Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Н. В. Проскурин

ОБ ОБЩИХ СУММАХ КЛОСТЕРМАНА

Введение

В препринте автора [1] была выведена формула, обобщающая известную формулу суммирования для сумм Клостермана, принадлежащая Н. В. Кузнецову [2]. Препринт [1] известен специалистам, но журнальной публикации в свое время не было сделано. Между тем, очевидно, интерес к формуле суммирования Кузнецова и к ее обобщениям не ослабевает. В настоящей публикации воспроизведено содержание препринта [1] (без какихлибо изменений или дополнений). Суммы Клостермана возникают в разложениях Фурье рядов Пуанкаре целых четных весов для группы $SL_2(\mathbb{Z})$. В разложениях Фурье рядов Пуанкаре любого веса k для общих дискретных групп $G \subset SL_2(\mathbb{R})$ возникают аналогичные суммы, см. Петерсон [3, 4]; следуя А. Сельбергу [5], мы называем их общими суммами Клостермана. Доказательство формулы для таких общих сумм строится по той же схеме, что и в [2]. Независимо от Н. В. Кузнецова, Брюггеман [6] вывел формулу, которая может быть преобразована в формулу суммирования.

Будем предполагать, что $G \subset SL_2(\mathbb{R})$ – фуксова группа первого рода, площадь ее фундаментальной области $\mathcal{D}$ конечна,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G. \tag{1}$$

Относительно веса k предполагается, что

$$k \in [0, 2). \tag{2}$$

Система мультипликаторов v произвольна (см. [4]).

Н. В. Кузнецов и Брюггеман рассматривали группы $G = SL_2(\mathbb{Z})$, $k = 0$, $v = 1$. Можно рассмотреть любое $k \in \mathbb{R}$, но в

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00087.

этом вряд ли есть необходимость, так как общие суммы Клостермана для k и $k+2l$, $l \in \mathbb{Z}$, одинаковы. Если бы группы G не имела параболических вершин, то для нее не существовало бы рядов Пуанкаре, значит, и суммам Клостермана неоткуда было бы появиться. Поэтому мы должны были предположить, что G имеет хотя бы одну параболическую вершину, скажем, α. Тогда можно подобрать $\Omega \in SL_2(\mathbb{R})$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Omega^{-1} G \Omega, \quad \Omega : \infty \mapsto \alpha.$$

Общие суммы Клостермана, соответствующие рядам Пуанкаре для G, α и общие суммы Клостермана, соответствующие рядам Пуанкаре для $\Omega^{-1}G\Omega, \infty$ совпадают. Очевидным образом связаны между собой и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами в пространствах, соответствующих G и $\Omega^{-1}G\Omega$. Поэтому, предположив в (1), что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G,$$

мы не ограничиваем общности. А без этого предположения формулы были бы более громоздкими.

Эта работа была проделана по инициативе А. И. Виноградова и Л. А. Тахтаджяна (интересовавшихся случаем полуцелого веса). Я благодарен им за проявленное внимание. Я также благодарен А. Б. Венкову и Н. В. Кузнецову за полезные консультации.

Обозначения. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначают, соответственно, кольцо целых рациональных, поле рациональных, поле вещественных, поле комплексных чисел. $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ – вещественная и мнимая части числа $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ – число, комплексно сопряженное с z. $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость.

$\delta_{ab} = 1$, если $a = b$, и $= 0$, если $a \neq b$.

(a, b) – открытый промежуток в $\mathbb{R}$ с концами в точках a, b. Если в обозначениях этого промежутка левая скобка (соответственно, правая) заменена на [(соответственно, на]), это означает, что к нему добавлена точка a (соответственно, b). J_ν, K_ν, I_ν – стандартные обозначения для функций Бесселя, W_{ν_1,ν_2} – функции Уиттекера [7, 8]. Γ – гамма-функция Эйлера. Для $x \in \mathbb{R}$,

$\operatorname{sign} x = 1$, если $x > 0$, $= -1$, если $x < 0$, $= 0$, если $x = 0$. Для $z \in \mathbb{C}$ и

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),$$

пусть $j(g, z) = cz + d$. Для $\nu, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, полагаем

$$z^\nu = e^{\nu(\log|z| + i \arg z)}, \quad -\pi < \arg z \leqslant \pi, \quad \log|z| \in \mathbb{R}.$$

Для k из (2) положим

$$\sigma_k(g_1, g_2) = j(g_2, z)^k j(g_1, g_2 z)^k j(g_1 g_2, z)^{-k}, \tag{3}$$

g_1, $g_2 \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in H$ (правая часть не зависит от z). Пусть $v : G \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad |v(g)| = 1, \\ &\text{(ii)} \quad v(g_1 g_2) = \sigma_k(g_1, g_2)\, v(g_1)\, v(g_2), \\ &\text{(iii)} \quad v\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = e^{-\pi i k} \end{aligned} \tag{4}$$

для всех g, g_1, $g_2 \in G$. (v называют системой мультипликаторов веса k для G [9]).

Через $L^2(G \setminus H)$ будет обозначаться гильбертово пространство измеримых комплексных функций на H, удовлетворяющих условиям:

$$f(gz) = v(g)\, e^{ik \arg j(g,z)} f(z), \tag{5}$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} < \infty, \quad z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad g \in G \tag{6}$$

Скалярное произведение функций f_1, f_2 определяется, согласно Петерсону, равенством

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{\mathcal{D}} f_1(z) \overline{f_2(z)}\, \frac{dx\,dy}{y^2}, \quad z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{7}$$

($\mathcal{D}$ – фундаментальная область группу G). Для параболической вершины α группы G

$$G_\alpha = \{ g \in G \,|\, g\alpha = \alpha \}$$

– ее стабилизатор в G. Пусть Ω_α таково, что

$$\Omega_\alpha^{-1} G_\alpha \Omega_\alpha = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \Omega_\alpha : \infty \mapsto \alpha.$$

Определим число $\varkappa_\alpha$ условием

$$v\Big(\Omega_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega_\alpha^{-1} \Big) = e^{-2\pi i \varkappa_\alpha}, \quad 0 \leqslant \varkappa_\alpha < 1 \tag{8}$$

Параболическая вершина α называется существенной для v, если $\varkappa_\alpha = 0$. Будем, для краткости, писать $\varkappa$ вместо $\varkappa_\infty$.

Общие суммы Клостермана имеют вид

$$S_c(m,n) = \sum_d \overline{v\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big)}\, e^{2\pi i \{(m-\varkappa)a + (n-\varkappa)d\}/c} \tag{9}$$

Здесь суммирование производится по всем d, $0 \leqslant d < c$, для которых найдутся a, b такие, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

(От выбора a, b слагаемые в (9) не зависят.)

Об употреблении $\ll, O$: постоянные в этих символах могут зависеть от G, k, v, и об этом не упоминается всякий раз. Если же допускается зависимость от каких-либо других параметров, скажем α, β, γ, то пишем так: $\underset{\alpha,\beta,\gamma}{\ll}$, $O_{\alpha,\beta,\gamma}$.

§1. Ряды Эйзенштейна–Мааса и ряды Пуанкаре

Для параболической вершины α, существенной для v,

$$E_\alpha(z,s) = \sum_{g \in G_\alpha \backslash G} \overline{v(g)\, \sigma_k(\Omega_\alpha^{-1}, g)}\, (\operatorname{Im} \Omega_\alpha^{-1} g z)^s e^{-ik \arg j(\Omega_\alpha^{-1} g, z)} \tag{10}$$

– ряд Эйзенштейна–Мааса [10]. Вещественно аналитические ряды Пуанкаре для вершины ∞ имеют вид

$$\mathcal{U}_m(z,s) = \sum_{g \in G_\infty \backslash G} \overline{v(g)} (\operatorname{Im} g z)^s e^{2\pi i (m-\varkappa) g z - ik \arg j(g,z)}, \tag{11}$$

m – целое положительное число.

