Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

О. М. Фоменко

ПОВЕДЕНИЕ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ В ТОЧКАХ $s=1$ И $s=\frac{1}{2}$

§1

Пусть $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$-параболических форм целого веса k и характера $\chi(\operatorname{mod} N)$; при четном k и тривиальном характере $\chi_0^{(N)}(\operatorname{mod} N)$ будем обозначать $S_k(\Gamma_0(N),\chi_0^{(N)})=S_k(\Gamma_0(N))$.

Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)e^{2\pi inz},\quad z\in H=\{z=x+iy:y>0\};$$

$$a_f(n)n^{-\frac{k-1}{2}}=\lambda_f(n);$$

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)n^{-s};\quad s=\sigma+it;$$

$$L_f\Big(s+\frac{k-1}{2}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)n^{-s}=L(s,f).$$

Свойства $L_f(s)$, как функции от s, хорошо известны и мы не будем их перечислять.

Пусть $k\geqslant 2$, $\chi=\chi_0^{(N)}$. Обозначим через $S_k(N)^+$ множество новых форм веса k и уровня N, принадлежащих пространству $S_k(\Gamma_0(N))$; пусть

$$S'_k(\leqslant Q)^+=\bigcup_{q\leqslant Q,\ q\ \text{простое}}S_k(q)^+.$$

Хорошо известно: если $f\in S_k(N)^+$, то $a_f(1)=1$, f – собственная функция всех операторов Гекке, причем $\lambda_f(n)$ – ее n-ое собственное число; по Делиню, $|\lambda_n(n)|\leqslant d(n)$, где $d(n)$ – количество

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 02-01-00087).

натуральных делителей n. На пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$ вводится метрика Петерсона $\langle f, g\rangle$; пусть

$$\omega_f = \frac{\Gamma(k-1)a_f(1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f, f\rangle}. \tag{1}$$

Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))^+$, тогда, как известно,

$$L(s, f) = \prod_p \left(1 - \alpha_f(p)p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \beta_f(p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

Рассматриваем новое эйлеровское произведение – симметрический квадрат L-функции Гекке $L(s, f)$:

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) = \prod_p \left(1 - \alpha_f^2(p)p^{-s}\right)^{-1}\left(1 - \alpha_f(p)\beta_f(p)p^{-s}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(1 - \beta_f^2(p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

Легко показать, что

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) = \zeta_N(2s)\sum_{n\geqslant 1}\lambda_f(n^2)n^{-s} = \zeta_N(2s)D_f(s),$$

где $\zeta_N(s)$ – дзета-функция Римана без локальных множителей для простых $p|N$.

Функция

$$N^s\pi^{-3s/2}\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s+k-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s+k}{2}\Big)L(s, \operatorname{sym}^2 f)$$

является целой и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа $\ll s \to 1-s \gg$, причем полоса $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$ является критической. По поводу симметрических квадратов L-функций Гекке см. [1].

Как доказано в [2],

$$L(1, \operatorname{sym}^2 f) \gg \frac{1}{\log N}, \tag{2}$$

если $f \in S_k(N)^+$ и k постоянно. Тогда, как следует из (2) и формулы

$$\omega_f = \frac{2\pi^2}{(k-1)NL(1, \operatorname{sym}^2 f)},$$

$$\omega_f \ll \frac{\log N}{N}. \tag{3}$$

Заметим, что можно непосредственно доказать оценку (при постоянном k)

$$L(1, \operatorname{sym}^2 f) \ll \log^3 N,$$

откуда следует

$$\frac{1}{N \log^3 N} \ll \omega_f .$$

Ниже будем использовать обозначение

$$\sum_f \cdots = \sum_{f \in S_k(N)^+} \cdots .$$

В настоящем параграфе при растущем уровне N и постоянном весе k будет выведена асимптотическая формула для суммы

$$\sum_f L^m(1, \operatorname{sym}^2 f), \tag{4}$$

где целое $m \geqslant 1$, и даны некоторые приложения. Впервые асимптотику для суммы

$$\sum_{D \leqslant N} L_D^m(1), \quad m \in N,$$

получил М. Б. Барбан [3] (см. также [4, 5]); здесь

$$L_D(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_D(n) n^{-1},$$

$\chi_D(n) = \left(\dfrac{-D}{n}\right)$, $D > 0$, – символ Кронекера. Он связал поведение суммы $\sum\limits_{D \leqslant N} L_D^m(1)$ с большим решетом Линника. Позднее остаточный член в результате Барбана был улучшен, но именно его доказательство является прототипом доказательств аналогичных результатов в случае автоморфных L-функций (см. [6], где рассмотрены симметрические квадраты L-функций собственных форм Гекке–Маасса, или доказательство теоремы 1 ниже). Наряду с идеями М. Б. Барбана, используем также соображения из [6].

