Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Н. Н. Мануйлов

САМОПОДОБИЕ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТОЧЕК НА ОКРУЖНОСТИ

Введение

Для исследования одномерного варианта задачи о росте квазикристалла В. Г. Журавлевым [1] для иррациональности $\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [(1)]$ было введено понятие орбиты:

$$O_m = \mathrm{Orb}(1 - \tau_1^{-m}, \tau_1^{-(m+1)}, I_m), \ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

– последовательности элементов

$$a(m, i) = (1 - \tau_1^{-m} + i\tau_1^{-(m+1)}) \bmod |I_m|,$$

принадлежащих полуинтервалам $I_m = [1 - \tau_1^{-m}, 1)$ и получающихся из начальной точки $a(m, 0)$ сдвигом на дугу $\tau_1^{-(m+1)}$ окружности длины $|I_m| = \tau_1^{-m}$. Длины и координаты полуинтервалов I_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, получены с помощью разбиений Фибоначчи [1]. Данные разбиения активно используются при решении некоторых задач, связаных с цепями Фибоначчи [2].

Используя понятие производной $d^m O_0$ – последовательности элементов $O_m = O_0 \cap I_m$, пронумерованых в порядке их попадания в полуинтервал I_m, В. Г. Журавлев доказал, что последовательность O_0 и ее производные обладают свойством самоподобия:

$$d^m O_0 = O_m = h_m O_0,$$

где h_m – некоторая гомотетия с центром в точке 1. Самоподобие означает, что производные $d^m O_0$ последовательности O_0 после нормирования совпадают с исходной последовательностью O_0.

В настоящей статье для квадратичной иррациональности $\tau_2 = 1 + \sqrt{2} = [(2)]$ рассматриваются орбиты

$$O_m = \mathrm{Orb}(1 - \tau_2^{-[m/2]}, \tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m), \ m = 0, 2, 4, \ldots,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00368).

$$O_m = \mathrm{Orb}(1 - \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1), \tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m), \quad m \quad \text{нечетные},$$

и их производные на соответствующих полуинтервалах

$$I_m = [1 - \tau_2^{-[m/2]}, 1), \ I_m = [1 - \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1), 1),$$

полученных с помощью разбиений Фибоначчи второго порядка [3, 4].

В теоремах 2.2, 2.3 доказаны следующие результаты: 1) производные d^m, $m = 0, 2, 4, \dots$, последовательности O_0 обладают свойствами самоподобия, аналогичными свойствам самоподобия орбит, построенных на основе τ_1. 2) Для нормированных орбит $d^m O_0$, где m нечетно, наблюдается явление копирования последовательности O_0. При этом число копий равно двум за счет сдвига одной последовательности O_0 относительно другой.

Производные $d^m O_0$ обладают свойством периодичности

$$d^{m+tk} O_0 \sim d^m O_0,$$

где $m, k = 0, 1, 2, \dots$ и t – период производной. Для τ_1 период $t = 1$, для τ_2 период $t = 2$. Таким образом, для квадратичных иррациональностей $\tau_g = [(g)]$, $g = 1, 2$, доказано, что производные $d^m O_0$ последовательностей O_0 имеют период t, равный g.

1. Определение производных и орбит

Рассмотрим аффинное отображение aff на единичном полуинтервале $I = [0, 1)$

$$I \xrightarrow{\mathrm{aff}} I : \quad x \longmapsto \mathrm{aff}(x) = \beta x + (1 - \beta) \cdot 1,$$

где β – некоторое фиксированное число с условием $0 < \beta < 1$. Легко заметить, что aff – гомотетия с коэффициентом β и центром в точке 1.

Введем на единичном полуинтервале $I = [0, 1)$ градуировку

$$\mathrm{Grad} = \mathrm{Grad}(I, \mathrm{aff}) : \ I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_\ell \supset I_{\ell+1} \supset \dots \qquad (1)$$