Ряды, которыми определены функции E_α и $\mathcal{U}_m$, сходятся абсолютно и равномерно на компактной части $\mathcal{D}$ при любом s из полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Как функции s, E_α и $\mathcal{U}_m$ регулярны в этой полуплоскости. Ряды Эйзенштейна–Мааса продолжаются мероморфно на всю s-плоскость. E_α и $\mathcal{U}_m$, как функции z, автоморфны u веса k, т.е. удовлетворяют условию (5). Разложение Фурье ряда Эйзенштейна–Мааса:

$$E_\alpha(x+iy,s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{\alpha l}(y,s)\, e^{2\pi i(l-\varkappa)x}, \quad x,y \in \mathbb{R},\ \ y>0, \tag{12}$$

где

$$a_{\alpha 0}(y,s) = \delta_{\alpha\infty} y^s + \frac{\delta_{\varkappa 0}\,(4y)^{1-s}\Gamma(2s-1)}{e^{\pi ik/2}\Gamma(s+\frac{k}{2})\Gamma(s-\frac{k}{2})}\varphi_{\alpha 0}(s),$$

$$a_{\alpha l}(y,s) = |l-\varkappa|^{s-1}\frac{\pi^s W_{\frac{k}{2}\operatorname{sign}(l-\varkappa),\frac{1}{2}-s}(4\pi|l-\varkappa|y)}{e^{\pi ik/2}\Gamma(s+\frac{k}{2}\operatorname{sign}(l-\varkappa))}\varphi_{\alpha l}(s), \tag{13}$$

для $l \neq 0$.

$$\varphi_{\alpha l}(s) = \sum_{c>0}\frac{\psi_{\alpha l}(c)}{c^{2s}} \tag{14}$$

$$\psi_{\alpha l}(c) = \sum_{\substack{0\leqslant d<c\\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Omega_\alpha^{-1}G}} \overline{v\Big(\Omega_\alpha\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\Big)}\;\overline{\sigma_k\Big(\Omega_\alpha^{-1},\Omega_\alpha\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\Big)}\,e^{2\pi i(l-\varkappa)d/c}$$

Разложение Фурье ряда Пуанкаре:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_m(x+iy),s) &= y^s e^{2\pi i(m-\varkappa)z}\\ &+ y^s\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{c>0}\frac{S_c(m,l)}{c^{2s}}B(c,m,l,y,s)\Big\}e^{2\pi i(l-\varkappa)x},\end{aligned} \tag{15}$$

$$B(c,m,l,y,s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i(m-\varkappa)}{c^2(\theta+iy)}-ik\arg(\theta+iy)-2\pi i(l-\varkappa)\theta}\,\frac{d\theta}{(\theta^2+y^2)^s}\,,$$

$$x,y\in\mathbb{R},\quad y>0 \tag{16}$$

Способ получения таких разложений хорошо известен, поэтому мы опускаем вычисления. При выводе (12), (15) предполагается, что $\operatorname{Re} s > 1$. Однако (12) имеет место на всей s-плоскости: вместе с рядами Эйзенштейна–Мааса мероморфно продолжаются на всю s-плоскость и ряды (14). То же можно сказать и о (15), но нам нет надобности знать это. Для (16) имеет место оценка

$$B(c,m,l,y,s) \underset{\eta_1,\eta_2}{\ll} y^{1-2\operatorname{Re} s} e^{-\pi|l-\varkappa|y}, \tag{17}$$

$\operatorname{Re} s < 1/2 + \eta_1$, $|\operatorname{Im} s| < \eta_2$, $\eta_1, \eta_2 > 0$, которая легко получается, если сдвинуть в (16) контур интегрирования с вещественной оси на прямую $\operatorname{Im}\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(l-\varkappa)y$ $\left(e^{-ik\arg(\theta+iy)} = (\theta-iy)^{\frac{k}{2}}(\theta+iy)^{-\frac{k}{2}}\right)$. Далее, для любой параболической вершины β

$$E_\alpha(\Omega_\beta(x+iy),s) \underset{s}{\ll} y^{1/2}, \quad \operatorname{Re} s = 1/2, \quad y\to\infty, \tag{18}$$

$$\mathcal{U}_m(\Omega_\beta(x+iy),s) \underset{\eta_1,\eta_2,m}{\ll} y^{1-\operatorname{Re} s}, \quad \operatorname{Re} s > 1+\eta_1,\ |\operatorname{Im} s| < \eta_2, \tag{19}$$

$\eta_1, \eta_2 > 0$, $y \to \infty$. Эти оценки для $\beta = \infty$ следуют из (12), (13) и (15), (17). Для произвольной вершины β они получаются из разложений Фурье E_α и $\mathcal{U}_m$ в окрестности β. Эти разложения в существенном такие же как (12), (15) и мы их не приводим.

Если $\operatorname{Re} s > 1$, то

$$\mathcal{U}_m(\cdot,s) \in L^2(G\setminus H). \tag{20}$$

Это следует из (19).

§2. Первая формула для скалярного произведения

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{Re} s_1$, $\operatorname{Re} s_2 > 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U}_m(\cdot,s_1), \mathcal{U}_n(\cdot,\bar s_2)\rangle &= \delta_{mn}\frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{\{2\pi(m+n-2\varkappa)\}^{s_1+s_2-1}}\\ &- i\,2^{3-s_1-s_2}\left(\frac{m-\varkappa}{n-\varkappa}\right)^{(s_2-s_1)/2} e^{-\pi ik/2}\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{s_1+s_2}}\\ &\times\int_L K_{s_1-s_2}\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}q\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)^{s_1+s_2-2} q^{k-1}dq.\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь L – полуокружность $|q|=1$, $\operatorname{Re} q>0$, интегрирование производится от $-i$ до i.

Доказательство. Заменим в левой части (21) (см. (7)) $\mathcal{U}_n(\cdot,\bar{s}_2)$ определяющим эту функцию рядом (11). Скалярное произведение окажется равным

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{U}_m(z,s_1)\overline{\sum_{g\in G_\infty\backslash G}\overline{v(g)}(\operatorname{Im} gz)^{\bar{s}_2}e^{2\pi i(n-\varkappa)gz-ik\arg j(g,z)}}\,\frac{dx\,dy}{y^2}. \qquad (22)$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования, а затем замена переменных $z\mapsto g^{-1}z$ превращают (22) в

$$\int\limits_{[0,1]\times(0,\infty)} \mathcal{U}_m(z,s_1)y^{s_2}\,\overline{e^{2\pi i(n-\varkappa)z}}\,\frac{dx\,dy}{y^2} \qquad (23)$$

Интеграл (23) сходится абсолютно (в силу (19), $\mathcal{U}_m(\cdot,s_1)$ ограничена на $\mathcal{D}$, значит, и на H). Абсолютная сходимость интеграла (23) обосновывает возможность изменения порядка суммирования и интегрирования в (22) и, далее, позволяет рассмотреть (23) как повторный интеграл, который можно вычислить, подставив вместо $\mathcal{U}_m(z,s_1)$ разложение Фурье (15). Получается, что интеграл (23)

$$\begin{aligned}&=\delta_{mn}\frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{\{2\pi(m+n-2\varkappa)\}^{s_1+s_2-1}}\\ &+\int\limits_0^\infty\left\{\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{2s_1}}B(c,m,n,y,s_1)\right\}y^{s_1+s_2-2}e^{-2\pi(n-\varkappa)y}\,dy.\end{aligned} \qquad (24)$$

При условии $\operatorname{Re} s_2>\operatorname{Re} s_1$ оценка (17) позволяет поменять здесь порядок суммирования и интегрирования и этим свести задачу к вычислению интеграла

$$\int\limits_0^\infty y^{s_1+s_2-2}e^{-2\pi(n-\varkappa)y}B(c,m,n,y,s_1)\,dy. \qquad (25)$$

Подставим сюда вместо B интеграл (16), сделав в нем предварительно замену переменной $\theta=y\xi$. Поменяем порядок интегрирования (повторный интеграл сходится абсолютно) и воспользуемся интегральным представлением [7, 8] модифицированной функции Бесселя

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-(u+1/u)z/2}\frac{du}{u^{\nu+1}},\qquad \nu,z\in\mathbb{C},\qquad \operatorname{Re}z>0.$$

В результате (25) превращается в

$$\begin{aligned}\frac{2}{c^{s_2-s_1}}\left(\frac{m-\varkappa}{n-\varkappa}\right)^{(s_2-s_1)/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{s_1-s_2}\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\sqrt{\frac{1+i\xi}{1-i\xi}}\right)\\ \times(1+\xi^2)^{-(s_1+s_2)/2}e^{-ik\arg(\xi+i)}d\xi\\ =-i\,2^{3-s_1-s_2}\frac{1}{c^{s_2-s_1}}\left(\frac{m-\varkappa}{n-\varkappa}\right)^{(s_2-s_1)/2}e^{-\pi ik/4}\\ \times\int\limits_L K_{s_1-s_2}\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}q\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)^{s_1+s_2-2}q^{k-1}dq.\quad(26)\end{aligned}$$

Из (24), (25), (26) следует (21). Условие $\operatorname{Re}s_2>\operatorname{Re}s_1$, в предположении которого получено (21), можно опустить: из соображений симметрии ясно, что (21) имеет место и при $\operatorname{Re}s_2<\operatorname{Re}s_1$; по непрерывности, (21) справедливо и при $\operatorname{Re}s_1=\operatorname{Re}s_2$.