Ниже, для простоты, рассмотрим частный случай: $k = 2$, $N = p$ (простое число). Известно, что

$$\dim S_2(\Gamma_0(p)) = \frac{1}{12} p + O(1). \tag{5}$$

Переходим к нахождению асимптотики суммы (4). Напомним соотношение мультипликативности:

$$\lambda_f(r)\lambda_f(s)=\sum_{d|(r,s)}\chi_0^{(N)}(d)\lambda_f(rs/d^2). \tag{6}$$

По (6), имеем при $\operatorname{Re}s>1$

$$D_f^m(s)=\sum_{n_1,\dots,n_m}\frac{\lambda_f(n_1^2)\cdots\lambda_f(n_m^2)}{(n_1\cdots n_m)^s}=\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k^s},$$

где

$$a_f^{(m)}(k)=\sum_{n_1\cdots n_m=k}\ \sum_{d_1|(n_1^2,n_2^2)}\ \sum_{d_2|((\frac{n_1n_2}{d_1})^2,n_3^2)}\cdots$$

$$\cdots\sum_{d_{m-1}|((\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{d_1\cdots d_{m-2}})^2,n_m^2)}\chi_0^{(N)}(d_1d_2\cdots d_{m-1})\lambda_f\Bigl(\Bigl(\frac{k}{d_1\cdots d_{m-1}}\Bigr)^2\Bigr).$$

Рассмотрим интеграл $(1<x\ll N)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}D_f^m(s+1)\Gamma(s)x^s\,ds.$$

Он равен

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x).$$

Сдвигая прямую интегрирования до $\operatorname{Re}s=\gamma$, $-1<\gamma<0$, мы проходим полюс подынтегральной функции в точке $s=0$ с вычетом $D_f^m(1)$ и получаем

$$D_f^m(1)=\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_f^{(m)}(k)}{k}\exp(-k/x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma)}D_f^m(s+1)\Gamma(s)x^s\,ds. \tag{7}$$

Обозначим

$$I_f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma)}D_f^m(s+1)\Gamma(s)x^s\,ds. \tag{8}$$

Умножим обе части (7) на ω_f и суммируем:

$$\sum_f \omega_f D_f^m(1) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \exp(-k/x) \sum_f \omega_f a_f^{(m)}(k) - \sum_f \omega_f I_f.$$

Пусть $\nu_k(N) = \dim S_k(\Gamma_0(N))$,

$$\{f_{j,k}(z)\}_{1\leqslant j\leqslant \nu_k(N)}$$

– ортонормированный базис пространства $S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,k}(n) e(nz), \quad j = 1, \dots, \nu_k(N), \quad e^{2\pi i z} = e(z).$$

Напомним формулу Петерсона

$$\frac{\Gamma(k-1)}{\{4\pi\sqrt{nm}\}^{k-1}} \sum_{1\leqslant j\leqslant \nu_k(N)} \overline{\psi}_{j,k}(n)\psi_{j,k}(m) =$$

$$= \delta_{nm} + 2\pi(i)^k \sum_{\substack{c>0\\ N|c}} \frac{S(n,m;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right),$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $S(n,m;c)$ означает сумму Клостермана

$$S(n,m;c) = \sum_{\substack{a (\bmod c)\\ (a,c)=1}} e\left(\frac{an+\overline{a}m}{c}\right),$$

$a\overline{a} \equiv 1 (\bmod c)$, $J_{k-1}(x)$ – функция Бесселя порядка $k-1$.

Из формулы Петерсона следует, что

$$\sum_f \omega_f \lambda_f(l) = \delta_{l1} + O\big(N^{-3/2}\big) l^{1/2}. \tag{9}$$

Пусть $x = N$. В силу (9), имеем

$$\sum_f \omega_f D_f^m(1) = B_m(N) - \sum_f \omega_f I_f + O\Big(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big),$$

где

$$B_m(N) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \exp(-k/N) \sum_{n_1\cdots n_m = k} \quad \sum_{d_1|(n_1^2, n_2^2)} \cdots$$

$$\cdots \sum_{d_{m-1}|((\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{d_1\cdots d_{m-2}})^2, n_m^2), d_1\cdots d_{m-1}=k} \chi_0^{(N)}(d_1\cdots d_{m-1}) =$$

$$= \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ (k,N)=1}} \frac{b_m(k)}{k}\exp(-k/N);$$

мы ввели обозначение

$$b_m(k) = \sum_{n_1\cdots n_m=k}\ \sum_{d_1|(n_1^2,n_2^2)} \cdots \sum_{d_{m-1}|((\frac{n_1\cdots n_{m-1}}{d_1\cdots d_{m-2}})^2, n_m^2), d_1\cdots d_{m-1}=k} 1. \tag{10}$$

Пусть $d_m(k) = \sum_{u_1\cdots u_m=k} 1$, тогда $d_2(k) = d(k)$, $b_m(k) \leqslant d_m^2(k)$. Имеем

$$B_m(N) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{b_m(k)}{k}\exp(-k/N) + O\big(N^{-1+\varepsilon}\big).$$

