим, что из ограниченности оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$ вытекает, что E – функция экспоненциального типа. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только целые функции вида

$$E(z) = e^{-iaz+bz} \prod_n \left(1 - \frac{z}{\overline{z}_n}\right) e^{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right)z}, \tag{5}$$

где $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$, и $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}^+$ удовлетворяют условию Бляшке $\sum\limits_n y_n/|z_n|^2 < \infty$. Таким образом, все определяется распределением нулей z_n. Всюду в дальнейшем символы a и z_n имеют тот же смысл, что и в формуле (5). Класс целых функций вида (5) мы будем обозначать через $\mathcal{P}_0$.

В §1 собраны предварительные сведения о пространствах $\mathcal{H}^p(E)$ и K^p_Θ и, в частности, о воспроизводящих ядрах этих пространств. В §2 показано, что для ограниченности оператора $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathcal{H}^p(E)$ необходимо следующее условие, более слабое, чем (4): для всякого $h > 0$

$$\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in H^\infty(\mathbb{C}^+). \tag{6}$$

В отличие от (6), условие (4) не необходимо для ограниченности оператора дифференцирования в $\mathcal{H}^p(E)$ при $p \in (1, \infty)$. Но в том случае, когда нули z_n отделены от вещественной прямой, или параметр a в формуле (5) положителен, оно остается критерием ограниченности оператора $\mathcal{D}$.

Теорема A. *Пусть $E \in \mathcal{P}_0$ и $a + \inf\limits_n y_n > 0$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$;*
2) $E'/E \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$.

При этом найдется константа $C = C(p) > 0$ такая, что $\|\mathcal{D}\| \leqslant C\,\|E'/E\|_\infty$.

В доказательстве теоремы A существенно используется найденное К. М. Дьяконовым [11, 12] описание модельных подпространств K^p_Θ таких, что оператор дифференцирования ограничен как оператор из K^p_Θ в $L^p(\mathbb{R})$. Пусть $1 < p \leqslant \infty$. Тогда оператор $D : f \mapsto f'$ ограничен в том и только в том случае, когда $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. При этом найдется такая константа $C = C(p)$, что $\|f'\|_p \leqslant C\|\Theta'\|_\infty \|f\|_p$, $f \in K^p_\Theta$. Однако, несмотря на тесную связь этих результатов с задачей, решаемой в настоящей работе, они приводят к качественно другим свойствам последовательности нулей z_n.

Следующие параграфы посвящены анализу ситуации, когда нули z_n функции E неограниченно приближаются к вещественной прямой. В § 3 показано, что в том случае, когда оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, нули, близкие к вещественной прямой, должны быть достаточно редкими, а именно,

$$\sup_n \sum_{k \neq n} \left(\frac{y_n}{y_k}\right)^{p-1} \frac{1}{|z_n - \overline{z}_k|^p} < \infty.$$

Из последнего неравенства, в частности, следует, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\inf |x_k - x_n| > 0$ при условии, что $y_k < \varepsilon$, $y_n < \varepsilon$ и $k \neq n$.

Редкость нулей вблизи вещественной прямой позволяет использовать для исследования ограниченности оператора $\mathcal{D}$ результаты Шапиро–Шилдса о безусловных базисах из ядер Коши. При этом задача сводится к исследованию некоторого оператора в $\ell^p(\mathbb{Z})$, напоминающего дискретное преобразование Гильберта, а в некоторых случаях и к классическому дискретному условию Макенхаупта (A_p). Например, если $a = 0$, а $z_n = n + iy_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\sup_n y_n < \infty$, то оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$ в том и только в том случае, когда $\{y_n^{1-p}\}$ удовлетворяет (A_p).

В § 4 доказан один из основных результатов работы – критерий ограниченности оператора дифференцирования в общем случае: оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, $1<p<\infty$, тогда и только тогда, когда имеет место вложение модельного подпространства $K^p_{\Theta_E}$ в пространство $L^p(\mu)$, где мера μ определена специальным образом.

Теорема B. *Пусть целая функция $E\in\mathcal{P}_0$ удовлетворяет условию* (6), $1<p<\infty$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$;*
2) *найдется $\varepsilon>0$ такое, что*

   а) $\inf\{|x_n-x_k| : y_k<\varepsilon, y_n<\varepsilon, n\ne k\}>0$;

   б) *для всех достаточно малых $\sigma>0$ имеет место вложение $K^p_{\Theta_E}\subset L^p(\mu_{\sigma,p})$, где мера $\mu_{\sigma,p}$ определена равенством*
$$\mu_{\sigma,p}=\sum_{y_k<\varepsilon} y_k^{1-p}\delta_{x_k+\sigma},$$
   а δ_x обозначает единичную нагрузку в точке x.

Задача описания таких мер μ в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}^+}$, что для данной функции Θ имеет место вложение $K^p_\Theta\subset L^p(\mu)$, $1\leqslant p<\infty$ (или, что равносильно, оценка $\|f\|_{L^p(\mu)}\leqslant C\|f\|_p$, $f\in K^p_\Theta$), была поставлена В. Коном [13]. Теоремам вложения для модельных подпространств посвящены также работы [14]–[20], однако вопрос в общем виде остается открытым. В недавней работе [21] была установлена связь между теоремами вложения и другой открытой проблемой – двухвесовыми оценками преобразования Гильберта.

Несмотря на то, что критерий вложения для мер вида $\mu_{\sigma,p}$ неизвестен, теорема B позволяет доказать ограниченность оператора дифференцирования в $\mathcal{H}^p(E)$ для широкого класса функций E. С ее помощью можно показать, что по крайней мере для многих типичных ситуаций ограниченность оператора $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$ влечет его ограниченность в пространстве $\mathcal{H}^q(E)$ с $1<q<p$ (но не при $q>p$). Соответствующие примеры построены в § 4.

В § 5 обсуждается компактность оператора дифференцирования в пространствах $\mathcal{H}^p(E)$. Здесь предъявлен ряд примеров, показывающих, что оператор $\mathcal{D}$ может быть компактен в $\mathcal{H}^p(E)$ и даже (при $p=2$) может принадлежать всем классам Шаттена–фон Неймана. В частности, показано, что условие $\lim\limits_{|t|\to\infty}\left|\frac{E'(t)}{E(t)}\right|=0$ достаточно для компактности, но не является необходимым даже в том случае, когда нули функции E отделены от вещественной прямой.

Автор выражает глубокую признательность В. П. Хавину за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также К. М. Дьяконову за полезные обсуждения.

§ 1. Предварительные сведения о пространствах $\mathcal{H}^p(E)$

Будем говорить, что целая функция E принадлежит классу Эрмита–Билера, если E удовлетворяет неравенству (1). В этом случае $\Theta_E = E^*/E$ – внутренняя функция в верхней полуплоскости.

Предложение 1.1. *Оператор $F \mapsto F/E$ изометрически отображает $\mathcal{H}^p(E)$ на $K^p_{\Theta_E}$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{H}^p(E)$. Положим $f = F/E$. Тогда $f \in H^p$ и

$$\overline{f}(z)\,\Theta_E(z) = \frac{\overline{F}(z)}{\overline{E}(z)} \cdot \frac{\overline{E}(z)}{E(z)} = \frac{F^*(z)}{E(z)}. \tag{7}$$

Следовательно, $\overline{f}\Theta_E \in H^p$, а значит, $f \in K^p_{\Theta_E}$.

Покажем теперь, что всякий элемент пространства $K^p_{\Theta_E}$ имеет вид F/E, $F \in \mathcal{H}^p(E)$. Если $f \in K^p_{\Theta_E}$, то $f \in H^p(\mathbb{C}^+)$, $\overline{f}/\Theta_E \in H^p(\mathbb{C}^-)$. Заметим также, что функция f аналитически продолжима на вещественную прямую $\mathbb{R}$, так как функция Θ_E мероморфна в $\mathbb{C}$. Отсюда $F = fE$ – целая функция, и $F/E \in H^p$. Наконец, читая формулу (7) справа налево, получаем, что $F^*/E \in H^p$.

Замечание. Внутренняя функция Θ мероморфна в $\mathbb{C}$ в том и только в том случае, когда $\Theta(z) = \gamma \exp(iaz) B(z)$, где $|\gamma| = 1$, $a \geqslant 0$, а нули z_n произведения Бляшке B не имеют точек сгущения на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (то есть либо B – конечное произведение, либо $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$). При этом $\Theta = E^*/E$ для некоторой целой функции E из класса Эрмита–Билера.