§3. Оператор Лапласа–Бельтрами

В этом параграфе собраны сведения об операторе Лапласа–Бельтрами Δ_k, используемые в §4 для вывода второй формулы для скалярного произведения. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ_k в $L^2(G\setminus H)$ определяется равенством

$$\Delta_k=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+iky\frac{\partial}{\partial x}$$

на множестве ограниченных гладких функций u, для которых $\Delta_k u$ – тоже ограниченная гладкая функция, а затем расширяется до самосопряженного оператора. Существует разложение $L^2(G\setminus H)$ в прямую сумму

$$L^2(G\setminus H)=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}'$$

ортогональных инвариантных относительно Δ_k подпространств, обладающее следующими свойствами. Спектр Δ_k в $\mathfrak{A}'$ непрерывен и порождается рядами Эйзенштейна на прямой $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$.

Спектр Δ_k в $\mathfrak{A}$ дискретный, конечнократный. Существует ортонормированный базис $u_1, u_2, \ldots$ пространства $\mathfrak{A}$, состоящий из собственных функций Δ_k, $\Delta_k u_j = \lambda_j u_j$, λ_j – собственные числа, все они $\geqslant 0$. Последовательность собственных чисел не имеет точек сгущения кроме, быть может, ∞. Будем считать, что

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots .$$

Нам будет нужно равенство Парсеваля:

$$\langle f_2, f_a\rangle = \sum_{j\geqslant 1} \langle f_1, u_j\rangle \overline{\langle f_2, u_j\rangle}$$

$$+\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha}{}' \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\alpha(r, f_1)\, \overline{\xi_\alpha(r, f_2)}\, dr, \quad f_1, f_2 \in L^2(G \setminus H). \tag{27}$$

Здесь $\sum\limits_{\alpha}{}'$ обозначает суммирование по существенным для v неэквивалентным параболическим вершинам группы G,

$$\xi_\alpha(r, f) = \int_{\mathcal{D}} f(z) \overline{E_\alpha\left(z, \frac{1}{2} + ir\right)}\, \frac{dxdy}{y^2}, \quad x + iy = z.$$

Собственные функции дискретного спектра разлагаются в ряды Фурье:

$$u_j(x+iy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nj}(y)\, e^{2\pi i(n-\varkappa)x}$$

$$c_{nj}(y) = \begin{cases} \rho_j(n) W_{\frac{k}{2}\mathrm{sign}\,(n-\varkappa), i\varkappa_j}(4\pi|n-\varkappa|\, y), & n-\varkappa \neq 0, \\ \rho_j(n) y^{\frac{1}{2}+i\varkappa_j}, \quad n = \varkappa = 0, & \lambda_j < \frac{1}{4}, \\ 0, \quad n = \varkappa = 0, & \lambda_j \geqslant \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}. \tag{28}$$

Эти утверждения собраны из работ Сельберга [11], Рёльке [12], Эльстрода [13]. Правда, равенства Парсеваля (27) в этих работах нет, но его несложно получить, коль скоро известно [12] разложение произвольной функции $f \in L^2(G \setminus H)$ по собственным функциям оператора Δ_k. Для $k = 0$ все приведенные утверждения кроме (28), можно найти в [14].

§4. Вторая формула для скалярного произведения

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} s_1$, $\operatorname{Re} s_2 > 1$,

$$\Lambda(s_1,s_2,r)=\Gamma(s_1-\frac{1}{2}-ir)\Gamma(s_1-\frac{1}{2}+ir)\Gamma(s_2-\frac{1}{2}-ir)\Gamma(s_2-\frac{1}{2}+ir). \tag{29}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\langle\mathcal{U}_m(\cdot,s_1),\mathcal{U}_n(\cdot,\bar{s}_2)\rangle=\frac{(4\pi)^{2-s_1-s_2}(m-\varkappa)^{1-s_1}(n-\varkappa)^{1-s_2}}{\Gamma(s_1-\frac{k}{2})\Gamma(s_2-\frac{k}{2})}\\ \times\Big\{\sum_{j\geqslant 1}\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)\Lambda(s_1,s_2,\varkappa_j)+\frac{1}{4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}}}\\ \times{\sum_{\alpha}}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n-\varkappa}{m-\varkappa}\right)^{ir}\overline{\varphi_{\alpha m}\big(\frac{1}{2}+ir\big)}\,\varphi_{\alpha n}\big(\frac{1}{2}+ir\big)\\ \frac{\Lambda(s_1,s_2,r)dr}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+ir)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-ir)}\Big\}.\end{gathered} \tag{30}$$

Доказательство. Нужно вычислить $\langle\mathcal{U}_m(\cdot,s),u_j\rangle$, $\xi_\alpha(r,\mathcal{U}_m(\cdot,s))$ и воспользоваться равенством Парсваля (27). Преобразовав стандартным образом интеграл по фундаментальной области в интеграл по полосе, получаем:

$$\begin{gathered}\langle\mathcal{U}_m(\cdot,s),u_j\rangle=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1 e^{2\pi i(m-\varkappa)(x+iy)}\overline{u_j(x+iy)}\frac{dxdy}{y^{2-s}},\\ \xi_\alpha(r,\mathcal{U}_m(\cdot,s))=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1 e^{2\pi i(m-\varkappa)(x+iy)}\overline{E_\alpha\big(x+iy,\frac{1}{2}+ir\big)}\frac{dxdy}{y^{2-s}}.\end{gathered} \tag{31}$$

(Такое преобразование обосновывается, если $\operatorname{Re} s$ достаточно велика). Разложим в (31) u_j и E_α в ряды Фурье (28), (12) и проинтегрируем эти ряды почленно, воспользовавшись равенством [15, (20.3)], (30)

$$\int\limits_0^\infty e^{-\omega/2}W_{\frac{k}{2},i\varkappa_j}(\omega)\,\omega^{\rho-1}d\omega=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\varkappa_j+\rho)\Gamma(\frac{1}{2}-i\varkappa_j+\rho)}{\Gamma(1-\frac{k}{2}+\rho)},$$

$\operatorname{Re}\rho > |\operatorname{Re} i\varkappa_j| - \frac{1}{2}$. Оказывается, что

$$\langle \mathcal{U}_m(\cdot,s), u_j\rangle = \overline{\rho_j(m)}(4\pi(m-\varkappa))^{1-s}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2}-i\varkappa_j)\Gamma(s-\frac{1}{2}+i\varkappa_j)}{\Gamma(s-\frac{k}{2})},$$

$$\xi_\alpha(r,\mathcal{U}_m(\cdot,s)) = \overline{\varphi_{\alpha m}\big(\frac{1}{2}+ir\big)}(4\pi(m-\varkappa))^{1-s}(m-\varkappa)^{-1/2-ir} \times e^{\pi ik/2}\pi^{1/2-ir}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2}+ir)\Gamma(s-\frac{1}{2}-ir)}{\Gamma(s-\frac{k}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-ir)}. \tag{32}$$

Эти равенства доказаны в предположении, что $\operatorname{Re}s$ достаточно велика, но имеют место для всех s с $\operatorname{Re}s > 1$: правые части в (32) – мероморфные функции на всей s-плоскости, а левые, как легко доказать, регулярные функции в полуплоскости $\operatorname{Re}s > 1$. Из (32), (27) следует (30).