Как показано в [6],

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{b_m(k)}{k}\exp(-k/N) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{b_m(k)}{k} + O\big(N^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\big).$$

Положим

$$B_m = \sum_{k\geqslant 1} \frac{b_m(k)}{k}. \tag{11}$$

Тогда

$$B_m(N) = B_m + O\big(N^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\big).$$

Следовательно, имеем

$$\sum_f \omega_f D_f^m(1) = B_m - \sum_f \omega_f I_f + O\big(N^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}\big), \tag{12}$$

где константа B_m удовлетворяет неравенствам (см. [6])

$$1 < B_m \ll e^{cm\log\log m}, \tag{13}$$

c – абсолютная положительная константа.

Переходим к рассмотрению среднего члена в (12). Определим для $\sigma \geqslant 1/2$ величину

$$N(\sigma, H, \mathrm{sym}^2 f) = \#\{\rho = \beta + i\gamma | L(\rho, \mathrm{sym}^2 f) = 0,\quad \beta \geqslant \sigma,\quad |\gamma| \leqslant H\}.$$

Лемма 1. *Для* $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$, $Q \geqslant 2$ *и некоторой положительной константы* b *имеем*

$$\sum_{f \in S_2'(\leqslant Q)^+} N(\sigma, \log^3 Q, \operatorname{sym}^2 f) \ll_\varepsilon Q^{b(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < \eta < \frac{1}{2}$. *Если*

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) \quad (f \in S_2'(\leqslant Q)^+)$$

не имеет нулей в области

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta, \quad |t| \leqslant \log^3 Q,$$

то в области

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta/2, \quad |t| \leqslant \log^2 Q$$

для любого $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon.$$

Доказательство леммы 2 использует хорошо известные соображения (ср. доказательство леммы 2 [6]) и здесь не приводится.

Что касается доказательства леммы 1, то мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями. Мы следуем уже известным образцам (см. доказательство леммы 1 [6], а также аналогичное рассуждение в книге [7]). Отметим только два момента. Во-первых, нам необходимо неравенство большого решета для последовательности $\{\lambda_f(n^2)\}_{n \geqslant 1}$. Рассмотрим для $f \in S_2'(\leqslant Q)^+$ подъем $f \mapsto \pi_f^{(2)}$ Гелбарта–Жаке; здесь $\pi_f^{(2)}$ – "симметрический квадрат", некоторое каспидальное автоморфное представление группы $GL(3)$; см. [8].

Пусть $L^\infty(\pi_f^{(2)}, s)$ – конечная часть L-функции представления $\pi_f^{(2)}$; это ряд Дирихле, который записываем в виде

$$L^\infty(\pi_f^{(2)}, s) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f^{(2)}(n) n^{-s},$$

$$\lambda_f^{(2)}(n) = \sum_{d^2 | n} \chi_0^{(q')}(d) \lambda_f\Big(\frac{n^2}{d^4}\Big),$$

где q' – кондуктор представления $\pi_f^{(2)}$. Дьюк и Ковальский [9] доказали неравенство большого решета, частным случаем которого является следующий факт:

если $M = Q^\beta$ с $\beta > 10$, то

$$\sum_{f \in S_2'(\leqslant Q)^+} \left| \sum_{n \leqslant M} a_n \lambda_f^{(2)}(n) \right|^2 \ll M^{1+\varepsilon} \sum_{n \leqslant M} |a_n|^2$$

для любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}_{1 \leqslant n \leqslant M}$ и любого $\varepsilon > 0$.

Во-вторых, нам потребуется следующая оценка:

$$\sum_{f \in S_2'(\leqslant Q)^+} \int\limits_{|v| \leqslant 2z} \left| L\Big(\frac{1}{2} + iv, \operatorname{sym}^2 f\Big)^2 \right| dv \ll Q^{2+\varepsilon},$$

где $z = \log^3 Q$, $\varepsilon > 0$.

Она вытекает из результата Иванца и Мишеля [10]:

пусть четное $k \geqslant 2$, N бесквадратно, $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\sum_{f \in S_k(N)^+} \left| L(s, \operatorname{sym}^2 f) \right|^2 \ll |s|^8 N^{1+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$, причем $\ll$-константа зависит только от ε и k.

Рассмотрим множество форм $S_2'(\leqslant N)^+$ и разделим его на части:

$$S_2'(\leqslant N)^+ = J_1 \cup J_2.$$

К J_1 отнесем все формы f, у которых $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ не имеет нулей в области

$$1 > \sigma \geqslant 1 - \eta, \quad |t| \leqslant \log^3 N,$$

а к J_2 отнесем все формы f, у которых $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ имеет нули в этой области.