из согласованных друг с другом полуинтервалов $I_{\ell+1} = \mathrm{aff}(I_\ell)$, для $\ell = 0, 1, 2, \dots$ и $I_0 = I = [0, 1)$. С помощью градуировки (1) можно определить k-производные $d^k, k = 0, 1, 2, \dots$, на множестве пар

$$S_\ell = (S, I_\ell),$$

где $S = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность из полуинтервала I_ℓ, по правилу

$$d^k S_\ell = (S', I_{\ell+k}),$$

при этом $S' = S \cap I_{\ell+k}$ и $S' = \{a_{i_j}\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность, элементы которой упорядочены по индукции:

$$i_0 = \min\{i : a_i \in I_{\ell+k}\},$$
$$i_{n+1} = \min\{i > i_n : a_i \in I_{\ell+k}\}$$

для $n \geqslant 0$. Основное свойство производных

$$d^{k_1+k_2} S_\ell = d^{k_1}(d^{k_2} S_\ell) \tag{2}$$

вытекает из условия вложенности полуинтервалов (1). Аффинное отображение $\mathrm{aff}^k = \mathrm{aff} \ldots \mathrm{aff}$ (k раз) действует на множестве пар S_ℓ следующим образом:

$$\mathrm{aff}^k(S, I_\ell) = (\mathrm{aff}^k S, I_{\ell+k}), \tag{3}$$

где последовательность $\mathrm{aff}^k S$ состоит из элементов $\mathrm{aff}^k(a_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, из полуинтервала $I_{\ell+k}$, т.е. порядок элементов последовательности $\mathrm{aff}^k S$ индуцирован последовательностью $S = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Из определения производной и свойства (3) для любых $k, \ell = 0, 1, 2, \ldots$ вытекает формула коммутирования

$$d^k \cdot \mathrm{aff}^\ell = \mathrm{aff}^\ell \cdot d^k \tag{4}$$

производных и аффинных отображений.

Отождествим полуинтервал I_ℓ с окружностью и рассмотрим последовательность $\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell)$ – орбиту начальной точки $a_0 \in I_\ell$ относительно сдвига $\alpha \neq 0$.

$$\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell): \ a_i \longmapsto a_{i+1} = (a_i + \alpha) \bmod |I_\ell|,$$

Если I_ℓ в координатах имеет вид $I_\ell = [a, b)$, то на полуинтервале $I_\ell^- = (a, b]$ определим орбиту начальной точки $a_0 \in I_\ell^-$

$$\mathrm{Orb}(a_0, -\alpha, I_\ell^-): \ a_i \longmapsto a_{i+1} = (a_i - \alpha) \bmod |I_\ell^-|,$$

где $-\alpha$ – сдвиг.

Пусть на полуинтервале I_ℓ из градуировки (1) задана орбита $\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell)$ точки $a_0 \in I_\ell$, тогда производная d^k, $k = 0, 1, 2, \dots$, последовательности $\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell)$ снова будет орбитой, а именно

$$d^k \,\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell) = \mathrm{Orb}(a'_0, \alpha', I_{\ell+k}).$$

Начальная точка a'_0 для $\mathrm{Orb}(a'_0, \alpha', I_{\ell+k})$ – левый конец полуинтервала $I_{\ell+k}$, а сдвиг α' равен разности первых двух точек орбиты: $\alpha' = a'_1 - a'_0$, где $a'_1 = a_i \in \mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell)$ и индекс

$$i = \min\{i : a_i \in \mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell) \neq a'_0,\ \ a_i \in I_{\ell+k}\}.$$

С другой стороны, если отождествить левый конец полуинтервала $I_{\ell+k}$ с правым концом $I^-_{\ell+k}$, то орбиту $\mathrm{Orb}(a'_0, \alpha', I_\ell)$ можем записать в виде

$$\mathrm{Orb}(a'_0, \alpha', I_{\ell+k}) = \mathrm{Orb}(a''_0, -\alpha'', I^-_{\ell+k}),$$

где точка $\mod a''_0 a'_0 I^-_{\ell+k}$ является правым концом полуинтервала $I^-_{\ell+k}$, а в качестве сдвига выбрано $-\alpha'' = -(|I_{\ell+k}| - \alpha')$.