В силу предложения 1.1, многие хорошо известные свойства пространств K^p_Θ переносятся на пространства $\mathcal{H}^p(E)$. Например, воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}^2(E)$ в точке $w \in \mathbb{C}$ имеет вид

$$K(z,w) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\overline{E(w)}E(z) - \overline{E^*(w)}E^*(z)}{z - \overline{w}}.$$

При этом

$$\frac{K(z,w)}{E(z)\overline{E(w)}} = k(z,w) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1-\Theta_E(z)\overline{\Theta_E(w)}}{z-\overline{w}},$$

где $k(\cdot,w)$ – воспроизводящее ядро модельного подпространства $K^2_{\Theta_E}$. Отметим, что $K(\cdot,w) \in \mathcal{H}^q(E)$, $1 < q \leqslant \infty$. Следовательно, если $F \in \mathcal{H}^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$F(w) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{F(t)\overline{K(t,w)}}{|E(t)|^2} dt, \qquad w \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R},$$

откуда по неравенству Гёльдера $(1/p + 1/q = 1)$

$$\left|\frac{F(w)}{E(w)}\right| \leqslant \frac{\|F\|_{E,p}\,\|K(\cdot,w)\|_{E,q}}{|E(w)|} = \left\|\frac{F}{E}\right\|_p \|k(\cdot,w)\|_q. \tag{8}$$

Для всякой целой функции E класса Эрмита–Билера найдется такая непрерывная неубывающая функция φ_E вещественной переменной, что $E(t)\exp(i\varphi_E(t)) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Функцию φ_E называют фазовой функцией для E (фазовая функция единственна с точностью до прибавления целых кратных числа π). При этом

$$\varphi_E'(t) = \frac{|\Theta_E'(t)|}{2} = a + \sum_n \frac{y_n}{|t-z_n|^2}.$$

Предложение 1.2. *Пусть оператор $\mathcal{D}$ ограничен на $\mathcal{H}^p(E)$, $1 < p < \infty$. Тогда E – функция экспоненциального типа, не превосходящего $\|\mathcal{D}\|$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{H}^p(E)$. Тогда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^n F(0)}{n!} z^n,$$

откуда

$$|F(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{D}^n f\|_{E,p}\,\|K(\cdot,0)\|_{E,q}}{n!} |z|^n \leqslant$$

$$\leqslant \|K(\cdot,0)\|_{E,q}\,\|F\|_{E,p} \exp(\|\mathcal{D}\| \cdot |z|).$$

Отметим, что $E \notin \mathcal{H}^p(E)$. Зафиксируем $F \in \mathcal{H}^p(E)$ и $w \in \mathbb{C}$ такие, что $F(w) \neq 0$. Положим

$$G(z) = \frac{E(z)F(w) - F(z)E(w)}{z-w};$$

функция G принадлежит пространству $\mathcal{H}^p(E)$, и $E(z) = \frac{1}{F(w)}((z-w)G(z) + E(w)F(z))$, что влечет искомую оценку для E.

Замечания. 1. Отметим также, что

$$F(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z)}{n!} w^n = (\exp(w\mathcal{D})F)(z).$$

Таким образом, если оператор $\mathcal{D}$ ограничен, то все операторы сдвига $T_w : F \mapsto F(\cdot + w)$, $w \in \mathbb{C}$, также ограничены в $\mathcal{H}^p(E)$.

2. Если оператор $\mathcal{D}$ ограничен, то функция E не имеет вещественных нулей. Действительно, если $E(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, то $F(x_0) = 0$ для всякой функции $F \in \mathcal{H}^p(E)$, причем кратность нуля x_0 в F не меньше, чем кратность x_0 в E. Дифференцирование понижает кратность нуля, поэтому найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $F^{(n)} \notin \mathcal{H}^p(E)$.

Всякая функция экспоненциального типа без вещественных нулей, принадлежащая классу Эрмита–Билера, допускает факторизацию вида (5) (см. [2] или [4]). Таким образом, при изучении оператора дифференцирования мы действительно можем рассматривать только целые функции класса $\mathcal{P}_0$ (класса Полиа). Отметим также, что „вещественный“ множитель e^{bz} не влияет на ограниченность оператора дифференцирования.

Далее мы будем пользоваться доказанным в [4] утверждением о том, что для функций $E \in \mathcal{P}_0$ и $F \in \mathcal{H}^p(E)$ включения $F' \in \mathcal{H}^p(E)$ и $F'/E \in L^p$ эквивалентны. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.3. *Пусть $E \in \mathcal{P}_0$. Тогда оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|F'/E\|_p \leqslant C\|F\|_{E,p}, \qquad F \in \mathcal{H}^p(E).$$

В дальнейшем важную роль играет функция E'/E, то есть логарифмическая производная функции E. Если $E \in \mathcal{P}_0$, то

$$\frac{E'}{E}(z) = -ia + b + \sum_n \left(\frac{1}{z - \overline{z}_n} + \operatorname{Re}\frac{1}{z_n} \right), \qquad z \neq \overline{z}_n.$$

Отметим также, что

$$\operatorname{Im}\frac{E'}{E}(z) = -a - \sum_n \frac{y+y_n}{|z-\overline{z}_n|^2} < 0, \qquad z = x+iy \in \mathbb{C}^+,$$

и, в частности,

$$\operatorname{Im}\frac{E'}{E}(x) = -\varphi_E'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

§ 2. Ограниченность логарифмической производной

Лемма 2.1. *Пусть* Θ *– внутренняя функция,* h_1, $h_2 > 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{8}\min\left(\frac{h_1}{h_2},\frac{h_2}{h_1}\right) \leqslant \frac{1-|\Theta(x+ih_1)|}{1-|\Theta(x+ih_2)|} \leqslant 8\max\left(\frac{h_1}{h_2},\frac{h_2}{h_1}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. В работе [4] приведено доказательство для случая, когда Θ – произведение Бляшке. Общий случай немедленно вытекает из теоремы Фростмана о равномерном приближении внутренней функции произведениями Бляшке.

Лемма 2.2. *Пусть* $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$. *Положим* $z = x + ih$, $w = x + 2ih$. *Тогда*

$$C_1 \leqslant \|k(\cdot,z)\|_p \, \|k(\cdot,w)\|_p^{-1} \leqslant C_2,$$

где C_1, C_2 *– абсолютные константы.*

Доказательство. Используя оценку леммы 2.1, легко показать, что $C_1 \leqslant |k(t,z)|/|k(t,w)| \leqslant C_2$, $t \in \mathbb{R}$.

Нам также понадобится известный факт о двойственности пространств K^p_Θ и K^q_Θ при $1/p+1/q=1$ (см., например, [22], лемма 4.2).

Лемма 2.3. *Пусть* Θ *– внутренняя функция,* $1 < p < \infty$, $1/p+1/q = 1$ *и* $w \in \mathbb{C}^+$. *Тогда*

$$\|k(\cdot,w)\|_q = \sup_{f\in K^p_\Theta,\, \|f\|_p=1} |f(w)|.$$

Теорема 2.4. *Пусть $1 < p < \infty$ и оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$. Тогда*
$$\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty(\mathbb{R})$$
для всякого $h > 0$ (то есть функция $\frac{E'}{E}(x+ih)$ ограничена как функция переменной $x \in \mathbb{R}$), и $\left\|\frac{E'}{E}(\cdot + ih)\right\|_\infty \leqslant C_1(p)\|\mathcal{D}\| + C_2(p)h^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $w = x + 2ih$. Зафиксируем функцию $F \in \mathcal{H}^p(E)$ такую, что $F(w) \neq 0$. Положим
$$G(z) = \frac{E(z)F(w) - F(z)E(w)}{E(w)(z-w)}.$$
Очевидно, $G \in \mathcal{H}^p(E)$, и
$$\left\|\frac{G}{E}\right\|_p \leqslant \left|\frac{F(w)}{E(w)}\right| \left\|\frac{1}{z-w}\right\|_p + \frac{1}{2h}\left\|\frac{F}{E}\right\|_p \leqslant \frac{C_1}{h^{1-1/p}}\left|\frac{F(w)}{E(w)}\right| + \frac{1}{2h}\left\|\frac{F}{E}\right\|_p,$$
поскольку $\|(z-w)^{-1}\|_p \leqslant C_1(p)(\operatorname{Im} w)^{-1/q}$. Применяя неравенство (8) и оценку $\|k(\cdot, w)\|_q \leqslant C_2(q)h^{-1/p}$, имеем
$$\left\|\frac{G}{E}\right\|_p \leqslant \frac{C_3}{h}\left\|\frac{F}{E}\right\|_p.$$
Вычислим производную функции G в точке $z = x + ih$:
$$\frac{G'(z)}{E(z)} = \frac{F(w)}{E(w)(z-w)} \cdot \frac{E'(z)}{E(z)} - \frac{F'(z)}{E(z)(z-w)} - \frac{E(z)F(w) - F(z)E(w)}{E(w)E(z)(z-w)^2}.$$
Оценим слагаемые в последней формуле:
$$\left|\frac{G'(z)}{E(z)}\right| \leqslant \left\|\frac{G'}{E}\right\|_p \|k(\cdot, z)\|_q \leqslant C_3\frac{\|\mathcal{D}\|}{h} \cdot \left\|\frac{F}{E}\right\|_p \cdot \|k(\cdot, z)\|_q.$$
Аналогично,
$$\left|\frac{F'(z)}{E(z)(z-w)}\right| \leqslant \frac{\|\mathcal{D}\|}{h} \cdot \left\|\frac{F}{E}\right\|_p \cdot \|k(\cdot, z)\|_q.$$
Наконец,
$$\left|\frac{E(z)F(w) - F(z)E(w)}{E(w)E(z)(z-w)^2}\right| = \frac{|G(z)|}{h|E(z)|} \leqslant \frac{C_3}{h^2} \cdot \left\|\frac{F}{E}\right\|_p \cdot \|k(\cdot, z)\|_q.$$