§5. Четыре вспомогательные леммы

Лемма 3. *Пусть $\sigma, t \in \mathbb{R}$, $\sigma > 1$; m, n – целые положительные числа. Тогда*

$$\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{2\sigma}}\int\limits_L K_{it}\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\,q\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)^{2\sigma-2}q^{k-1}dq = -\frac{\delta_{mn}e^{\pi i(1+k)/2}}{4\{\pi(m+n-2\varkappa)\}^{2\sigma-1}}+$$

$$+\frac{2^{1-2\sigma}\pi^{2-2\sigma}\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{1-\sigma}e^{\pi i(1+k)/2}}{\Gamma(\sigma-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})\Gamma(\sigma-\frac{k}{2}-\frac{it}{2})} \times\Big\{\sum_{j\geqslant 1}\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)\Lambda\big(\sigma+\frac{it}{2},\sigma-\frac{it}{2},\varkappa_j\big)+\frac{1}{4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}}} \times{\sum_\alpha}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m-\varkappa}{n-\varkappa}\right)^{-ir}\overline{\varphi_{\alpha m}\big(\frac{1}{2}+ir\big)}\varphi_{\alpha n}\big(\frac{1}{2}+ir\big) \frac{\Lambda\big(\sigma+\frac{it}{2},\sigma-\frac{it}{2},r\big)\,dr}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+ir)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}-ir)}\Big\}. \tag{33}$$

Доказательство. В леммах 1, 2 берем $s_1 = \sigma + it/2$, $s_2 = \sigma - it/2$ и приравниваем правые части формул для скалярного произведения (21), (30).

Пусть $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \quad \varphi(x) \ll_{\varepsilon} x^{-1-\varepsilon},$$
$$\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x) \ll_{\varepsilon} x^{-2-\varepsilon}, \quad x \to \infty, \tag{34}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$; пусть

$$f(x) = x^{1-k}(x^{k-1}\varphi(x))'.$$

Обозначим

$$F(x, t, \lambda) = J_{it}(x) \cos \frac{\pi}{2}(\lambda - it) - J_{-it}(x) \cos \frac{\pi}{2}(\lambda + it), \tag{35}$$

где $x, t, \lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 4.

$$\int\limits_0^\infty J_l(y)\, \varphi(y) \frac{dy}{y} \ll_{\varphi} l^{-3/2} \log^{-3/2} l \cdot \log^{-2}(\log l), \tag{36}$$

$$\int\limits_0^\omega |J_l(q)| \frac{dq}{q} \ll_{\omega} \frac{1}{\Gamma(l)}, \tag{37}$$

$$\int\limits_\omega^\infty |J_l(q)| \frac{dq}{q} \ll_{\omega} \sqrt{\frac{\log l}{l}}, \tag{38}$$

$$\int\limits_0^\infty F(y, t, 1-k) f(y) \frac{dy}{y} \ll_{f} \frac{e^{\pi t}}{(t+1)^2 \log(t+3)(\log\log(t+3))^2}, \tag{39}$$

$$\int\limits_L K_{it}(\omega q)\, q^{k-1} dq \ll_{Q} (t+1)^{-3/2}(|\log \omega| + 1), \tag{40}$$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\theta t+ik\theta}[(2\cos\theta)^{\varepsilon}-1]d\theta = \varepsilon \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\theta t+ik\theta}\log(2\cos\theta)d\theta +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\theta t+ik\theta}\log^2(2\cos\theta)d\theta + O\big(\varepsilon^3 e^{\pi t/2}\big), \tag{41}$$

$$\int\limits_{L} K_{it}(\omega q)\Big[\Big(q+\frac{1}{q}\Big)^{\varepsilon}-1\Big]q^{k-1}dq$$

$$= \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi t}\bigg\{\frac{(\omega/2)^{-it}}{\Gamma(1-it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\theta t+ik\theta}[(2\cos\theta)^{\varepsilon}-1]d\theta -$$

$$-\frac{(\omega/2)^{it}}{\Gamma(1+it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\theta t+ik\theta}[(2\cos\theta)^{\varepsilon}-1]d\theta\bigg\}+$$

$$+O_Q(\varepsilon\omega^2(|\log\omega|+1)/(t+1)^{3/2}) \ll_Q \frac{|\log\omega|+1}{(t+1)^{3/2}}. \tag{42}$$

В этих оценках f *и* φ *определены в* (34); $t,\varepsilon,\omega,l,Q\in\mathbb{R}$; $t\geqslant 0$, $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}$; *в* (37, 38) $\omega>0$; *в* (40), (42) $0<\omega<Q$; *в* (36–38) $l>10$.

Обоснование этих оценок не представляет существенных сложностей, но громоздко. Поэтому мы его опускаем.

Для $k=0$ см. [16].

Лемма 5. *Пусть* $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ *дважды непрерывно дифференцируема,*

$$f(0)=0;\quad f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ll_{\varepsilon} x^{-2-\varepsilon},\quad x\to\infty$$

для некоторого $\varepsilon>0$. *Тогда при любом* $\lambda\in\mathbb{R}$, *для любого* $x\geqslant 0$

$$f(x) = -\int\limits_0^{\infty} F(x,t,\lambda)\bigg[\int\limits_0^{\infty} F(y,t,\lambda)f(y)\frac{dy}{y}\bigg]\frac{t\,dt}{\mathrm{sh}\,\pi t(\mathrm{ch}\pi t+\cos\pi\lambda)}$$

$$+\sum_{l>\frac{\lambda-1}{2}} 2\,(2l+1-\lambda)\,J_{2l+1-\lambda}(x)\int\limits_0^{\infty} J_{2l+1-\lambda}(y)f(y)\frac{dy}{y}. \tag{43}$$

Доказательство см. [2, 17].

Лемма 6.

$$\int\limits_L K_{it}(\omega q)q^{k-1}dq = \frac{\pi}{\omega^k \mathrm{sh}\,\pi t}\begin{cases} -\int\limits_0^\infty F(q,t,1-k)q^{k-1}dq, & k>0, \\ \int\limits_\omega^\infty F(q,t,1)q^{-1}dq, & k=0; \end{cases} \tag{44}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty F(y,t,1-k)f(y)\frac{dy}{y}\frac{tdt}{\mathrm{ch}\pi t+\cos\pi(1-k)} = -i\int\limits_0^\infty J_k(x)\varphi(x)dx; \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty F(y,t,1-k)f(y)\frac{dy}{y}&\frac{\Lambda(1+\frac{it}{2},1-\frac{it}{2},r)}{\Gamma(1-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})\Gamma(1-\frac{k}{2}-\frac{it}{2})}\\ &\times\frac{tdt}{\mathrm{ch}\pi t+\cos\pi(1-k)}\\ =\frac{4\pi^2}{\mathrm{sh}2\pi r(\cos\pi k+\mathrm{ch}2\pi r)}&\frac{1}{\Gamma(\frac12-\frac{k}{2}+ir)\Gamma(\frac12-\frac{k}{2}-ir)}\\ \times\int\limits_0^\infty\Big\{\cos\Big(\frac{\pi k}{2}+\pi ir\Big)J_{2ir}(y)&-\cos\Big(\frac{\pi k}{2}-\pi ir\Big)J_{-2ir}(y)\Big\}\varphi(y)\frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{46}$$

В (44) $\omega,t\in\mathbb{R},\omega,t>0$. В (45–46) f и φ определены в (34). В (46) $r\in\mathbb{R}$ или $r=i\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac12$, а если $k=0$, то $\theta\neq\frac12$.

Доказательство Случай $k=0$ подробно рассмотрен в [16]. Для $k\neq0$ (44–45) доказываются так же, как и для $k=0$. Сложнее доказать (46).