Если $f \in J_1$, то возьмем в (8) $\gamma = -\eta/2$. Тогда из леммы 2 следует, что

$$L(s, \operatorname{sym}^2 f) \ll_\varepsilon N^\varepsilon$$

для $\sigma \geqslant 1 - \eta/2$, $|t| \leqslant \log^2 N$, а для $\sigma \geqslant 1 - \eta/2$, $|t| \geqslant \log^2 N$, имеем

$$D_f(s) \ll (N|t|)^{c_1}$$

с некоторым $c_1 > 0$. Следовательно, по формуле Стирлинга, имеем

$$I_f \ll N^{\eta/20} x^{-\eta/2} + N^{-A} \tag{14}$$

для $f \in J_1$ и любого $A > 0$. Напомним, что

$$x = N.$$

Тогда, в силу (14), (5) и (3), имеем

$$\sum_{f \in J_1 \cap S_2(N)^+} \omega_f |I_f| \ll N^{-\frac{2}{5}\eta}.$$

Обратимся к случаю $f \in J_2$. Беря $\gamma = -\varepsilon$ в (8), мы заключаем, что

$$\sum_{f \in J_2} |I_f| \ll N^{1/20} |J_2|,$$

где

$$|J_2| = \#\{f \in S_2'(\leqslant N)^+, D_f(s) \quad \text{имеет нуль} \quad \text{в области} \quad \sigma \geqslant 1 - \eta,\, |t| \leqslant \log^3 N\}.$$

По лемме 1 и факторизации $L(s, \mathrm{sym}^2 f) = \zeta_N(2s) D_f(s)$, имеем $|J_2| \ll N^{1/5}$, если η достаточно мало. Поэтому

$$\sum_{f \in J_2} |I_f| \ll N^{1/4}. \tag{15}$$

Следовательно, в силу (15), (5) и (3), имеем

$$\sum_{f \in J_1 \cap S_2(N)^+} \omega_f |I_f| \ll N^{-3/4+\varepsilon}.$$

Собирая полученные результаты, имеем

$$\sum_f \omega_f D_f^m(1) = B_m + O(N^{-\alpha})$$

с некоторым $\alpha > 0$, откуда вытекает

$$\sum_f \omega_f L^m(1, \mathrm{sym}^2 f) = \zeta_N^m(2) B_m + O(N^{-\alpha}) = \zeta^m(2) B_m + O(N^{-\alpha}).$$

Поскольку (для веса 2)

$$\omega_f = \frac{2\pi^2}{N L(1, \mathrm{sym}^2 f)},$$

имеем следующий результат.

Теорема 1. *При целом $m \geqslant 1$ и $N = p \to \infty$*

$$\sum_{f \in S_2(N)^+} L^m(1, \operatorname{sym}^2 f) = \frac{1}{2\pi^2}\zeta^{m+1}(2)B_{m+1}N + O(N^{1-\alpha}),$$

где B_m – константа, определяемая в (10) и (11), $\alpha = \alpha(m) > 0$ – некоторая константа, $O(\cdots) = O_m(\cdots)$.

Так как справедливо соотношение (13), из теоремы 1 и теоремы моментов (см. [4], лемма 5.1 и лемма 5.7) следует

Теорема 2. *При $N = p \to \infty$ величина*

$$\frac{\#\{f | f \in S_2(N)^+, L(1, \operatorname{sym}^2 f) \leqslant x\}}{\#\{f | f \in S_2(N)^+\}}$$

сходится к функции распределения $F(x)$ в каждой точке непрерывности последней, причем соответствующая характеристическая функция имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k(2)B_{k+1}}{k!}(it)^k.$$

Замечание. Результаты теорем 1 и 2 легко переносятся на случай форм из пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, $N = p$, $k \geqslant 2$.

§2

Пусть $\Gamma = \Gamma_0(1) = SL(2, \mathbb{Z})$. Рассмотрим $S_k(\Gamma)$, пространство голоморфных Γ-параболических форм четного веса $k \geqslant 12$; $S_k(1)^+$ – множество нормализованных собственных форм Гекке, принадлежащих пространству $S_k(\Gamma)$; нормализация означает, что $a_f(1) = 1$ для любой формы $f \in S_k(1)^+$.

Сохраним обозначения §1 при $N = 1$. Пусть $f \in S_k(1)^+$, $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ – симметрический квадрат L-функции Гекке $L(s, f)$, определение ω_f см. в (1). Известно, что

$$\frac{1}{k \log^3 k} \ll \omega_f \ll \frac{\log k}{k} \quad (f \in S_k(1)^+), \tag{16}$$

причем оценка сверху доказана в [2], оценка снизу доказывается непосредственно.

Будем изучать поведение функции $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ в точке $s = 1/2$ при растущем весе k.