Итак,

$$\left|\frac{F(w)}{E(w)(z-w)}\cdot\frac{E'(z)}{E(z)}\right| \leqslant \left(C_4\frac{\|\mathcal{D}\|}{h}+\frac{C_5}{h^2}\right)\left\|\frac{F}{E}\right\|_p\cdot\|k(\cdot,z)\|_q.$$

Положим $f=F/E$. Тогда

$$\left|\frac{E'(x+ih)}{E(x+ih)}\right| \leqslant (C_4\|\mathcal{D}\|+C_5h^{-1})\frac{\|f\|_p\,\|k(\cdot,z)\|_q}{|f(w)|}.$$

Из леммы 2.2 вытекает соотношение $\|k(\cdot,z)\|_q\asymp\|k(\cdot,w)\|_q$. Учитывая, что f — произвольная ненулевая функция из $K^p_{\Theta_E}$, имеем

$$\left|\frac{E'(x+ih)}{E(x+ih)}\right| \leqslant (C_4\|\mathcal{D}\|+C_5h^{-1})\inf_{f\in K^p_{\Theta_E}}\frac{\|f\|_p\,\|k(\cdot,w)\|_q}{|f(w)|}.$$

Остается применить лемму 2.3.

Следствие 2.5. *Пусть оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$.*

1. *Если* $\inf\limits_n y_n=M>0$, *то* $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$ *и* $\|E'/E\|_\infty\leqslant C_1\|\mathcal{D}\|+C_2M^{-1}$.

2. *Пусть* $a>0$. *Тогда* $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1. Зафиксируем $h>0$; тогда $\frac{E'}{E}(\cdot+ih)\in L^\infty(\mathbb{R})$. Поскольку $|x+ih-\overline{z}_n|\leqslant(1+h/M)|x-\overline{z}_n|$, имеем

$$\left|\frac{E'}{E}(x)-\frac{E'}{E}(x+ih)\right|\leqslant\sum_n\frac{h}{|x-\overline{z}_n|\cdot|x+ih-\overline{z}_n|}\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{h}{M}\right)\left|\operatorname{Im}\frac{E'}{E}(x+ih)\right|.$$

Таким образом, $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$; положив $h=M$, получаем искомую оценку для нормы.

2. Представим функцию E как произведение $\exp(-iaz)E_0$. Положим $f_x(z)=\frac{\sin a(z-x)}{z-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Очевидно $f_xE_0\in\mathcal{H}^p(E)$ и $\|f_xE_0\|_{E,p}\leqslant C_1(a,p)$. Заметим также, что $|f_x(t)|\geqslant C_2\,a$, $|t-x|\leqslant 1/a$. Из ограниченности оператора дифференцирования и неравенства Бернштейна для пространства Пэли–Винера вытекает, что

$$\left\|\frac{E_0'}{E_0}f_x\right\|_p\leqslant C_1(\|\mathcal{D}\|+a),$$

откуда

$$\int\limits_{x-1/a}^{x+1/a} \left|\frac{E_0'(t)}{E_0(t)}\right|^p dt \leqslant C_3$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, где $C_3 = C_3(a, p, \|\mathcal{D}\|)$. Следовательно,

$$\int\limits_{x-1/a}^{x+1/a} |\varphi_{E_0}'(t)|^p \, dt \leqslant C_3(a, p, \|\mathcal{D}\|), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что нули z_n функции E отделены от вещественной прямой. Действительно, если $y_n < 1/a$, то

$$\int\limits_{x_n-1/a}^{x_n+1/a} |\varphi_{E_0}'(t)|^p \, dt \geqslant \int\limits_{x_n-1/a}^{x_n+1/a} \frac{y_n^p}{|t - z_n|^{2p}} dt \geqslant \frac{C_4}{y_n^{p-1}}.$$

Таким образом, $y_n^{p-1} \geqslant C_5 = C_5(a, p, \|\mathcal{D}\|) > 0$ и, согласно первой части следствия, $E'/E \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Замечание. Легко видеть, что для целой функции E из класса $\mathcal{P}_0$ включение $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty(\mathbb{R})$ эквивалентно включению $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$ (функция $\frac{E'}{E}(\cdot + ih)$ лежит в так называемом классе В. И. Смирнова, так как $\operatorname{Im} \frac{E'}{E}(z + ih) < 0$).

Отметим также, что условие $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty(\mathbb{R})$ выполнено или не выполнено одновременно для всех $h > 0$. В то же время, включение $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty(\mathbb{R})$ может выполняться для всех $h > 0$, а функция $\frac{E'}{E}$ не быть ограниченной на $\mathbb{R}$. Например, положим $z_n = n + (|n| + 1)^{-1} i$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty$ для всех $h > 0$, но $\frac{E'}{E} \notin L^\infty$; более того, $\varphi_E' \notin L^\infty$, так как $\varphi_E'(n) > |n| + 1$. Вообще, условие $\inf\limits_n y_n > 0$ необходимо для ограниченности функций φ_E' и E'/E на $\mathbb{R}$.

Далее будем говорить, что целая функция E принадлежит классу $\mathcal{L}$, если $E \in \mathcal{P}_0$ и $\frac{E'}{E}(\cdot + ih) \in L^\infty(\mathbb{R})$ $(H^\infty(\mathbb{C}^+))$ для всех $h > 0$.

Нули целой функции класса $\mathcal{L}$ должны обладать значительной симметрией. Хорошо известно, что нули $\{\lambda_n\}$ целой функции экспоненциального типа удовлетворяют условию Линделёфа

$\limsup\limits_{r\to\infty}\left|\sum\limits_{|\lambda_n|<r}\lambda_n^{-1}\right|<\infty$. Как показано в [4], включение $\frac{E'}{E}(\cdot+ih)\in L^\infty(\mathbb{R})$ означает, что последовательность $\{z_n+ih\}$ удовлетворяет неравенству типа условия Линделёфа равномерно по всем сдвигам на вещественное число, то есть функция E принадлежит классу $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда для всякого $h>0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\limsup_{r\to\infty}\left|\sum_{|z_n-x|<r}\frac{1}{z_n+ih-x}\right|\right)<\infty.$$

Доказательство теоремы A. По следствию 2.5 условие $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$ необходимо для ограниченности оператора $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$ для всякого $p\in(1,\infty)$, если $a+\inf\limits_n y_n>0$. Покажем, что это условие достаточно. Пусть $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $\Theta_E'\in L^\infty(\mathbb{R})$, так как $|\Theta_E'|=-2\,\mathrm{Im}\,\frac{E'}{E}$ на вещественной прямой. Следовательно, по теореме Дьяконова, имеет место оценка $\|f'\|_p\leqslant C(p)\|E'/E\|_\infty\|f\|_p$, $f\in K^p_{\Theta_E}$. Если $F\in\mathcal{H}^p(E)$, то $F/E\in K^p_{\Theta_E}$, и

$$\left\|\frac{F'}{E}\right\|_p=\left\|\left(\frac{F}{E}\right)'+\frac{E'}{E}\frac{F}{E}\right\|_p\leqslant\left\|\frac{E'}{E}\right\|_\infty\left\|\frac{F}{E}\right\|_p+\left\|\left(\frac{F}{E}\right)'\right\|_p\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\frac{E'}{E}\right\|_\infty\left\|\frac{F}{E}\right\|_p+C\left\|\frac{E'}{E}\right\|_\infty\left\|\frac{F}{E}\right\|_p=(C+1)\left\|\frac{E'}{E}\right\|_\infty\left\|\frac{F}{E}\right\|_p.$$

В силу предложения 1.3, ограниченность оператора $\mathcal{D}$ доказана.

Замечания. 1. Предыдущие рассуждения без всяких изменений переносятся на случай $p=1$. Таким образом, условие $E'/E\in L^\infty(\mathbb{R})$ достаточно для ограниченности оператора дифференцирования в $\mathcal{H}^1(E)$.