Интеграл в (46), если $r\neq i/2$, можно записать в виде

$$\pi^2\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\int\limits_0^\infty\cos\frac{\pi}{2}(1-k-it)J_{it}(y)f(y)\frac{dy}{y}}{\mathrm{ch}\pi(\frac{t}{2}+r)\mathrm{ch}\pi(\frac{t}{2}-r)\Gamma(1-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})\Gamma(1-\frac{k}{2}-\frac{it}{2})}\times\frac{tdt}{\mathrm{ch}\pi t+\cos\pi(1-k)} \tag{47}$$

(Λ выражается через ch). Повторный интеграл сходится абсолютно, поэтому порядок интегрирования можно поменять и выражение (47) равно

$$\pi^2 \int\limits_0^\infty \Phi_{k,r}(y)\, f(y)\, \frac{dy}{y}, \tag{48}$$

где

$$\Phi_{k,r}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-k-it) J_{it}(y)}{\mathrm{ch}\pi(\frac{t}{2}+r)\mathrm{ch}\pi(\frac{t}{2}-r)\Gamma(1-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})\Gamma(1-\frac{k}{2}-\frac{it}{2})} \times \frac{tdt}{\mathrm{ch}\pi t + \cos\pi(1-k)}.$$

Будем вычислять $\Phi_{k,r}(y)$ по полюсам подынтегральной функции в нижней полуплоскости (т.е. сдвигая контур интегрирования на прямую $\mathrm{Im}\, t = -\gamma$, $\gamma \to \infty$. Эти полюсы расположены в точках $\pm 2r - i(2l+1)$ и в точках $i(1-k) - i(2l+1)$, $l \in \mathbb{Z}$. Если предположить, что $r \neq i\frac{1-k}{2}$, то все эти точки различны и являются полюсами первого порядка. Тогда

$$\Phi_{k,r}(y) = -2\pi i\{\mathrm{D}_{k,r}(y) + \mathrm{D}_{k,-r}(y) + E_{k,r}(y)\}, \tag{49}$$

$$\mathrm{D}_{k,r}(y) = \frac{2\cos(\frac{\pi k}{2} + \pi i r)}{i\pi \mathrm{sh} 2\pi r(\mathrm{ch} 2\pi r + \cos\pi k)} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2ir + 2l + 1) J_{2ir+2l+1}(y)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{k}{2} + l + ir)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - l - ir)},$$

$$E_{k,r}(y) = \frac{1}{\pi \mathrm{ch}\pi(r - \frac{ik}{2})\mathrm{ch}\pi(r + \frac{ik}{2})} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l J_{k+2l}(y)(k+2l)}{\Gamma(1+l)\Gamma(1-k-l)},$$

($E_{k,r}(y) = 0$ для целого $k \geqslant 0$, так как Γ-функция имеет полюсы в точках $1-k-l$, $l = 1, 2, \ldots$).

Эти ряды можно дифференцировать (по y) почленно, и мы можем вычислить:

$$\mathrm{D}'_{k,r}(y) - \frac{k}{y}\mathrm{D}_{k,r}(y) = \frac{2\cos\pi(\frac{k}{2}+ir)}{i\pi\,\mathrm{sh}2\pi r\,(\mathrm{ch}2\pi r+\cos\pi k)}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2ir+2l+1)[\frac{1}{2}J_{2ir+2l}(y)-\frac{1}{2}J_{2ir+2l+2}(y)-\frac{k}{y}J_{2ir+2l+1}(y)]}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{k}{2}+l+ir)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}-l-ir)}$$

В сумме по l выразим $J_{2ir+2l+1}$ через J_{2ir+2l} и $J_{2ir+2l+2}$ по формуле [18, (17.21)]. После этого можно переписать сумму по l в виде

$$\sum_{\omega=0}^{\infty}J_{2ir+2\omega}(y)\,c(r,y,k,\omega),$$

просто перегруппировав слагаемые. Далее, воспользовавшись функциональным уравнением $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, заметим, что все коэффициенты $c(r,y,k,\omega)$ с $\omega\geqslant 1$ равны 0. Таким образом, от ряда остается одно слагаемое $J_{2ir}(y)\,c(r,y,k,0)$. Получаем, что

$$\mathrm{D}'_{k,r}(y) - \frac{k}{y}\mathrm{D}_{k,r}(y) =$$

$$= \frac{2\cos\pi(\frac{k}{2}+ir)}{i\pi\,\mathrm{sh}2\pi r\,(\mathrm{ch}2\pi r+\cos\pi k)}\frac{J_{2ir(y)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+ir)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}-ir)}. \qquad (50)$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$E'_{k,r}(y) - \frac{k}{y}E_{k,r}(y) = 0. \qquad (51)$$

Поэтому

$$\Phi'_{k,r}(y) - \frac{k}{y}\Phi_{k,r}(y)$$
$$= \frac{4\big\{\cos\pi(\frac{k}{2}-ir)J_{-2ir}(y)-\cos\pi(\frac{k}{2}+ir)J_{2ir}(y)\big\}}{\mathrm{sh}2\pi r(\mathrm{ch}2\pi r+\cos\pi k)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+ir)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}-ir)} \qquad (52)$$

Условия $r\neq i\frac{1-k}{2}$, $r\neq\frac{i}{2}$, которые предполагались в доказательстве равенства (52), можно опустить (в силу непрерывности при

$k>0$ обеих частей (52) как функций от r в окрестностях точек $i\frac{1-k}{2}$ и $\frac{i}{2}$; при $k=0$ равенство $r=i\frac{1-k}{2}=\frac{i}{2}$ противоречит условиям леммы). Интеграл в левой части (46) представлен в виде (48). Выражая f через φ согласно (34) и интегрируя по частям, находим, что (48) равно

$$-\pi^2\int\limits_0^\infty\{\Phi'_{k,r}(y)-\frac{k}{y}\Phi_{k,r}(y)\}\varphi(y)\frac{dy}{y}.$$

Это после подстановки (52) дает (46).

§6. Формула суммирования

Умножим равенство (33) леммы 3 на

$$P(t)=\frac{t}{\operatorname{ch}\pi t+\cos\pi(1-k)}\int\limits_0^\infty F(y,t,1-k)f(y)\frac{dy}{y} \tag{53}$$

и проинтегрируем по t от 0 до ∞; функция f здесь определена в (34), она, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 5. Мы намерены воспользоваться леммой 5, но прежде заметим, что

$$\sum_{c>0}\frac{|S_c(m,n)|}{c^{2\sigma}}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_L K_{it}\Big(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\,q\Big)\right.$$
$$\left.\times\Big(q+\frac{1}{q}\Big)^{2\sigma-2}q^{k-1}dq\right||P(t)|dt<\infty, \tag{54}$$

см. (39), (42). Это обеспечивает конечность интеграла по t от произведения левой части (33) на $|P(t)|$ и, более того, возможность поменять порядок суммирования по c и интегрирования по t, так что левая часть (33) после этих преобразований превращается в

$$\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{2\sigma}}\int\limits_0^\infty\int\limits_L K_{it}\Big(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}q\Big)\Big(q+\frac{1}{q}\Big)^{2\sigma-2}q^{k-1}dqP(t)dt. \tag{55}$$

Согласно (44), (42), (41), для $k>0$

$$\int\limits_L K_{it}(\omega q)\Big(q+\frac{1}{q}\Big)^{2\sigma-2}q^{k-1}dq=\frac{-\pi\omega^{-k}}{\operatorname{sh}\pi t}\int\limits_0^\omega F(q,t,1-k)q^{k-1}dq \tag{56}$$

$$+\frac{(\sigma-1)\pi}{\operatorname{sh}\pi t}\Big\{\frac{(\omega/2)^{-it}}{\Gamma(1-it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{\theta t+ik\theta}\log(2\cos\theta)d\theta-$$

$$-\frac{(\omega/2)^{it}}{\Gamma(1+it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\theta t+ik\theta}\log(2\cos\theta)d\theta\Big\} \tag{57}$$

$$+\frac{(\sigma-1)^2\pi}{\operatorname{sh}\pi t}\Big\{\frac{(\omega/2)^{-it}}{\Gamma(1-it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{\theta t+ik\theta}\log^2(2\cos\theta)d\theta-$$

$$-\frac{(\omega/2)^{it}}{\Gamma(1+it)}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\theta t+ik\theta}\log^2(2\cos\theta)d\theta\Big\} \tag{58}$$

$$+O_{m,n}\Big(\frac{(\sigma-1)^3(|\log\omega+1|+1)}{(t+1)^{1/2}}+\frac{(\sigma-1)\omega^2(|\log\omega|+1)}{(t+1)^{3/2}}\Big). \tag{59}$$