Теорема 3. *При* $k \to \infty$

$$\sum_{f \in S_k(1)^+} \omega_f L\Big(\frac{1}{2}, \operatorname{sym}^2 f\Big) = \log k + \frac{3}{2}\gamma + O\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big),$$

где $\gamma = 0,57721\ldots$ *– константа Эйлера.*

Следствие 1. *Для всех достаточно больших* k *существует форма* $f \in S_k(1)^+$ *такая, что*

$$L\Big(\frac{1}{2}, \operatorname{sym}^2 f\Big) \neq 0.$$

Доказательство теоремы 3 опирается на следующее тождество Цагира [11]

$$\sum_{f \in S_k(1)^+} \frac{L(s, \operatorname{sym}^2 f)}{\langle f, f\rangle} =$$

$$= c_k^{-1} \cdot \frac{(4\pi)^{s+k-1}}{\Gamma(s+k-1)} \Bigg(\sum_{t \in \mathbb{Z}} \Big(I_k(t^2-4, t; s) + I_k(t^2-4, -t; s)\Big) L(s, t^2-4) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k/2}\Gamma(s+k-1)\zeta(2s)}{2^{2s+k-3}\pi^{s-1}\Gamma(k)}\Bigg) \quad (2-k < \operatorname{Re} s < k-1), \qquad (17)$$

где

$$c_k = \frac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-3}(k-1)}$$

и для целого t и $\Delta = t^2 - 4$ в полосе $2 - k < \operatorname{Re} s < k - 1$

$$I_k(\Delta, t; s) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{k+s-2}}{(y^2 + ity - \frac{1}{4}\Delta)^{k-1/2}} dy, & \text{если } \ \Delta \neq 0; \\ e^{\operatorname{sign} t \cdot \frac{\pi i}{2}(s-k)} \sqrt{\pi}\, \dfrac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)}{\Gamma(k)}\, |t|^{s-k}, & \text{если } \ \Delta = 0. \end{cases}$$

Наконец,

$$L(s, \Delta) = \begin{cases} \zeta(2s-1), & \text{если } \ \Delta = 0; \\ L_D(s) \displaystyle\sum_{d|f} \mu(d) \Big(\frac{D}{d}\Big) \sigma_{1-2s}\Big(\frac{f}{d}\Big), & \text{если } \ \Delta \neq 0, \end{cases}$$

где при $\Delta \neq 0$ положим $\Delta = Df^2$, $f \in \mathbb{N}$, D – дискриминант поля $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, $L_D(s)$ – соответствующая L-функция Дирихле; $\sigma_\nu(m) = \sum\limits_{d|m} d^\nu$ $(d \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{C})$.

Выделим из суммы по t в (17) члены с $t = \pm 2$ и устремим $s \to \frac{1}{2}$. Имеем

$$\lim_{s\to\frac{1}{2}} c_k^{-1} \frac{(4\pi)^{s+k-1}}{\Gamma(s+k-1)} \Big\{ 2\big((I_k(0,2;s) + I_k(0,-2;s)\big)\zeta(2s-1) +$$
$$+ \frac{(-1)^{k/2}\Gamma(s+k-1)\zeta(2s)}{2^{2s+k-3}\pi^{s-1}\Gamma(k)} \Big\} =$$
$$= \lim_{s\to\frac{1}{2}} c_k^{-1} \frac{(4\pi)^{s+k-1}}{\Gamma(s+k-1)} \Big\{ 2\sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)}{\Gamma(k)} 2^{s-k} \zeta(2s-1) \cdot$$
$$\cdot \Big(e^{\frac{\pi i}{2}(s-k)} + e^{-\frac{\pi i}{2}(s-k)} \Big) + \frac{(-1)^{k/2}\Gamma(s+k-1)\zeta(2s)}{2^{2s+k-3}\pi^{s-1}\Gamma(k)} \Big\} = I.$$

Имеем

$$\Gamma\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\Gamma(k-s) = \Gamma\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{s-1/2} - \Gamma\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\gamma - \Gamma'\Big(k-\frac{1}{2}\Big) + \cdots,$$

$$\Gamma(s+k-1)\zeta(2s) = \Gamma\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2s-1} + \frac{1}{2}\Gamma'\Big(k-\frac{1}{2}\Big) + \Gamma\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\gamma + \cdots,$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}(\frac{1}{2}-k)} + e^{-\frac{\pi i}{2}(\frac{1}{2}-k)} = (-1)^{k/2}\sqrt{2}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\Gamma'\big(k-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(k-\frac{1}{2}\big)} = \log\Big(k-\frac{1}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{k}\Big) \quad (k\to\infty). \tag{18}$$

Следовательно,

$$I = \frac{(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}\Big\{\log k + \frac{3}{2}\gamma + O\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big\}.$$