2. В общем случае условие $E'/E\in L^\infty$ не является необходимым, то есть оператор $\mathcal{D}$ может быть ограничен и в случае $\inf\limits_n y_n=0$. Приведем некоторые примеры (соответствующие утверждения будут доказаны в §3).

а) Если последовательность $\{z_n\}$ очень „редкая“, например, $z_n=2^n+n^{-1}i$, $n\in\mathbb{N}$, то оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, $1<p<\infty$, где E – произведение (4) с $a=0$.

б) Пусть $z_n=n+in^{-\alpha}$, где $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq0$. $\alpha>0$. Тогда оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, $1<p<\infty$, в том и только в том случае, когда $\alpha \in (0,1)$. Аналогичные примеры содержатся в работе [6], где построена функция E такая, что $\inf\limits_n y_n = 0$ и $\mathcal{H}^p(E) = PW_\pi^p$, то есть $\mathcal{H}^p(E)$ и PW_π^p совпадают как множества с эквивалентностью норм.

3. Сопоставим теорему A с результатами Дьяконова [11, 12]. Неравенство Бернштейна в $K_{\Theta_E}^p$ эквивалентно условию $\varphi_E' \in L^\infty(\mathbb{R})$. В случае $\inf\limits_n y_n > 0$ ограниченность оператора $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$ налагает более сильные условия на нули функции E, так как не только функция φ_E', но и сопряженная функция $\widetilde{\varphi_E'}$ должна быть ограничена. Однако, оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ может быть ограничен и при условии $\inf\limits_n y_n = 0$, в то время как в соответствующем коинвариантном подпространстве $K_{\Theta_E}^p$ нет неравенства Бернштейна, поскольку $\varphi_E' \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

4. Критерий ограниченности оператора $\mathcal{D}$ в теореме A не зависит от показателя $p \in (1,\infty)$, так же как и условие $\Theta' \in L^\infty$ в теореме Дьяконова. В §3–§4 будет показано, что в том случае, когда $a + \inf\limits_n y_n = 0$, ограниченность оператора $\mathcal{D}$ существенно зависит от p.

§ 3. Условия редкости нулей

В дальнейшем нас прежде всего интересует случай, когда $\inf\limits_n y_n = 0$. В этом случае $E'/E \notin L^\infty(\mathbb{R})$, а условие $E \in \mathcal{L}$ является необходимым, но не достаточным для ограниченности оператора $\mathcal{D}$; возникают дополнительные условия редкости нулей, близких к вещественной прямой.

Всюду далее мы предполагаем, что $1 < p < \infty$. Мы пишем $f \asymp g$, если $C_1 f \leqslant g \leqslant C_2 f$ для некоторых положительных констант C_1 и C_2.

Теорема 3.1. *Пусть оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$. Тогда*

$$\sup_n \sum_{k\neq n} \left(\frac{y_n}{y_k}\right)^{p-1} \frac{1}{|z_n - \overline{z}_k|^p} < \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Зафиксируем n и конечное подмножество индексов K такое, что $n \notin K$. Определим функцию E_0 равенством

$$E(z) = E_0(z)(z - \overline{z}_n) \prod_{k\in K} (z - \overline{z}_k).$$

Положим $f_1(z) = E_0(z) \prod\limits_{k\in K} (z-\overline{z}_k)$, $f_2(z) = E_0(z) \prod\limits_{k\in K} (z-z_k)$. Ясно, что $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^p(E)$ и

$$\|f_1\|_{E,p} = \|f_2\|_{E,p} \asymp y_n^{1/p-1}$$

(константы в последнем асимптотическом равенстве зависят от p). Далее,

$$\frac{f_1'(z)}{E(z)} = \frac{1}{z-\overline{z}_n}\left(\sum_{k\in K}\frac{1}{z-\overline{z}_k} + \frac{E_0'(z)}{E_0(z)}\right),$$

$$\frac{f_2'(z)}{E(z)} = \frac{1}{z-\overline{z}_n}\left(\sum_{k\in K}\frac{1}{z-z_k} + \frac{E_0'(z)}{E_0(z)}\right)\prod_{k\in K}\frac{z-z_k}{z-\overline{z}_k}.$$

Оператор дифференцирования ограничен; следовательно,

$$\left\|\frac{1}{t-\overline{z}_n}\sum_{k\in K}\left(\frac{1}{t-z_k} - \frac{1}{t-\overline{z}_k}\right)\right\|_p =$$

$$= \left\|\frac{f_1'}{E} - \frac{f_2'}{E}\prod_{k\in K}\frac{t-\overline{z}_k}{t-z_k}\right\|_p \leqslant C(p)\|\mathcal{D}\| y_n^{1/p-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k\in K}\left\|\frac{y_n^{1-1/p}}{t-\overline{z}_n}\cdot\frac{y_k}{|t-z_k|^2}\right\|_p^p \leqslant C(p)\|\mathcal{D}\|^p.$$

Остается воспользоваться произвольностью множества K и элементарной оценкой

$$\left\|\frac{y_n^{1-1/p}}{t-\overline{z}_n}\cdot\frac{y_k}{|t-z_k|^2}\right\|_p^p \geqslant \left(\frac{y_n}{y_k}\right)^{p-1}\frac{1}{|z_n-\overline{z}_k|^p}.$$

Следствие 3.2. *Оценка* (9) *влечет неравенство* $|z_n - \overline{z}_k| \geqslant C > 0$, $n \ne k$. *В частности, найдутся* $\varepsilon, r > 0$ *такие, что*

1) $|x_n - x_k| \geqslant r$, *если* $y_n < \varepsilon$, $y_k < \varepsilon$, $n \ne k$;
2) $|z_n - z_k| \geqslant r$, *если* $y_n < \varepsilon$, $n \ne k$.

Предположим теперь, что последовательность $\{z_n\}$ нулей внутренней функции Θ_E удовлетворяет интерполяционному условию Карлесона

$$\inf_k \prod_{n\neq k} \left|\frac{z_n - z_k}{z_n - \overline{z}_k}\right| \geqslant \delta > 0. \tag{C}$$

Подобное ограничение представляется естественным, так как, по следствию 3.2, нули, близкие к $\mathbb{R}$, обязаны удовлетворять условию Карлесона. В то же время мы можем пользоваться тем, что в $K^p_{\Theta_E}$ есть безусловный базис, состоящий из нормированных ядер Коши.

Теорема 3.3. *Пусть* $E \in \mathcal{P}_0$, $a = 0$, *и последовательность* $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *удовлетворяет условию* (C). *Положим* $E_k(z) = E(z)(z-\overline{z}_k)^{-1}$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор* $\mathcal{D}$ *ограничен в* $\mathcal{H}^p(E)$;
2) $\sup\limits_k \left|\frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k)\right| < \infty$, *и матрица* (A_{lk}), *где* $A_{ll} = 0$ *и*

$$A_{lk} = \left(\frac{y_k}{y_l}\right)^{1-1/p} \frac{1}{z_l - z_k}, \qquad l \neq k, \tag{10}$$

задает ограниченный оператор в $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Доказательство. По теореме Шапиро–Шилдса (см. [8, 9]) семейство функций $y_k^{1-1/p}(z-\overline{z}_k)^{-1}$ есть безусловный базис в $K^p_{\Theta_E}$, где $\Theta_E = E^*/E$ — произведение Бляшке с нулями z_k. Всякая функция $f \in K^p_{\Theta_E}$ представима в виде безусловно сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_k \frac{y_k^{1-1/p} c_k}{z - \overline{z}_k}, \qquad \{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}),$$

и $\|f\|_p^p \asymp \sum\limits_k |c_k|^p$ (при этом константы, участвующие в последней оценке, зависят только от p и константы δ в условии Карлесона (C)). Следовательно, всякая функция $F \in \mathcal{H}^p(E)$ имеет вид $F = \sum\limits_k y_k^{1-1/p} c_k E_k$. Найдем матрицу оператора $\mathcal{D}$ в базисе $y_k^{1-1/p} E_k$. Пусть $K \subset \mathbb{Z}$ – конечное подмножество, и $F = \sum\limits_{k\in K} y_k^{1-1/p} c_k E_k$.