Здесь обозначено:

$$\omega=\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c} \tag{60}$$

Если в (56) поменять знак перед интегралом и промежуток интегрирования $[0,\omega]$ заменить на $[\omega,\infty)$, то получится равенство, справедливое для $k=0$. Подставим сумму выражений (56–59) в (55) и проинтегрируем по t. Интеграл от (56) для $k>0$ равен

$$\int\limits_0^\infty\frac{-\pi}{\operatorname{sh}\pi t}\,\omega^{-k}\int\limits_0^\omega F(q,t,1-k)\,q^{k-1}dq\,P(t)\,dt=$$

$$=-\pi\omega^{-k}\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\infty F(q,t,1-k)\,P(t)\,\frac{dt}{\operatorname{sh}\pi t}\,q^{k-1}dq. \tag{61}$$

Порядок интегрирования можно было поменять ввиду (35), (39), (53) и оценки

$$J_{it}(q)\ll_\omega\frac{e^{\pi t/2}}{\sqrt[4]{t^2+q^2}},\quad q\geqslant\omega$$

(она получается из равномерных асимптотических разложений для $J_{it}(q)$). Далее, из леммы 5 видно, что (61) равно

$$\pi\omega^{-k}\int\limits_0^{\omega}\Big\{f(q)-\sum_{l>-\frac{k}{2}}2(2l+k)J_{2l+k}(q)\int\limits_0^{\infty}J_{2l+k}(y)f(y)\frac{dy}{y}\Big\}q^{k-1}dq. \quad (62)$$

Выразим f согласно (34) и проинтегрируем внутренний интеграл по частям. После этого простые вычисления, использующие рекурентные соотношения для функций Бесселя [18, (17.21) A, Ц] показывают, что (62), а, значит, и (61) равно

$$\frac{\pi}{\omega}\varphi_*(\omega), \quad (63)$$

где

$$\varphi_*(\omega)=\varphi(\omega)-\sum_{l\geqslant 1-\frac{k}{2}}2(2l-1+k)J_{2l-1+k}(\omega)\int\limits_0^{\infty}J_{2l-1+k}(y)\varphi(y)\frac{dy}{y}.$$

Мы предполагали $k>0$, но (63) справедливо и для $k=0$. Напомним, что мы, рассматривая (55), преобразовали внутренний интеграл в сумму выражений (56–59). Внешний интеграл (по t) от (56) есть (63). Внешний интеграл от (59) есть

$$\int\limits_0^{\infty}O_{m,n}\Big(\frac{(\sigma-1)^3(|\log\omega|+1)}{(t+1)^{1/2}}+\frac{(\sigma-1)\omega^2(|\log\omega|+1)}{(t+1)^{3/2}}\Big)P(t)dt$$
$$\ll_{m,n}(\sigma-1)^3(|\log\omega|+1)+(\sigma-1)\omega^2(|\log\omega|+1). \quad (64)$$

Внешний интеграл от (57–58) можно представить в виде

$$(\sigma-1)\int\limits_0^{\infty}B_1(t)\omega^{it}dt+(\sigma-1)\int\limits_0^{\infty}B_2(t)\omega^{-it}dt+$$
$$+(\sigma-1)^2\int\limits_0^{\infty}B_3(t)\omega^{it}dt+(\sigma-1)^2\int\limits_0^{\infty}B_4(t)\omega^{-it}dt \quad (65)$$

с некоторыми функциями $B_1,\dots,B_4$, удовлетворяющими при $k>0$ условиям леммы Римана–Лебега [19]. (Подынтегральные функции достаточно быстро убывают на бесконечности (см. (39), (53)), а в точке 0 при $k > 0$ они ограничены, т.к. $P(0) = 0$). Поэтому выражение (65) при $k > 0$

$$= (\sigma - 1)\lambda_1(\omega) + (\sigma - 1)^2\lambda_2(\omega), \tag{66}$$

$\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega) \to 0$ при $\omega \to 0^+$. Для $k = 0$ нужно действовать чуть более тонко. Приведем тот же интеграл вместо (65) к такому виду:

$$(\sigma - 1)\int_0^\infty \left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-it)} - \frac{1}{\Gamma(1+it)}\right\}B_{5,1}(t)dt \tag{67}$$

$$+(\sigma - 1)\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^{it}\right\}\frac{1}{\Gamma(1+it)}B_{5,1}(t)dt \tag{68}$$

$$+(\sigma - 1)^2\int_0^\infty \left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-it)} - \frac{1}{\Gamma(1+it)}\right\}B_{5,2}(t)dt \tag{69}$$

$$+(\sigma - 1)^2\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^{it}\right\}\frac{1}{\Gamma(1+it)}B_{5,2}(t)dt. \tag{70}$$

Здесь

$$B_{5,l}(t) = P(t)\,\frac{\pi}{\mathrm{sh}\pi t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\theta t}\log^l(2\cos\theta)d\theta, \quad l = 1, 2.$$

К интегралам (67), (69) опять применима лемма Римана–Лебега, а каждый из интегралов (68), (70) может быть записан в виде

$$\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^{it}\right\}\left\{\frac{\gamma}{t}e^{-t} - \delta(t)\right\}dt, \tag{71}$$

где число γ подбирается таким образом, чтобы функция δ была ограничена вблизи 0. Функция δ ограничена и по лемме Римана–Лебега

$$\int_0^\infty \left\{\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^{it}\right\}\delta(t)dt \underset{\omega\to 0^+}{\longrightarrow} 0\ .$$

Далее,

$$\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-it} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^{it} = -2i\sin\left(t\log\frac{\omega}{2}\right),$$

и то, что осталось в (71),

$$= 2i\gamma\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\log(\omega/2)}\right\}$$

(см. [19]). Таким образом, сумма интегралов (67–70) равна

$$(\sigma-1)\{\lambda_3(\omega)+\mu_4+\lambda_4(\omega)\} + (\sigma-1)^2\{\lambda_5(\omega)+\mu_6+\lambda_6(\omega)\}, \tag{72}$$

$\lambda_j(\omega) \to 0$, если $\omega \to 0^+$ $(j = 3,4,5,6)$, а $\mu_4, \mu_6 \in \mathbb{C}$. Из (63–64), (66) следует, что сумма (55) для $k > 0$ равна

$$\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{2\sigma}}\left\{\frac{\pi}{\omega}\varphi_*(\omega) + (\sigma-1)\lambda_1(\omega) + (\sigma-1)^2\lambda_2(\omega) + \right.$$
$$\left. + O_{m,n}\left((\sigma-1)\omega^2(|\log\omega|+1) + (\sigma-1)^3(|\log\omega|+1)\right)\right\}, \tag{73}$$

с ω из (60). Легко показать, что при $\sigma \to 1^+$ выражение

$$(\sigma-1)\sum_{c>0}\frac{|S_c(m,n)|}{c^{2\sigma}} \tag{74}$$

ограничено (см. [20, гл. VIII, §3 упражнение 2 и доказательство теоремы в пункте 3C]). В свою очередь,

$$\varphi_*(\omega) = \mu\omega^{1+k} + O(\omega^2), \quad \mu \in \mathbb{C} \tag{75}$$

(см. (34), (63)). Поэтому существует предел (73) при $\sigma \to 1^+$ и он равен

$$\frac{1}{4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}}}\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c}\varphi_*\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\right). \tag{76}$$

Для $k = 0$ вместо (76) получаем из (63–64), (72), (74)

$$\frac{1}{4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}}}\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c^{2\sigma-1}}\varphi_*\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\right). \tag{77}$$

Предел (77) существует в силу (75) и того факта, что мероморфная функция, определяемая при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом

$$\sum_{c>0} \frac{S_c(m,n)}{c^{2s}} \tag{78}$$

регулярна в точке 1 [11]; это утверждение есть следствие того, что для $k=0$ оператор Лапласа–Бельтрами не имеет собственных функций, отвечающих собственному числу 0, кроме, быть может, постоянной функции). Мы будем писать (76) и для $k=0$, имея в виду (77).