Известно, что для любого $t \in \mathbb{Z}$, $t \neq \pm 2$,

$$L\Big(\frac{1}{2}, t^2-4\Big) \ll_\varepsilon \big|t^2-4\big|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Справедливы неравенства (см. [12])

$$I_k\Big(t^2-4, t; \frac{1}{2}\Big) + I_k\Big(t^2-4, -t; \frac{1}{2}\Big)$$

$$\ll \begin{cases} (t^2-4)^{-1/4}\Big(\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{t+\sqrt{t^2-4}}\Big)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{\Gamma(k-1/2)^2}{2^k\Gamma(k)^2}, & \text{если} \quad t\geqslant 3;\\ \dfrac{\Gamma(k-1/2)^2}{2^k\Gamma(k)^2}, & \text{если} \quad t=1, \end{cases}$$

с абсолютными $\ll$-константами. Наконец [12],

$$I_k\Big(-4,0;\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(k/2-1/4)^2}{\Gamma(k)}.$$

Подставляя полученные выше результаты в (17) при $s\to\frac{1}{2}$ и используя формулу удвоения Лежандра

$$2^{k-3/2}\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{4}\Big)=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(k/2+1/4)},$$

имеем оценку

$$\sum_{f\in S_k(1)^+}\frac{L(1/2,\mathrm{sym}^2 f)}{\langle f,f\rangle}-I\ll\frac{(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}\,\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Теорема 3 доказана.

§3

Сохраним прежние обозначения. Пусть $f\in S_k(1)^+$, $g\in S_l(1)^+$, где k и l – четные веса $\geqslant 12$; $\lambda_f(n)=a_f(n)/n^{(k-1)/2}$, $\lambda_f(p)=\alpha_f(p)+\beta_f(p)$, $\alpha_f(p)\beta_f(p)=1$; напомним, что, по Делиню,

$$|\alpha_f(p)|=|\beta_f(p)|=1.$$

L-функция Ранкина–Сельберга $L(s,f\otimes g)$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} L(s,f\otimes g)&=\zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}=\\ &=\prod\big(1-\alpha_f(p)\alpha_g(p)p^{-s}\big)^{-1}\big(1-\beta_f(p)\beta_g(p)p^{-s}\big)^{-1}\times\\ &\quad\times\big(1-\alpha_f(p)\beta_g(p)p^{-s}\big)^{-1}\big(1-\beta_f(p)\alpha_g(p)p^{-s}\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Функция $L(s,f\otimes g)$ является целой (исключая простой полюс в точке $s=1$, если $f=g$) и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda(1-s,f\otimes g)=\Lambda(s,f\otimes g),$$

где

$$\Lambda(s, f \otimes g) = (2\pi)^{-2s}\Gamma\Big(s + \frac{k+l}{2} - 1\Big)\Gamma\Big(s + \frac{k-l}{2}\Big)L(s, f \otimes g).$$

Будем изучать поведение функции $\Lambda(s, f \otimes g)$ в точке $s = 1/2$ при растущем весе k.

Теорема 4. *При* $k \to \infty$

$$\sum_{f \in S_k(1)^+} \omega_f L\Big(\frac{1}{2}, f \otimes g\Big) = \log k + 2\gamma + O\Big(\frac{1}{k}\Big),$$

где γ *– константа Эйлера.*

В качестве непосредственного следствия можно получить аналог следствия 1. Другое доказательство этого аналога дал Мизумото [13]. Однако мы можем получить и более сильный результат. Недавно Сарнак [14] доказал, что для достаточно больших K и M с условием

$$K^{151/165} \leqslant M \leqslant K^{1-\varepsilon}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{K-M \leqslant k \leqslant K+M} \sum_{f \in S_k(1)^+} \Big|L\Big(\frac{1}{2}, f \otimes g\Big)\Big|^2 \ll_{\varepsilon, g} (MK)^{1+\varepsilon} \tag{20}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Соединяя теорему 4, (20) и (16) с помощью неравенства Коши, получаем следующий результат.

Теорема 5. *При* $K^{151/165} \leqslant M \leqslant K^{1-\varepsilon}$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{K-M \leqslant k \leqslant K+M} \sum_{f \in S_k(1)^+, L(\frac{1}{2}, f \otimes g) \neq 0} 1 \gg_{\varepsilon', \varepsilon, g} (KM)^{1-\varepsilon'}$$

для любых $\varepsilon' > \varepsilon > 0$.

Для доказательства теоремы 4 нам необходима формула суммирования Пуассона, ассоциированная с голоморфной параболической формой (см. [15, 16]).

Обозначим через $M_{\alpha,\beta}$ множество функций $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

1) φ представима интегралом типа Меллина

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi(x) x^{-2s} ds \quad (\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta),$$

где $\Phi(s)$ регулярна в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta$;

2) для каждой $\varphi \in M_{\alpha,\beta}$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(\sigma + it)|}{1 + (1 + |t|)^{1-2\sigma}} dt$$

равномерно ограничен по $\sigma \in [\alpha, \beta]$.