Вычислим E_k'/E:

$$\frac{E_k'}{E}(z) = \frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k) \cdot \frac{1}{z - \overline{z}_k} + \sum_{l \neq k} \frac{1}{\overline{z}_l - \overline{z}_k} \cdot \frac{1}{z - \overline{z}_l}.$$

Тогда

$$\frac{F'(z)}{E(z)} = \sum_{k \in K} \frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k) \cdot \frac{y_k^{1-1/p} c_k}{z - \overline{z}_k} + \sum_l \frac{1}{z - \overline{z}_l} \left(\sum_{k \in K, k \neq l} \frac{y_k^{1-1/p} c_k}{\overline{z}_l - \overline{z}_k} \right).$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{F'}{E} \right\|_p^p \leqslant C \left(\sum_{k \in K} \left| \frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k) \right|^p |c_k|^p + \sum_l \frac{1}{y_l^{p-1}} \left| \sum_{k \in K, k \neq l} \frac{y_k^{1-1/p} c_k}{\overline{z}_l - \overline{z}_k} \right|^p \right).$$

Ввиду предложения 1.3 и произвольности множества K, импликация $1 \Longrightarrow 2$ доказана.

Пусть оператор $\mathcal{D}$ ограничен. Тогда из условия $E \in \mathcal{L}$ и следствия 3.2 вытекает, что $\sup\limits_k \left| \frac{E_k'}{E_k}(z_k) \right| < \infty$. Следовательно,

$$\left| \frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k) - \frac{E_k'}{E_k}(z_k) \right| = \left| \sum_{l \neq k} \frac{2iy_k}{(z_k - \overline{z}_l)(\overline{z}_k - \overline{z}_l)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{l \neq k} \frac{2y_k}{|z_k - \overline{z}_l|^2} \leqslant \frac{2}{\delta} \left| \operatorname{Im} \frac{E_k'}{E_k}(z_k) \right|.$$

Таким образом, $\sup\limits_k \left| \frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k) \right| < \infty$.

Поскольку оператор $\mathcal{D}$ ограничен, $\|F'\|_{E,p}^p \leqslant \|\mathcal{D}\|^p \cdot \|F\|_{E,p}^p \asymp \sum\limits_k |c_k|^p$. Следовательно,

$$\sum_l \frac{1}{y_l^{p-1}} \left| \sum_{k \in K, k \neq l} \frac{y_k^{1-1/p} c_k}{\overline{z}_l - \overline{z}_k} \right|^p \leqslant C \sum_{k \in K} |c_k|^p,$$

то есть оператор A, заданный матрицей (10), ограничен.

Ограниченность оператора A в $\ell^p(\mathbb{Z})$ эквивалентна ограниченности оператора, заданного матрицей $a_{lk} = (z_l - z_k)^{-1}$, $l \neq k$,

$a_{ll} = 0$, в пространстве $\ell^p(\{y_k^{1-p}\})$, где

$$\ell^p(\{r_k\}) = \{(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k|c_k|^p < \infty\}.$$

Таким образом, исследование оператора $\mathcal{D}$ сводится к исследованию оператора, напоминающего дискретное преобразование Гильберта в пространстве ℓ^p с весом.

В том случае, когда $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\sup\limits_k y_k < \infty$, задача сводится к ограниченности классического преобразования Гильберта. Хорошо известно, что дискретное преобразование Гильберта ограничено в $\ell^p(\{r_k\})$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{r_k\}$ удовлетворяет дискретному условию Макенхаупта (см. [23, 24]):

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},\, n>0} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} r_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} r_k^{-1/(p-1)}\right)^{p-1} < \infty. \qquad (A_p)$$

Лемма 3.4. *Если* $\inf\limits_k(x_{k+1} - x_k) > 0$ *и* $\sup\limits_k(x_{k+1} - x_k) < \infty$, *то условие* (A_p) *необходимо и достаточно для ограниченности оператора в* $\ell^p(\{r_k\})$, *заданного матрицей* $b_{lk} = (x_l - x_k)^{-1}$, $l \neq k$, $b_{ll} = 0$.

Доказательство. Необходимость условия (A_p) показана в [24], а достаточность в [4].

Следствие 3.5. *Пусть* $E \in \mathcal{L}$, $a = 0$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} y_k < \infty$, *и* $0 < \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1} - x_k) < \infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор* $\mathcal{D}$ *ограничен в* $\mathcal{H}^p(E)$;
2) *последовательность* $\{y_k^{1-p}\}$ *удовлетворяет условию* (A_p).

Пример. Пусть $\alpha > 0$, $z_n = n + i|n|^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Условие Макенхаупта (A_p) выполнено (и оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть теперь $z_n = n^\beta + in^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\beta > 1$. Изучая матрицу (10), нетрудно показать, что оператор A в $\ell^p(\mathbb{N})$ (а значит, и оператор $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$) ограничен в том и только в том случае, когда $\alpha < \frac{p\beta-1}{p-1}$. Таким образом, ограниченность оператора $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^p(E)$ существенно зависит от показателя p.

§ 4. Оператор дифференцирования и теоремы вложения

Пусть $E \in \mathcal{L}$ – целая функция с нулями $\{\overline{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $a = 0$. Разобьем $\mathbb{Z}$ на два множества Z_1 и Z_2 и положим $E = E_1 \cdot E_2$, где E_j – каноническое произведение вида (5) с нулями $\{\overline{z}_n\}_{n\in Z_j}$, $j = 1, 2$. Предположим, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{n\in Z_1} y_n \leqslant \varepsilon, \qquad \inf_{n\in Z_2} y_n \geqslant \varepsilon,$$

а также

$$\inf\{|x_n - x_k| : n,\, k \in Z_1,\ n \neq k\} > 0$$

и

$$\inf\{|z_n - z_k| : n \in Z_1,\ k \in Z_2\} > 0.$$

Если оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, то следствие 3.2 гарантирует, что такая факторизация имеет место (если $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n > 0$, то в качестве Z_1 можно взять пустое множество).

Отметим, что $\Theta_E = \Theta_1\Theta_2$, где $\Theta_j = E_j^*/E_j$, $j = 1, 2$, и имеет место представление пространства $K^p_{\Theta_E}$, $1 < p < \infty$, в виде прямой суммы

$$K^p_{\Theta_E} = K^p_{\Theta_1} + \Theta_1 K^p_{\Theta_2}. \tag{11}$$

При этом найдется константа $C = C(p) > 0$ такая, что

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leqslant C\|f + g\|_p, \qquad f \in K^p_{\Theta_1},\ g \in K^p_{\Theta_2}. \tag{12}$$

Последнее неравенство следует из ограниченности проектора Рисса P_+ в L^p при $p \in (1, \infty)$ [8], а значит, и проектора из L^p на подпространство K^p_Θ, действующего по формуле $P_\Theta g = g - \Theta P_+(\overline{\Theta} g)$. При $p = 2$ слагаемые в формуле (11) ортогональны. Таким образом,

$$\mathcal{H}^p(E) = E_2\mathcal{H}^p(E_1) + E_1^*\mathcal{H}^p(E_2). \tag{13}$$

Следовательно, всякая функция F из $\mathcal{H}^p(E)$ имеет вид $F = E_2G_1 + E_1^*G_2$, где $G_1 \in \mathcal{H}^p(E_1)$, $G_2 \in \mathcal{H}^p(E_2)$ и $\|F\|_{E,p} \asymp \|G_1\|_{E_1,p} + \|G_2\|_{E_2,p}$.

Идея доказательства теоремы B состоит в том, чтобы рассмотреть отдельно оператор дифференцирования на пространствах $E_2\mathcal{H}^p(E_1)$ и $E_1^*\mathcal{H}^p(E_2)$ и показать, что его ограниченность эквивалентна ограниченности вложений $K^p_{\Theta_1} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$ и $K^p_{\Theta_2} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$

соответственно. Тем самым, теорема B будет доказана ввиду разложения (13). Напомним, что

$$\mu_{\sigma,\,p} = \sum_{l\in Z_1} y_l^{1-p}\delta_{x_l+\sigma}.$$

Две следующие леммы устанавливают связь между ограниченностью оператора $\mathcal{D}$ на $E_2\mathcal{H}^p(E_1)$ и вложением $K^p_{\Theta_1} \subset L^p(\mu_{\sigma,\,p})$. Их доказательства для случая $p = 2$ ([4], леммы 5.1 и 5.2) почти дословно переносятся на случай произвольного $p \in (1,\infty)$; поэтому, мы их не приводим.

Лемма 4.1. *При сформулированных выше условиях следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор $\mathcal{D}$ ограничен, как оператор из $E_2\mathcal{H}^p(E_1)$ в $\mathcal{H}^p(E)$;*
2) *матрица $(A_{lk})_{l,k\in Z_1}$, где $A_{ll} = 0$ и*

$$A_{lk} = \left(\frac{y_k}{y_l}\right)^{1-1/p}\frac{1}{z_l - z_k}, \qquad l,\,k \in Z_1,\ l \neq k, \tag{14}$$

задает ограниченный оператор в $\ell^p(Z_1)$.