Разберемся теперь с правой частью (33). Первое слагаемое (с символом Кронекера) в правой части (33) после умножения на $P(t)$, интегрирования по t и перехода к $\sigma = 1$ превращается (см. (49)) в

$$-\delta_{m,n} \frac{e^{\frac{\pi i k}{2}}}{4\pi(m+n-2\varkappa)} \int_0^\infty J_k(x)\varphi(x)\,dx. \tag{79}$$

Если теперь рассмотреть (33) в частном случае, когда m и n равны, скажем, $m=n=l$, умножить на $|P(t)|$ и проинтегрировать по t, то левая часть будет конечна (54), вклад слагаемого с символом Кронекера будет конечен (39), (53), и, значит,

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \Bigg\{ \sum_{j\geqslant 1} |\rho_j(l)|^2 \frac{|\Gamma(\sigma-\frac12+\frac{it}{2}+i\varkappa_j)\Gamma(\sigma-\frac12+\frac{it}{2}-i\varkappa_j)|^2}{|\Gamma(\sigma-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})|^2} \\ +\frac{1}{4(l-\varkappa)} {\sum_\alpha}' \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\varphi_{\alpha l}\Big(\frac12+ir\Big)\Big|^2 \\ \times \frac{|\Gamma(\sigma-\frac12+\frac{it}{2}+ir)\Gamma(\sigma-\frac12+\frac{it}{2}-ir)|^2}{|\Gamma(\sigma-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})\Gamma(\frac12+\frac{k}{2}+ir)|^2}\,dr\Bigg\}\,|P(t)|\,dt<\infty\end{gathered} \tag{80}$$

при $\sigma>1$. В то же время, из разложения Стирлинга для гамма-функции видно, что

$$\begin{gathered}\frac{|\Gamma(\sigma_1-\frac12+\frac{it}{2}+ir)\Gamma(\sigma_1-\frac12+\frac{it}{2}-ir)|^2}{|\Gamma(\sigma_1-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})|^2} \ll \\ \ll \frac{|\Gamma(\sigma_2-\frac12+\frac{it}{2}+ir)\Gamma(\sigma_2-\frac12+\frac{it}{2}-ir)|^2}{|\Gamma(\sigma_2-\frac{k}{2}+\frac{it}{2})|^2},\end{gathered} \tag{81}$$

где $1 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1{,}1$, $t \geqslant 0$, $r \geqslant 0$. В сумме по j в (80) есть еще несколько слагаемых (число их конечно), для которых $\varkappa_j \notin \mathbb{R}$, $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}$, так что $\varkappa_j = i\theta_j$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant \frac{1}{2}$. Слагаемые с $\theta_j < \frac{1}{2}$ при интегрировании по t и переходе к $\sigma = 1$ дают конечный вклад. Слагаемые с $\theta_j = \frac{1}{2}$, при $k > 0$, дают конечный вклад, т.к. полюс второго порядка гамма-функции в точке 0 гасится нулем второго порядка функции P. Для $k = 0$ не может быть $\theta_j = \frac{1}{2}$, т.к. соответствующее $\lambda_j = 0$, а известно [12], что для $k = 0$ собственному числу $\lambda_j = 0$ отвечают только постоянные функции, для которых $\rho_j(m) = 0$, $m \geqslant 1$.

Мы взяли $m = n$ и $|P(t)|$ вместо $P(t)$ для того, чтобы в (80) оказалось "все положительно". Неравенство

$$|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

позволяет перейти к произвольным m, n. Таким образом, правая часть (33) после умножения на $P(t)$, интегрирования по t и перехода к $\sigma = 1$ превращается в

$$-\frac{\delta_{mn} e^{\pi i k/2}}{4\pi(m+n-2\varkappa)} \int\limits_0^\infty J_k(x)\varphi(x)\,dx$$

$$+\frac{e^{(1+k)\pi i/2}}{2} \sum_{j \geqslant 1} \overline{\rho_j(m)}\rho_j(n) \int\limits_0^\infty \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{it}{2} + i\varkappa_j)\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{it}{2} - i\varkappa_j)|^2}{|\Gamma(1 - \frac{k}{2} + \frac{it}{2})|^2} P(t)\,dt$$

$$+\frac{e^{(1+k)\pi i/2}}{8\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}}} \sum_{\alpha}{}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_{\alpha m}\big(\frac{1}{2} + ir\big)} \varphi_{\alpha n}\big(\frac{1}{2} + ir\big)$$

$$\times \left(\frac{n-\varkappa}{m-\varkappa}\right)^{ir} \int\limits_0^\infty \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{it}{2} + ir)\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{it}{2} - ir)|^2 P(t)\,dt}{|\Gamma(1 - \frac{k}{2} + \frac{it}{2})|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{k}{2} + ir)|^2}\,dr. \quad (82)$$

Если воспользоваться равенством (46) для вычисления интегралов и приравнять (76) и (82), получим:

$$\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c}\varphi_*\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\right)=-\delta_{mn}\frac{e^{\pi ik/2}}{2\pi}\int\limits_0^\infty J_k(x)\varphi(x)dx$$

$$+4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{\frac12}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\mathrm{ch}\pi\varkappa_j}\widehat{\varphi}(\varkappa_j)$$

$$+\sum_\alpha{}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n-\varkappa}{m-\varkappa}\right)^{ir}\overline{\varphi_{\alpha m}\big(\frac12+ir\big)}\varphi_{\alpha n}\big(\frac12+ir\big)\frac{\widehat{\varphi}(r)dr}{\mathrm{ch}\pi r|\Gamma(\frac12+\frac k2+ir)|^2}. \tag{83}$$

Здесь φ_* определяется по φ равенством (63), а

$$\widehat{\varphi}(r)=\pi^2e^{(1+k)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\times\frac{\int\limits_0^\infty\left\{\cos\pi(\frac k2+ir)J_{2ir}(y)-\cos\pi(\frac k2-ir)J_{-2ir}(y)\right\}\varphi(y)\frac{dy}{y}}{\mathrm{sh}\pi r(\mathrm{ch}2\pi r+\cos\pi k)\Gamma(\frac12-\frac k2+ir)\Gamma(\frac12-\frac k2-ir)}. \tag{84}$$

При $k=0$ левая часть (83) понимается как (77).

Нам осталось только проделать некоторые вычисления, имеющие целью заменить в левой части (83) φ_* на φ. Ясно, что это можно сделать, если добавить к правой части (83) сумму

$$\sum_{l\geqslant 1-\frac k2}2\,(2l-1+k)\times$$

$$\left\{\sum_{c>0}\frac{S_c(m,n)}{c}J_{2l-1+k}\left(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\right)\right\}\check{\varphi}(2l+k), \tag{85}$$

где

$$\check{\varphi}(r)=\int\limits_0^\infty J_{r-1}(y)\,\varphi(y)\,\frac{dy}{y}. \tag{86}$$

Ряд (85) допускает очень естественную интерпретацию. Какую именно, мы сейчас объясним. Пусть (r,G,v) – пространство регулярных (на H и в параболических вершинах) параболических форм (относительно G и v) веса $r=k+2l$, $l\in\mathbb{Z}$, $l\geqslant 1$. В этом пространстве лежат классические ряды Пуанкаре $P_{m,r}$, которые мы можем определить так:

$$P_{m,r}(z)=(m-\varkappa)^{r-1}e^{\pi ir/2}y^{-r/2}\mathcal{U}_m(z,r/2), \tag{87}$$

с той лишь оговоркой, что k в (11) должно быть заменено на r. Некоторые сложности возникают в случае $k=0$, $l=1$, т.е. когда $r=2$. В этом случае точка $s=r/2=1$ находится вне области абсолютной сходимости ряда $\mathcal{U}_m(z,s)$. Однако, $\mathcal{U}_m(z,s)$ продолжается как регулярная функция в эту точку.