Аналогично определим производную d^k орбиты $\mathrm{Orb}(a_0, -\alpha, I^-_\ell)$ на полуинтервале I^-_ℓ, отождествляя правый конец $I^-_{\ell+k}$ с левым концом $I_{\ell+k}$:

$$d^k \,\mathrm{Orb}(a_0, -\alpha, I^-_\ell) = \mathrm{Orb}(a'_0, -\alpha', I^-_{\ell+k}) = \mathrm{Orb}(a''_0, \alpha'', I_{\ell+k}).$$

Легко заметить, что

$$d^0 \,\mathrm{Orb}(a_0, \pm\alpha, I^\pm_\ell) = \mathrm{Orb}(a_0, \pm\alpha, I^\pm_\ell).$$

2. Орбиты на полуинтервалах $I^\pm_m$

Обозначим τ_2 квадратичную иррациональность $1 + \sqrt{2}$ с разложением в цепную дробь

$$\tau_2 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [(2)].$$

Пусть $m = 0, 2, 4, \dots$ Рассмотрим две последовательности вложенных полуинтервалов

$$\begin{aligned} &I_0 \supset I_4 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+4} \supset \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } m \equiv 0 \pmod 4, \\ &I^-_0 \supset I^-_4 \supset \dots \supset I^-_m \supset I^-_{m+4} \supset \dots, \end{aligned} \tag{6}$$

$$I_0 \supset I_2^- \supset I_6^- \supset \dots \supset I_m^- \supset I_{m+4}^- \supset \dots,$$
$$\text{для } m \equiv \pmod 4, \tag{7}$$
$$I_0^- \supset I_2 \supset I_6 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+4} \supset \dots,$$

где $I_m = [1 - \tau_2^{-[m/2]}, 1)$, $I_m^- = (1 - \tau_2^{-[m/2]}, 1]$, $[\alpha]$ – целая часть α.

Поскольку отношение длин $|I_{m+4}^{\pm}|/|I_m^{\pm}|$ равно $\tau_2 - 2$, то полуинтервалы $I_{m+4}^{\pm}$, $I_m^{\pm}$ связаны аффинным отображением h_0: $I_{m+4}^{\pm} = h_0(I_m^{\pm})$, где

$$h_0: \ x \longmapsto h_0(x) = \tau_2^{-2}x + (1 - \tau_2^{-2}). \tag{8}$$

Отображение h_0 позволяет задать на полуинтервалах $I_0^{\pm}$, $I_2^{\pm}$ градуировки

$$\mathrm{Grad}_0 = \mathrm{Grad}(I_0, h_0), \quad \mathrm{Grad}_0^- = \mathrm{Grad}(I_0^-, h_0), \tag{9}$$
$$\mathrm{Grad}_{(0,2)} = \mathrm{Grad}(I_2, h_0), \quad \mathrm{Grad}_{(0,2)}^- = \mathrm{Grad}(I_2^-, h_0).$$

Последовательности (6) полностью соответствуют градуировкам (9), а из градуировки (10) исключены полуинтервалы I_0, I_0^-.

Рассмотрим полуинтервалы I_0, I_2^-, I_0^-, I_2. Найдем отношение их длин: $|I_2^-|/|I_0| = |I_2|/|I_0^-| = \tau_2^{-1}$. Возьмем отображение

$$h_{(0,2)}: \ x \longmapsto h_{(0,2)}(x) = \tau_2^{-1}x + (1 - \tau_2^{-1}),$$

и, учитывая включения $I_0 \supset I_2^-$ и $I_0^- \supset I_2$, зададим с помощью инверсии $inv: \ x \longmapsto 1 - x$ новое аффинное отображение $h_{(0,2)}^- = h_{(0,2)} inv$, имеющее в координатах вид

$$h_{(0,2)}^-: \ x \longmapsto h_{(0,2)}^-(x) = 1 - \tau_2^{-1}x. \tag{11}$$

Отображение $h_{(0,2)}^-$, связывающее между собой полуинтервалы $I_0^{\pm}$ и $I_2^{\mp}$,

$$I_2^{\pm} = h_{(0,2)}^-(I_0^{\mp}),$$

позволяет дополнить градуировки $\mathrm{Grad}_{(0,2)}$ и $\mathrm{Grad}_{(0,2)}^-$ (10), включив в них полуинтервалы I_0, I_0^-, а именно

$$\mathrm{Grad}_2 = \mathrm{Grad}(I_0, h_{(0,2)}^-; I_2^-, h_0),$$

$$\mathrm{Grad}_2^- = \mathrm{Grad}(I_0^-, h_{(0,2)}^-; I_2, h_0). \tag{12}$$

Рассмотрим основную орбиту на I_0 и дополнительную к ней на полуинтервале I_0^- :

$$O_0 = \mathrm{Orb}(0, \tau_2^{-1}, I_0), \quad O_0^- = \mathrm{Orb}(1, -\tau_2^{-1}, I_0^-).$$