Лемма 4.2. *Матрица* (14) *задает ограниченный оператор в $\ell^p(Z_1)$ тогда и только тогда, когда имеет место вложение $K^p_{\Theta_1} \subset L^p(\mu_{\sigma,\,p})$ для всякого (некоторого) σ такого, что $0 < \sigma < \inf\limits_{k,n\in Z_1,\,k\neq n} |x_k - x_n|/2$.*

Для доказательства теоремы B нам также понадобится одно утверждение об устойчивости вложений при "малых возмущениях" мер.

Лемма 4.3 ([17])**.** *Пусть Θ – внутренняя функция, ν – борелевская мера и $K^p_\Theta \subset L^p(\nu)$, то есть $\|f\|_{L^p(\nu)} \leqslant A\|f\|_p$, $f \in K^p_\Theta$. Тогда $K^p_{\Theta^j} \subset L^p(\nu)$, $j \in \mathbb{N}$, и*

$$\|f\|_{L^p(\nu)} \leqslant C^{j-1}A\|f\|_p, \qquad f \in K^p_{\Theta^j},$$

для некоторой константы $C = C(p) > 0$.

Доказательство. Утверждение леммы для $j = 2$ немедленно следует из представления $K^p_{\Theta^2} = K^p_\Theta + \Theta K^p_\Theta$ и неравенства (12). Доказательство для $j > 2$ аналогично.

Лемма 4.4. *Пусть Θ – внутренняя функция такая, что $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда найдется константа $\widetilde{C} = \widetilde{C}(p) > 0$ такая, что*

$$\|f^{(j)}\|_p \leqslant \widetilde{C}^j j! \|f\|_p, \qquad f \in K^p_\Theta. \tag{15}$$

Доказательство. Оценка (15) фактически доказана в работе [11]. Прежде всего, из условия $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ следует, что функция Θ мероморфна во всей комплексной плоскости и, в частности, аналитически продолжима через вещественную прямую [11]. Поэтому всякая функция $f \in K^p_\Theta$ также аналитична на $\mathbb{R}$. Заметим также, что в этом случае производная $f^{(j)}$ принадлежит пространству $K^p_{\Theta^{j+1}}$. Действительно, элементы пространства K^p_Θ суть мероморфные функции с полюсами в точках, сопряженных с нулями функции Θ, а дифференцирование повышает порядок полюса на единицу. По теореме Дьяконова $\|f'\|_p \leqslant \widetilde{C}\|f\|_p$, $f \in K^p_\Theta$. Учитывая, что $|(\Theta^j)'(t)| = j|\Theta'(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, мы получаем неравенство (15) с помощью индукции.

Лемма 4.5. *Пусть $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, t_n, $s_n \in \mathbb{R}$, $r_n > 0$, а меры ν_1 и ν_2 определены равенствами*

$$\nu_1 = \sum_n r_n \delta_{s_n}, \qquad \nu_2 = \sum_n r_n \delta_{t_n}.$$

Тогда найдется $\sigma_0 = \sigma_0(\Theta, p) > 0$ такое, что если $|s_n - t_n| \leqslant \sigma_0$, то вложения $K^p_\Theta \subset L^p(\nu_1)$ и $K^p_\Theta \subset L^p(\nu_2)$ имеют место или нет одновременно.

Доказательство. Поскольку всякая функция $f \in K^p_\Theta$ аналитична на $\mathbb{R}$, имеем

$$|f(t_n) - f(s_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f^{(j)}(s_n)|}{j!} |t_n - s_n|^j.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_n r_n |f(t_n) - f(s_n)|^p \right)^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_0^j}{j!} \|f^{(j)}\|_{L^p(\nu_1)}.$$

Предположим, что имеет место вложение $K^p_\Theta \subset L^p(\nu_1)$. Оценим норму $\|f^{(j)}\|_{L^p(\nu_1)}$. Как было отмечено в доказательстве леммы

4.4, $f^{(j)} \in K^p_{\Theta^{j+1}}$. Следовательно, по лемме 4.3 выполнено неравенство $\|f^{(j)}\|_{L^p(\nu_1)} \leqslant AC^j\|f^{(j)}\|_p$. Теперь применим оценку (15): $\|f^{(j)}\|_{L^p(\nu_1)} \leqslant AC^j\widetilde{C}^j j!\|f\|_p$. Возьмем $\sigma_0 = (2C\widetilde{C})^{-1}$. Тогда

$$\left(\sum_n r_n |f(t_n) - f(s_n)|^p\right)^{1/p} \leqslant 2AC\widetilde{C}\sigma_0\|f\|_p. \tag{16}$$

Таким образом, $K^p_\Theta \subset L^p(\nu_2)$.

Доказательство теоремы B. Согласно леммам 4.1 и 4.2, оператор $\mathcal{D}$ ограничен как оператор из $E_2\mathcal{H}^p(E_1)$ в $\mathcal{H}^p(E)$ тогда и только тогда, когда $K^p_{\Theta_1} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$ для достаточно малых $\sigma > 0$. Покажем, что ограниченность оператора $\mathcal{D}$ на $E_1^*\mathcal{H}^p(E_2)$ равносильна вложению $K^p_{\Theta_2}$ в $L^p(\mu_{\sigma,p})$. Тогда теорема будет доказана ввиду разложения (13).

Пусть $G \in \mathcal{H}^p(E_2)$. Тогда

$$\frac{(E_1^*G)'}{E} = \frac{E_1^*G' + (E_1^*)'}{E_1E_2} = \frac{E_1^*}{E_1}\left(\frac{G}{E_2}\right)' + \frac{E_1^*}{E_1}\cdot\frac{G}{E_2}\left(\frac{(E_1^*)'}{E_1^*} + \frac{E_2'}{E_2}\right).$$

Первое слагаемое можно оценить, применяя теорему Дьяконова, так как из условия $E \in \mathcal{L}$ вытекает, что $\varphi'_{E_2} \in L^\infty(\mathbb{R})$, и, значит, $\|(G/E_2)'\|_p \leqslant C\|G/E_2\|_p = C\|G\|_{E_2,p}$. Положим $\Delta_k = (x_k - \sigma, x_k + \sigma)$, $k \in Z_1$. Будем считать, что $0 < \sigma < \inf\limits_{k,n\in Z_1,\,k\neq n} |x_k - x_n|/2$. Тогда промежутки Δ_k попарно дизъюнктны. Из условий $E \in \mathcal{L}$ и $\inf\{|x_n - x_k| : n,\, k \in Z_1,\ n \neq k\} > 0$ следует, что

$$\frac{(E_1^*)'}{E_1^*}(x) + \frac{E_2'}{E_2}(x) = \frac{1}{x - z_k} + O(1), \quad x \in \Delta_k,\ \ k \in Z_1,$$

и

$$\frac{(E_1^*)'}{E_1^*} + \frac{E_2'}{E_2} \in L^\infty(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in Z_1} \Delta_k).$$

Таким образом,

$$\left\|\frac{(E_1^*G)'}{E}\right\|_p = \left(\sum_{k\in Z_1}\int_{\Delta_k}\left|\frac{G}{E_2}(t)\right|^p\cdot\frac{dt}{|t - z_k|^p}\right)^{1/p} + O(\|G\|_{E_2,p}).$$

По теореме о среднем найдутся $t_k \in \Delta_k$ такие, что

$$\int_{\Delta_k}\left|\frac{G}{E_2}(t)\right|^p\cdot\frac{dt}{|t - z_k|^p} = \left|\frac{G}{E_2}(t_k)\right|^p\int_{\Delta_k}\frac{dt}{|t - z_k|^p} \asymp \frac{1}{y_k^{p-1}}\left|\frac{G}{E_2}(t_k)\right|^p.$$

Положим $g = G/E_2$, $g \in K^p_{\Theta_2}$. Если $K^p_{\Theta_2} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$ и σ достаточно мало, то по лемме 4.5 верно неравенство $\sum\limits_k y_k^{1-p}|g(t_k)|^p \leqslant C\|g\|_p^p$, и, значит, оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть оператор $\mathcal{D}$ ограничен. Тогда для всякой функции $g \in K^p_{\Theta_2}$ найдется такая последовательность t_k, что $|t_k - x_k| \leqslant \sigma$ и $\sum_k y_k^{1-p}|g(t_k)|^p \leqslant C\|g\|_p^p$. Покажем, что $K^p_{\Theta_2} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$ при достаточно малых σ. Рассмотрим делитель функции Θ_2 – конечное произведение Бляшке

$$B_n(z) = \prod_{m \in Z_2, |m| \leqslant n} \frac{z - z_m}{z - \overline{z}_m}.$$

Достаточно проверить, что нормы операторов вложения $K^p_{B_n}$ в $L^p(\mu_{\sigma,p})$ ограничены равномерно по n, после чего можно воспользоваться леммой Фату, так как для всякой функции $g \in K^p_{\Theta_2}$ найдется последовательность $g_n \in K^p_{B_n}$, сходящаяся к g поточечно. Конечномерное пространство $K^p_{B_n}$ совпадает с линейной оболочкой функций $(z - \overline{z}_m)^{-1}$, $m \in Z_2$, $|m| \leqslant n$; следовательно, по неравенству (9) имеет место вложение $K^p_{B_n} \subset L^p(\mu_{\sigma,p})$. Пусть $M_n = \max\{\|f\|_{L^p(\mu_{\sigma,p})} : f \in K^p_{B_n}, \|f\|_p = 1\}$ и $\|g\|_{L^p(\mu_{\sigma,p})} = M_n\|g\|_p$. Тогда, по неравенству (16),

$$M_n\|g\|_p \leqslant \left(\sum_n y_n^{1-p}|g(t_n)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_n y_n^{1-p}|g(t_n) - g(x_n + \sigma)|^p\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|g\|_p + C_2\sigma M_n\|g\|_p,$$

где C_1 и C_2 зависят от p, $\|\mathcal{D}\|$, $\|\Theta_2'\|_\infty$, но не от n. Таким образом, $M_n \leqslant 2C_1$ при $\sigma < (2C_2)^{-1}$.