Лемма 3. *Пусть форма $f \in S_k(\Gamma)$ с четным $k \geqslant 12$ и $a_f(n) = \lambda_f(n) \cdot n^{\frac{k-1}{2}}$, $n \geqslant 1$, – ее коэффициенты Фурье. Тогда для $\varphi \in M_{\alpha,\beta}$ с $\alpha < 0$ и $\beta > 1$, целого $c \geqslant 1$ и произвольного целого N справедливо тождество*

$$\frac{4\pi}{c} \sum_{n \geqslant 1} n^{-k/2+1/2} a_f(n) S(n, N; c) \varphi\Big(\frac{4\pi}{c}\sqrt{n}\Big) =$$

$$= i^{-k} \sum_{n \geqslant 1} n^{-k/2+1/2} a_f(n) S(n - N, 0; c) \int\limits_0^{\infty} J_{k-1}(x\sqrt{n}) \varphi(x) x dx.$$

Переходя к доказательству теоремы 4, приведем частный случай формулы Петерсона для $S_k(\Gamma)$:

$$\frac{2(-1)^{k/2}\Gamma(k-1)}{(4\pi)^k} \sum_{f \in S_k(1)^+} \frac{1}{\langle f, f \rangle} \lambda_f(n) =$$

$$= \frac{(-1)^{k/2}\delta_{n1}}{2\pi} + \sum_{c > 0} \frac{1}{c} S(n, 1; c) J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\Big). \tag{21}$$

Положим

$$Z_{k/2}(s) = 2(-1)^{k/2} \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^k} \sum_{f \in S_k(1)^+} \frac{1}{\langle f, f \rangle} L(s, f \otimes g). \tag{22}$$

В силу (19) и (21), имеем

$$Z_{k/2}(s) = \frac{(-1)^{k/2}\zeta(2s)}{2\pi} +$$

$$+\zeta(2s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_g(n)}{n^s}\sum_{c>0}\frac{1}{c}\,S(n,1;c)\,J_{k-1}\Big(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\Big), \tag{23}$$

причем пока предполагается, что $\operatorname{Re} s > \frac{5}{4}$. Применим к правой части (23) лемму 3 с $N = 1$. Имеем

$$Z_{k/2}(s) = \frac{(-1)^{k/2}\zeta(2s)}{2\pi} + \frac{\zeta(2s)}{4\pi}\sum_{c>0}\frac{4\pi}{c}\sum_{n\geqslant 1}\lambda_g(n)\times$$

$$\times S(n,1;c)\,\frac{J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c})}{(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c})^{2s}}\Big(\frac{4\pi}{c}\Big)^{2s} =$$

$$= \frac{(-1)^{k/2}\zeta(2s)}{2\pi} + \frac{\zeta(2s)}{4\pi}\sum_{c>0}\Big(\frac{4\pi}{c}\Big)^{2s}(-1)^{k/2}\times$$

$$\times\sum_{n\geqslant 1}\lambda_g(n)\Big\{S(n-1,0;c)\int\limits_0^\infty J_{k-1}(x\sqrt{n})\frac{J_{k-1}(x)}{x^{2s}}x\,dx\Big\} =$$

$$= \frac{(-1)^{k/2}\zeta(2s)}{2\pi} + \frac{\zeta(2s)}{4\pi}\sum_{c>0}\Big(\frac{4\pi}{c}\Big)^{2s}(-1)^{k/2}\times$$

$$\times S(0,0;c)\int\limits_0^\infty J_{k-1}(x)J_{k-1}(x)\,x^{-2s+1}dx+$$

$$+\frac{\zeta(2s)}{4\pi}\sum_{c>0}\Big(\frac{4\pi}{c}\Big)^{2s}(-1)^{k/2}\times$$

$$\times\sum_{n\geqslant 2}\lambda_g(n)\Big\{S(n-1,0;c)\int\limits_0^\infty J_{k-1}(x)J_{k-1}(x\sqrt{n})x^{-2s+1}dx\Big\} =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3.$$

Хорошо известно, что

$$\zeta(2s)\sum_{c\geqslant 1}\frac{1}{c^{2s}}S(0,m;c) = \begin{cases}\sigma_{1-2s}(m), & \text{если} \quad m\neq 0;\\ \zeta(2s-1), & \text{если} \quad m = 0.\end{cases} \tag{24}$$

Нам потребуется также следующая формула ([17], т. 2, с. 62, формула (30)):

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(at)t^{-\rho}dt = \frac{(\frac{a}{2})^{\rho-1}\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{\nu+\mu+1-\rho}{2})}{2\Gamma(\frac{1+\nu-\mu+\rho}{2})\Gamma(\frac{1+\nu+\mu+\rho}{2})\Gamma(\frac{1+\mu-\nu+\rho}{2})}, \quad (25)$$

если $\mathrm{Re}\,(\nu+\mu+1) > \mathrm{Re}\,\rho > 0$, $a > 0$. Вычисляя S_2 с помощью (24) и (25), получаем

$$\lim_{s\to 1/2}(S_1+S_2) = (-1)^{k/2}\lim_{s\to 1/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2s-1}+\gamma+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{2s-1}-\gamma+\cdots\right)\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left(1+\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{\Gamma'(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right)+\cdots\right)\right)\right\} =$$

$$= (-1)^{k/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\,\frac{\Gamma'(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}+\frac{1}{\pi}\gamma\right\}. \quad (26)$$