Далее, ряды Пуанкаре разлагаются в ряды Фурье

$$P_{m,r}(z)=\sum_{p=1}^{\infty} c_{p,m}^{(r)} e^{2\pi i(p-\varkappa)z},$$

$$c_{p,m}^{(r)}=\big\{(m-\varkappa)(p-\varkappa)\big\}^{\frac{r-1}{2}}\bigg\{\delta_{mp}e^{\pi i r/2}$$
$$+2\pi\sum_{c>0}\frac{S_c(m,p)}{c}J_{r-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(p-\varkappa)}}{c}\bigg)\bigg\}. \tag{88}$$

В случае $r=2$ снова следует оговорить, что под суммой ряда в формуле для $c_{p,m}^{(r)}$ (он, быть может, не является абсолютно сходящимся) понимается

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\sum_{c>0}\frac{S_c(m,p)}{c^{2\sigma-1}}J_{r-1}\bigg(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(p-\varkappa)}}{c}\bigg),$$

см. (78). По формуле Петерсона для скалярного произведения [3, 9], которая справедлива для всех $r\geqslant 2$, имеем

$$\langle P_{n,r},P_{m,r}\rangle_0=\frac{\Gamma(r-1)}{(4\pi)^{r-1}}\,e^{\pi i r/2}\,\overline{c_{n,m}^{(r)}}. \tag{89}$$

Здесь $\langle,\rangle_0$ – скалярное произведение в (r,G,v). С другой стороны, в силу равенства Парсеваля,

$$\langle P_{n,r},P_{m,r}\rangle_0=\sum_{f\in S_r}\langle P_{n,r},f\rangle_0\,\overline{\langle P_{m,r},f\rangle_0}, \tag{90}$$

где суммирование производится по множеству (оно конечно) S_r функций, составляющих ортонормированный базис (r,G,v). Пусть

$$f(z)=\sum_{l=1}^{\infty}\rho_f(l)\,e^{2\pi i(l-\varkappa)z}, \tag{91}$$

– разложение Фурье. Снова используя формулу Патерсона для скалярного произведения, вычисляем правую часть (90). Оказывается, что

$$\langle P_{n,r}, P_{m,r}\rangle_0 = \frac{\Gamma^2(r-1)}{(4\pi)^{2r-2}} \sum_{f\in S_r} \overline{\rho_f(n)}\rho_f(m). \tag{92}$$

Приравнивая (89) и (92), получаем:

$$c_{n,m}^{(r)} = \frac{\Gamma(r-1)}{(4\pi)^{r-1}}\, e^{\pi ir/2} \sum_{f\in S_r} \rho_f(n)\,\overline{\rho_f(m)}. \tag{93}$$

Сумма по c в (85) выражается через $c_{n,m}^{(k+2l)}$, а затем можно воспользоваться равенством (93). Обозначим S^k объединение множеств S_{k+2l} по всем целым $l \geqslant 1$. Другими словами, в каждом из пространств $(k+2l, G, v)$ выбирается произвольным образом ортонормированный базис, а S^k – множество всех функций всех этих базисов. Для $f \in S^k$ через ω_f обозначим вес, так что $f \in (\omega_f, G, v)$. Теперь можно сформулировать окончательный результат.

Теорема. *Пусть группа G, число k и система мультипликаторов v удовлетворяют условиям* (1), (2), (4). *Пусть трижды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям* (34), *т.е.*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \quad \varphi(x) \underset{\varepsilon}{\ll} x^{-1-\varepsilon}, \quad \varphi'(x),\, \varphi''(x),\, \varphi'''(x) \underset{\varepsilon}{\ll} x^{-2-\varepsilon}$$

при $x \to \infty$, для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для положительных целых чисел m, n имеет место равенство:

$$\sum_{c>0} \frac{S_c(m,n)}{c}\, \varphi\Big(\frac{4\pi\sqrt{(m-\varkappa)(n-\varkappa)}}{c}\Big)$$
$$= \sum_{f\in S^k} \frac{4\Gamma(\omega_f)e^{\pi i\omega_f/2}}{(4\pi)^{\omega_f}\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{(\omega_f-1)/2}}\, \overline{\rho_f(m)}\,\rho_f(n)\,\check{\varphi}(\omega_f)$$
$$+ 4\{(m-\varkappa)(n-\varkappa)\}^{1/2} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\overline{\rho_j m)}\,\rho_j(n)}{\mathrm{ch}(\pi\varkappa_j)}\, \widehat{\varphi}(\varkappa_j)$$
$$+ \sum_{\alpha}{}' \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{n-\varkappa}{m-\varkappa}\Big)^{ir} \overline{\varphi_{\alpha m}\Big(\frac{1}{2}+ir\Big)}\varphi_{\alpha n}\Big(\frac{1}{2}+ir\Big) \frac{\widehat{\varphi}(r)dr}{\mathrm{ch}(\pi r)\,|\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+ir)|^2}.$$

Здесь $\widehat{\varphi}$, $\check{\varphi}$ *определяются в* (84), (86); $\varphi_{\alpha m}$ *в* §1; $\rho_j(m)$, $\varkappa_j$, $\sum\limits_{\alpha}{}'$ *в* §3; $\rho_t(m)$ – *в* (91); S^k *и* ω_f *определены непосредственно перед формулировкой теоремы. Остальные обозначения см. во введении.*

§7. Приложение

Используя технику, применявшуюся при рассмотрении гипотезы Ю. В. Линника [2, 21, 22], можно вывести из формулы суммирования для общих сумм Клостермана (9) следующую асимптотическую формулу.

Теорема. *Пусть* m, n – *положительные целые числа,* $Q \geqslant 2$. *Тогда*

$$\sum_{0<c\leqslant Q} \frac{S_c(m,n)}{c} = \mu_1(m,n)\, Q^{\omega_1} + \mu_2(m,n)\, Q^{\omega_2}$$
$$\cdots + \mu_l(m,n)\, Q^{\omega_l} + O_{m,n}(Q^{1/3}\log Q).$$

Здесь $\omega_j = \sqrt{1-4\lambda_j}$; $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_l$ – *те собственные числа оператора* Δ_k *в пространстве* $L^2(G\setminus H)$, *которые лежат на промежутке* $[0, 1/4)$; $\mu_1(m,n), \ldots, \mu_l(m,n) \in \mathbb{C}$.

В случае, когда на промежутке $[0, 1/4)$ нет собственных чисел Δ_k, главная часть отсутствует. Если для сумм $S_c(m,n)$ есть нетривиальная оценка сверху при $c \to \infty$, то остаток оценивается лучше, но не лучше, чем с $1/6$ вместо $1/3$.

Литература

1. Н. В. Проскурин, *Об общих суммах Клостермана*, Препринты ЛОМИ, Р-3-80, 1980.
2. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для форм веса нуль и гипотеза Линника*, Препринт ХабКНИИ 02-77, Хабаровск, 1977.
3. H. Petersson, *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen*, Acta Math. **58** (1962), 169–215.
4. H. Petersson, *Über Modulfunktionen und Partionenprobleme*, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. und allgem. Naturwiss., No. 2 (1954), 59 S.
5. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, 1965, 1–15.
6. R. W. Bruggeman, *Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. **45** (1978), 1–18.
7. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher transcendental functions* Vol. I, II, 1953.
8. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 1945.
9. R. A. Rankin, *Modular forms and functions*, Cambridge: University Press, 1977.

10. H. Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Functionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Functionalgleichungen*, Math. Ann. **121** (1949), 144–183.
11. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
12. W. Roelcke, *Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene* I, II, Math. Ann. **167** (1966), 292–337; **168** (1967), 261–324.
13. J. Elstrodt, *Die resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene*, I, II, III, Math. Ann. **203** (1973), 295–330; Math. Z. **132** (1973), 99–134; Math. Ann. **208** (1974), 99–132.
14. Л. Д. Фаддеев, *Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаменталньй области дискретной группы на плоскости Лобачевского*, Тр. Моск. Мат. об-ва **17** (1967), 323–350.
15. H. Bateman, A. Erdelyi, *Tables of integral transforms*, Vol. I, II, 1954.
16. Н. В. Проскурин, *Формулы суммирования для общих сумм Клостермана*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ **82** (1978), 103–135.
17. Н. В. Проскурин, *Оценки собственных чисел операторов Гекке в пространстве параболических форм веса* 0, Зап. научн. семинаров ЛОМИ **82** (1979), 136–143.
18. E. Whittaker, G. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, England, 1927.
19. С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, М., 1977.
20. I. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*, 8, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
21. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Сумма сумм Клостермана*, Мат. сб. **111**, No. 3 (1980), 334–383.
22. Н. В. Проскурин, *О гипотезе Ю. В. Линника*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ **91** (1979), 94–118.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 сентября 2003 г.