Следствие 4.6. *Пусть $E \in \mathcal{L}$, $a = 0$, $\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} y_k < \infty$ и $0 < \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}}(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}}(x_{k+1} - x_k) < \infty$. Если оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, то он ограничен в $\mathcal{H}^q(E)$ при $1 < q < p$.*

Доказательство. Согласно следствию 3.5, оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$ тогда и только тогда, когда $\{y_k^{1-p}\}$ удовлетворяет условию (A_p), то есть

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}, n > 0} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k^{1-p}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k\right)^{p-1} < \infty.$$

По известным свойствам средних

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k^{1-p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} y_k^{1-q}\right)^{\frac{1}{q-1}},$$

если $p > q > 1$. Следовательно, последовательность $\{y_k^{1-q}\}$ удовлетворяет условию (A_q), $p > q > 1$.

Пример. Покажем, что в условиях следствия 4.6 оператор дифференцирования может не быть ограниченным в $\mathcal{H}^q(E)$ при $q > p$. Более того, для всякого $p \in (1,\infty)$ найдется функция E такая, что оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$ только если $q \leqslant p$.

Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$. Пусть M, $N \in \mathbb{N}$ и $N = [M^{1+\alpha(p-1)}]$ ($[x]$ обозначает целую часть числа x). Положим $y_k = 1$ при $1 \leqslant k \leqslant N$, $y_k = (k-N)^{-\alpha}$ при $N+1 \leqslant k \leqslant N+M$ и, наконец, $y_k = y_{2N+2M-k}$. Тогда

$$\left(\frac{1}{N+M}\sum_{k=1}^{N+M} y_k^{1-p}\right)\left(\frac{1}{N+M}\sum_{k=1}^{N+M} y_k\right)^{p-1} \asymp$$

$$\asymp \frac{N+M^{1+\alpha(p-1)}}{N+M}\left(\frac{N+M^{1-\alpha}}{N+M}\right)^{p-1} \asymp 1.$$

В то же время,

$$\left(\frac{1}{N+M}\sum_{k=1}^{N+M} y_k^{1-q}\right)\left(\frac{1}{N+M}\sum_{k=1}^{N+M} y_k\right)^{q-1} \asymp$$

$$\asymp \frac{N+M^{1+\alpha(q-1)}}{N+M}\left(\frac{N+M^{1-\alpha}}{N+M}\right)^{q-1} \asymp M^{\alpha(q-p)}.$$

Определив y_k с помощью вышеописанной конструкции на достаточно редкой последовательности интервалов, длины которых неограниченно возрастают, и доопределив единицей для остальных значений индекса, легко построить пример веса $\{y_k\}$ такого, что $\{y_k^{1-p}\}$ удовлетворяет условию (A_p), но $\{y_k^{1-q}\}$ не удовлетворяет (A_q) при $q > p$.

Следствие 4.7. *Пусть $E \in \mathcal{L}$, $a = 0$, последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (C) и $\sup_n \sum_k |z_n - z_k|^{-1} < \infty$. Если оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$, то он ограничен в $\mathcal{H}^q(E)$ при $1 < q < p$.*

Доказательство. По теореме 3.3 оператор $\mathcal{D}$ ограничен в $\mathcal{H}^p(E)$ тогда и только тогда, когда оператор A, заданный матрицей $a_{lk} = \frac{y_k}{y_l} \cdot \frac{1}{z_k - z_l}$, ограничен в $\ell^p(\{y_k\})$. Условие $\sup\limits_n \sum\limits_k |z_n - z_k|^{-1} < \infty$ обеспечивает ограниченность оператора A в $\ell^1(\{y_k\})$. Следовательно, оператор A ограничен и в $\ell^q(\{y_k\})$, $1 < q < p$, по теореме Рисса об интерполяции операторов.

Следствие 4.8. *Пусть $\Theta' \in L^\infty$, $\sum_k y_k < \infty$ и $\mu_p = \sum_k y_k^{1-p} \delta_{s_k}$. Если $K^p_\Theta \subset L^p(\mu_p)$, то $K^q_\Theta \subset L^q(\mu_q)$ для всех $q \in (1, p)$.*

Доказательство. Как показано в работе [11], $K^q_\Theta \subset K^p_\Theta$ при условии, что $\Theta' \in L^\infty$ и $q < p$. Включение $K^p_\Theta \subset L^p(\mu_p)$ означает, что $\{f(s_k)/y_k\} \in \ell^p(\{y_k\})$, $f \in K^p_\Theta$. Наконец, заметим, что $\ell^p(\{y_k\}) \subset \ell^q(\{y_k\})$, $q < p$, так как $\sum_k y_k < \infty$. Таким образом, если $f \in K^q_\Theta$, то $\{f(s_k)/y_k\} \in \ell^q(\{y_k\})$.

§ 5. Компактность оператора дифференцирования

Рассмотрим задачу о компактности оператора дифференцирования в пространствах $\mathcal{H}^p(E)$. Аналогичная задача для коинвариантных подпространств была решена Дьяконовым [12]. Обозначим через $C_0(\mathbb{R})$ класс функций, непрерывных на вещественной прямой и исчезающих в бесконечности. Оператор дифференцирования $D : K^p_\Theta \to L^p$, $1 < p < \infty$, компактен в том и только в том случае, когда $\Theta' \in C_0(\mathbb{R})$.

Теорема 5.1. *Пусть $E'/E \in C_0(\mathbb{R})$. Тогда оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ компактен в $\mathcal{H}^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Вспомним, что $|\Theta'_E(t)| = -2 \operatorname{Im} \frac{E'}{E}(t)$. Следовательно, $\Theta'_E \in C_0(\mathbb{R})$ и оператор дифференцирования $D : K^p_{\Theta_E} \to L^p$ компактен. Поскольку $\mathcal{H}^p(E) = E K^p_{\Theta_E}$ и

$$\frac{\mathcal{D}F}{E} = \left(\frac{F}{E}\right)' + \frac{E'}{E} \cdot \frac{F}{E},$$

достаточно проверить, что оператор умножения на E'/E компактен как оператор из $K^p_{\Theta_E}$ в L^p. Чтобы применить известный критерий относительной компактности семейства функций в $L^p(\mathbb{R})$, нам достаточно показать, что

$$\sup_{f \in K^p_{\Theta_E},\, \|f\|_p \leqslant 1} \int\limits_{|x|>A} \left|\frac{E'(x)}{E(x)}\right|^p |f(x)|^p \, dx \to 0, \qquad A \to \infty, \tag{17}$$

и

$$\sup_{f\in K^p_{\Theta_E},\, \|f\|_p\leqslant 1} \left\| \frac{E'}{E}(\cdot+h)f(\cdot+h) - \frac{E'}{E}f \right\|_p \to 0, \qquad h\to 0. \tag{18}$$

Условие (17) очевидно, поскольку $E'/E \in C_0(\mathbb{R})$, в то время как (18) вытекает из оценок

$$\left|\frac{E'}{E}(t+h) - \frac{E'}{E}(t)\right| \leqslant \sum_k \frac{|h|}{|(t-z_n)(t+h-z_n)|} \leqslant C|h|, \qquad t\in\mathbb{R},$$

и $\|f(\cdot+h)-f\|_p \leqslant |h|\|f'\|_p \leqslant C|h|\|f\|_p$, $f\in K^p_{\Theta_E}$. Мы воспользовались тем, что $\Theta'_E \in L^\infty$, и, следовательно, в пространстве $K^p_{\Theta_E}$ имеет место неравенство типа Бернштейна.