Переходим к оценке суммы S_3. Сделанные ниже преобразования обосновать довольно легко и мы не будем этим заниматься. Вычислим интеграл

$$J = \int_0^\infty J_{2k-1}(x)\,J_{2k-1}(x\sqrt{n})x^{-2s+1}\,dx$$

и затем применим формулу (24). Для вычисления J используем формулу ([17], т. 2, с. 61, формула (29)):

$$2^\rho b^{\mu-\rho+1}\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\rho-\mu}{2}\right)\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(bt)t^{-\rho}\,dt =$$

$$= a^\mu\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2},\frac{1+\mu-\nu-\rho}{2};\mu+1;\frac{a^2}{b^2}\right),$$

если $\mathrm{Re}(\nu+\mu-\rho+1) > 0$, $\mathrm{Re}\,\rho > -1$, $0 < a < b$.

Здесь

$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$$

– гипергеометрический ряд Гаусса. Имеем

$$J = 2^{-2s+1}\,n^{-\frac{k}{2}+s-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\Gamma(k)}\,\frac{1}{\Gamma(s)}\,\Gamma(k-s)F(k-s,s;k;1/n),$$

откуда следует, что

$$\lim_{s\to 1/2} J \ll n^{-k/2}\,\frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(k)}F(k-1/2,1/2;k;1/n).$$

Известна формула ([17], т. 1, с. 123, формула (7)):

$$F(a,b;c;z)=\frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^{2b-1}(\cos t)^{2c-2b-1}}{(1-z\sin^2 t)^a}dt\ (\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0),$$

в силу которой

$$F(k-1/2,1/2;k;1/n)=F(1/2,k-1/2;k;1/n)\ll\sqrt{k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{s\to 1/2} J \ll n^{-k/2}.$$

Далее,

$$\lim_{s\to 1/2}\zeta(2s)\sum_{c\geqslant 1}\frac{1}{c^{2s}}S(n-1,0;c)=\lim_{s\to 1/2}\sigma_{1-2s}(n-1)=d(n-1).$$

Имеем теперь

$$\lim_{s\to 1/2} S_3 \ll \sum_{n\geqslant 2} d(n)d(n-1)n^{-k/2}\ll 2^{-k/4}. \tag{27}$$

Собирая (18), (22), (26) и (27), доказываем теорему.

Литература

1. G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series,* Proc. London Math. Soc. **31**, No. 1 (1975), 79–98.
2. J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero (with an appendix by D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, An effective zero free region),* Ann. of Math. **140** (1994), 161–181.
3. М. Б. Барбан, *"Большое решето" Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратичного поля,* Изв. АН СССР, сер. мат. **26**, No. 4 (1962), 573–580.
4. М. Б. Барбан, *Метод "большого решета" и его применения в теории чисел,* Успехи мат. наук **21**, No. 1 (1966), 51–102.

5. М. Б. Барбан, Г. Гордовер, *О моментах числа классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя,* Докл. АН СССР **167**, No. 2 (1966), 267–269.
6. W. Luo, *Values of symmetric square L-functions at* 1*,* J. reine angew. Math. **506** (1999), 215–235.
7. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел.* М., 1974.
8. S. Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* $GL(2)$ *and* $GL(3)$*,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **4**(11) (1978), 471–552.
9. W. Duke, E. Kowalski, *A problem of Linnik for elliptic curves and mean-value estimates for automorphic representations,* Invent. Math. **139** (2000), 1–39.
10. H. Iwaniec and P. Michel, *The second moment of the symmetric square L-functions,* Ann. Acad. Scient. Fenn. Math. **26** (2001), 465–482.
11. D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields,* In: Modular Functions of One Variable, VI (eds. J.-P. Serre and D. Zagier), pp. 105–169, LNM No. 627, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
12. W. Kohnen and J. Sengupta, *On the average of central values of symmetric square L-functions in weight aspect,* Nagoya Math. J. **167** (2002), 95–100.
13. S. Mizumoto, *Certain L-functions at* $s = 1/2$*,* Acta Arithm. **88**, No. 1 (1999), 51–66.
14. P. Sarnak, *Estimates for Rankin–Selberg L-functions and quantum unique ergodicity,* J. Funct. Analysis **184** (2001), 419–453.
15. Н. В. Кузнецов, *Новый класс тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм,* Acta Arithm. **27** (1975), 505–519.
16. Н. В. Кузнецов, *Автоморфные функции Мааса модулярной группы и их приложения,* Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Хабаровск, 1980.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1, М., 1973; Т. 2, М., 1974.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 19 сентября 2003 г.