Каждая из них входит в бесконечное m-параметрическое семейство последовательностей – орбит

$$\begin{aligned} O_m &= \mathrm{Orb}(1 - \tau_2^{-[m/2]}, \tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m), \\ O_m^- &= \mathrm{Orb}(1, -\tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m^-), \end{aligned} \tag{13}$$

где $m = 0, 2, 4, \dots$.

Далее, пусть m – нечетно. Рассмотрим другие последовательности вложенных полуинтервалов

$$\begin{aligned} &I_0 \supset I_1 \supset I_5 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+4} \supset \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } m \equiv \ (\mathrm{mod}\ 4), \\ &I_0^- \supset I_1^- \supset I_5^- \supset \dots \supset I_m^- \supset I_{m+4}^- \supset \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &I_0 \supset I_3^- \supset I_7^- \supset \dots \supset I_m^- \supset I_{m+4}^- \supset \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } m \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4), \\ &I_0^- \supset I_3 \supset I_7 \supset \dots \supset I_m \supset I_{m+4} \supset \dots, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$I_m = [1 - \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1), 1)$$

и

$$I_m^- = (1 - \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1), 1].$$

Длины полуинтервалов I_m, I_m^- могут быть получены по формуле $|I_m| = |I_m^-| = \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1)$. На основании этого заключаем: $|I_{m+4}^{\pm}|/|I_m^{\pm}| = \tau_2 - 2$, что означает существование связи полуинтервалов и аффинного отображения (8) $I_{m+4}^{\pm} = h_0(I_m^{\pm})$. Отображение h_0 позволяет задать на полуинтервалах $I_1^{\pm}$, $I_3^{\pm}$ градуировки $\mathrm{Grad}_{(0,1)}^{\pm}$, $\mathrm{Grad}_{(0,3)}^{\pm}$, имеющие вид

$$\mathrm{Grad}_{(0,1)} = \mathrm{Grad}(I_1, h_0), \quad \mathrm{Grad}_{(0,1)}^- = \mathrm{Grad}(I_1^-, h_0), \tag{16}$$

$$\mathrm{Grad}_{(0,3)} = \mathrm{Grad}(I_3^-, h_0), \quad \mathrm{Grad}_{(0,3)}^- = \mathrm{Grad}(I_3, h_0). \tag{17}$$

Нам необходимо, чтобы в градуировки (16), (17) были включены полуинтервалы I_0, I_0^-. Для этого найдем отношения длин полуинтервалов $I_0^\pm$, $I_1^\pm$ и $I_0^\pm$, $I_3^\mp$. Видим, что $|I_1^\pm|/|I_0^\pm| = \tau_2^{-1}(\tau_2 - 1)$, $|I_1^\mp|/|I_0^\pm| = \tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)$ и, следовательно, аффинное отображение

$$h_{(0,1)}:\ x \longmapsto h_{(0,1)}(x) = \tau_2^{-1}(\tau_2 - 1)x + (1 - \tau_2^{-1}(\tau_2 - 1)) \tag{18}$$

связывает между собой полуинтервалы $I_0^\pm$ и $I_1^\pm$. Полуинтервалы $I_0^\pm$, $I_3^\mp$, ввиду $I_0^\pm \subset I_3^\mp$, связаны аффинным отображением $h_{(0,3)}^- = h_{(0,3)}\ inv$, где $inv:\ x \longmapsto 1 - x$ и

$$h_{(0,3)}:\ x \longmapsto h_{(0,3)}(x) = \tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)x + (1 - \tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)).$$

В координатах отображение $h_{(0,3)}^-$ имеет вид

$$h_{(0,3)}^-:\ x \longmapsto h_{(0,3)}^-(x) = 1 - \tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)x. \tag{19}$$

С помощью аффинных отображений $h_{(0,1)}$, $h_{(0,3)}^-$, h_0 определим градуировки

$$\begin{aligned}
\mathrm{Grad}_1 &= \mathrm{Grad}(I_0, h_{(0,1)}; I_1, h_0),\\
\mathrm{Grad}_1^- &= \mathrm{Grad}(I_0^-, h_{(0,1)}; I_1^-, h_0), && (20)\\
\mathrm{Grad}_3 &= \mathrm{Grad}(I_0, h_{(0,3)}^-; I_3^-, h_0),\\
\mathrm{Grad}_3^- &= \mathrm{Grad}(I_0^-, h_{(0,3)}^-; I_3, h_0) && (21)
\end{aligned}$$

для последовательностей вложенных полуинтервалов (14), (15).