Замечание. Условие $E'/E\in C_0(\mathbb{R})$ означает, в частности, что в формуле (5) $a=0$ и $y_n\to\infty$ [12]. Мы покажем, что последнее предположение (а значит и условие $E'/E\in C_0(\mathbb{R})$) не является необходимым для компактности оператора $\mathcal{D}$ (в отличие от случая пространств K^p_Θ).

Если множество нулей функции E удовлетворяет условию Карлесона (C), то, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.3, мы получаем следующий критерий компактности.

Теорема 5.2. *Пусть $1<p<\infty$, $E\in\mathcal{P}_0$, $a=0$, а последовательность $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию (C). Следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор $\mathcal{D}$ компактен в $\mathcal{H}^p(E)$;*
2) $\lim\limits_{|k|\to\infty}\left|\frac{E'_k}{E_k}(\overline{z}_k)\right| = 0$, *и матрица (A_{lk}), где $A_{ll}=0$ и*

$$A_{lk} = \left(\frac{y_k}{y_l}\right)^{1-1/p}\frac{1}{z_l-z_k}, \qquad l\neq k,$$

задает компактный оператор в $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Следствие 5.3. *В условиях теоремы 5.2 оператор $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^2(E)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта $\mathcal{S}_2$ в том и только в том случае, когда $\left\{\frac{E'_k}{E_k}(\overline{z}_k)\right\}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ и*

$$\sum_k\sum_{l\neq k}\frac{y_k}{y_l}\frac{1}{|z_l-z_k|^2}<\infty.$$

В заключение приведем примеры пространств $\mathcal{H}^p(E)$, для которых выполнены условия теоремы 5.2 и следствия 5.3. При этом мы будем рассматривать целые функции E вида

$$E(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{\overline{z}_n}\right)$$

с нулями $\overline{z}_n$ такими, что $\sum_n |z_n|^{-1} < \infty$.

Примеры. 1. Пусть $z_n = n^\alpha + i$, $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha > 1$. Тогда (при $k > 1$)

$$\sum_{l \neq k} \frac{1}{|z_l - z_k|} = \sum_{l \neq k} \frac{1}{|k^\alpha - l^\alpha|} \leqslant C \frac{\ln k}{k^{\alpha-1}}.$$

Аналогично, $\left|\frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k)\right| \leqslant C k^{1-\alpha} \ln k$, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k)\right| = 0$. Таким образом, оператор $\mathcal{D}$ компактен в $\mathcal{H}^p(E)$. Оператор $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}^2(E)$ принадлежит классу $\mathcal{S}_2$, если (и только если) $\alpha > 3/2$.

2. Пусть $z_n = 2^n + i$. Тогда $\left|\frac{E_k'}{E_k}(\overline{z}_k)\right| \leqslant C k 2^{-k}$ и

$$\sum_{l \neq k} \frac{1}{|z_l - z_k|^2} \leqslant C k 2^{-2k}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{D}$, действующий в $\mathcal{H}^2(E)$, принадлежит классу $\mathcal{S}_2$. Нетрудно показать также, что $\mathcal{D}$ принадлежит всем идеалам Шаттена–фон Неймана $\mathcal{S}_r$, $r > 0$.

Вопрос. В настоящей работе исследованы пространства $\mathcal{H}^p(E)$ такие, что оператор дифференцирования ограничен как оператор из $\mathcal{H}^p(E)$ в $\mathcal{H}^p(E)$. Однако возможен несколько иной подход к неравенствам типа Бернштейна в пространствах $\mathcal{H}^p(E)$. Неравенство Левина можно интерпретировать следующим образом: для всякой целой функции E класса $\mathcal{P}_0$ оператор $\mathcal{D}$ ограничен как оператор из $\mathcal{H}^\infty(E)$ в $\mathcal{H}^\infty(E')$ (известно, что E' также принадлежит $\mathcal{P}_0$) и $\|\mathcal{D}\| = 1$. Возникает естественный вопрос: *верно ли, что $\mathcal{D}$ действует из $\mathcal{H}^p(E)$ в $\mathcal{H}^p(E')$ при $1 < p < \infty$, то есть*

$$\|F'/E'\|_p \leqslant C\|F/E\|_p, \qquad f \in \mathcal{H}^p(E).$$

Вследствие соотношения $\mathcal{H}^p(E) = EK^p_{\Theta_E}$, неравенство (19) равносильно весовому неравенству типа Бернштейна $\|f'w\|_p \leqslant C\|f\|_p$, $F \in K^p_{\Theta_E}$, где

$$w = |E'/E|^{-1} = |\varphi_E' + i\widetilde{\varphi_E'}|^{-1}.$$

Можно показать, что неравенство (19) выполнено для ряда конкретных примеров, однако ответ для общего случая автору неизвестен.

Литература

1. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М., Наука, (1969).
2. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* М., Гостехиздат, (1956).
3. А. Д. Баранов, *Дифференцирование в пространствах де Бранжа и теоремы вложения.* — Проблемы математического анализа, **19** (1999), 27–68.
4. А. Д. Баранов, *Неравенство Бернштейна в пространствах де Бранжа и теоремы вложения.* — Труды Санкт-Петербургского математического общества, **9** (2001), 23–53.
5. L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ) (1968).
6. Yu. I. Lyubarskii, K. Seip, *Weighted Paley–Wiener spaces.* — J. Amer. Math. Soc., **15**, 4 (2002), 979–1006.
7. J. Ortega-Cerda, K. Seip, *Fourier frames.* — Ann. of Math. (2), **155**, 3 (2002), 789–806.
8. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p.* М., Мир, (1984).
9. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* М., Наука, (1980).
10. Ю. А. Брудный, Е. А. Горин, *Изометрические представления и дифференциальные неравенства.* Ярославль, (1981).
11. К. М. Дьяконов, *Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **190** (1991), 81–100.
12. K. M. Dyakonov, *Differentiation in star-invariant subspaces I: Boundedness and compactness.* — J. Funct. Anal., **192**, 2 (2002), 364–386.
13. W. S. Cohn, *Carleson measures for functions orthogonal to invariant subspaces.* — Pacific J. Math., **103**, 2 (1982), 347–364.
14. W. S. Cohn, *Carleson measures and operators on star-invariant subspaces.* — J. Oper. Theory, **15**, 1 (1986), 181-202.
15. А. Л. Вольберг, С. Р. Треиль, *Теоремы вложения для инвариантных подпространств оператора обратного сдвига.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **149** (1986), 38–51.
16. А. Б. Александров, *Простое доказательство теоремы Вольберга-Треиля о вложении коинвариантных подпространств оператора сдвига.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **217** (1994), 16–25.
17. A. B. Aleksandrov, *On embedding theorems for coinvariant subspaces of the shift operator. I.* — Operator Theory: Advances and Applications, **113** (2000), 45–64.
18. А. Б. Александров, *О теоремах вложения для коинвариантных подпространств оператора сдвига. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **262** (1999), 5–48.
19. K. M. Dyakonov, *Embedding theorems for star-invariant subspaces generated by smooth inner functions.* — J. Funct. Anal., **157**, 2 (1998), 588–598.

20. А. Д. Баранов, *Весовые неравенства Бернштейна и теоремы вложения для модельных подпространств.* — Алгебра и Анализ, **15**, 5 (2003), 138–168.
21. F. Nazarov, A. Volberg, *The Bellman function, the two-weight Hilbert transform, and embeddings of the model spaces K_θ.* — J. Anal. Math., **87** (2002), 385–414.
22. W. S. Cohn, *Radial limits and star invariant subspaces of bounded mean oscillation.* — Amer. J. Math., **108** (1986), 719–749.
23. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for conjugate function and Hilbert transform.* — Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 227–251.
24. Yu. I. Lyubarskii, K. Seip, *Complete interpolation sequences for Paley–Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition.* — Rev. Mat. Iber., **13**, 2 (1997), 361–376.

Baranov A. D. On estimates of the L^p-norms of derivatives in spaces of entire functions.

In the present work, weighted L^p-norms of derivatives are studied in the spaces of entire functions $\mathcal{H}^p(E)$ generalizing the de Branges spaces. A description of the spaces $\mathcal{H}^p(E)$ such that the differentiation operator $\mathcal{D} : F \mapsto F'$ is bounded in $\mathcal{H}^p(E)$ is obtained in terms of the generating entire function E of the Hermite–Biehler class. It is shown that for a broad class of the spaces $\mathcal{H}^p(E)$ the boundedness criterion is given by the condition $E'/E \in L^\infty(\mathbb{R})$. In the general case a necessary and sufficient condition is found in terms of a certain embedding theorem for the space $\mathcal{H}^p(E)$; moreover, the boundedness of the operator $\mathcal{D}$ depends essentially on the exponential p. Also we obtain a number of conditions sufficient for the compactness of the differentiation operator in $\mathcal{H}^p(E)$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: antonbaranov@netscape.net

Поступило 17 октября 2003 г.