По аналогии с (13) для полуинтервалов $I_m^\pm$ с $m = 1, 3, 5, \ldots$ построим свои бесконечные m-параметрические семейства последовательностей

$$\begin{aligned}
O_m &= \mathrm{Orb}(1 - \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2 - 1), \tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m),\\
O_m^- &= \mathrm{Orb}(1, -\tau_2^{-([m/2]+1)}, I_m^-). && (22)
\end{aligned}$$

Рассмотрим на $[0, 1)$ полуинтервалы

$$G_0^m,\ E_0^m,\ E_i^m,\ G_j^m, \tag{23}$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$i = \begin{cases} F_{[m/2]+1}^{2(2)}, & m \equiv 0 \pmod 4,\\ F_{[m/2]+2}^{1(2)}, & m \equiv 1 \pmod 4,\\ F_{[m/2]+1}^{1(2)}, & m \equiv 2, 3 \pmod 4, \end{cases} \qquad j = \begin{cases} F_{[m/2]+1}^{1(2)}, & m \equiv 0, 1 \pmod 4,\\ F_{[m/2]+1}^{2(2)}, & m \equiv 2 \pmod 4,\\ F_{[m/2]+2}^{1(2)}, & m \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

При этом $\{F_n^{1(2)}\}$, $\{F_n^{2(2)}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, – две числовые последовательности, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$F_{n+2}^{i(2)} = 2F_{n+1}^{i(2)} + F_n^{i(2)}, \ F_0^{i(2)} = i - 1, \ F_1^{i(2)} = 1$$

для $i = 1, 2$.

Выберем полуинтервалы G_0^m, E_0^m, E_i^m, G_j^m таким образом, чтобы

$$G_k^m = [\langle(k + F_{[m/2]}^{1(2)})\tau_2\rangle, \langle(k - F_{[m/2]+1}^{1(2)})\tau_2\rangle),$$
$$E_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]+1}^{1(2)})\tau_2\rangle, \langle k\tau_2\rangle),$$

если $m \equiv 0 \pmod 4$,

$$G_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]}^{1(2)})\tau_2\rangle, \langle(k - F_{[m/2]+1}^{2(2)})\tau_2\rangle),$$
$$E_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]+1}^{2(2)})\tau_2\rangle, \langle(k\tau_2\rangle),$$

если $m \equiv 2 \pmod 4$,

$$G_k^m = [\langle(k + F_{[m/2]+1}^{2(2)})\tau_2\rangle, \langle(k - F_{[m/2]+1}^{1(2)})\tau_2\rangle),$$
$$E_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]+1}^{1(2)})\tau_2\rangle, \rangle k\tau_2\rangle),$$

если $m \equiv 1 \pmod 4$,

$$G_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]+1}^{2(2)})\tau_2\rangle, \langle(k - F_{[m/2]+2}^{1(2)})\tau_2\rangle),$$
$$E_k^m = [\langle(k - F_{[m/2]+2}^{1(2)})\tau_2\rangle, \langle k\tau_2\rangle),$$

– если $m \equiv 3 \pmod 4$, где $\langle\alpha\rangle$ – дробная часть α, а k принимает значения 0, i, j.

В [5] приведены основные свойства иррациональности τ_2 и последовательностей $\{F_n^{1(2)}\}$, $\{F_n^{2(2)}\}$. Из них нам потребуются два свойства.

Свойство 1. $F_{n+1}^{2(2)} = F_{n+1}^{1(2)} + F_n^{1(2)}$, $F^{2(2)}n + F_n^{1(2)} = F_{n+1}^{1(2)}$ для $n > 0$.

Свойство 2. Для n четных: $\langle F_n^{1(2)}\tau_2\rangle = 1 - \tau_2^{-n}$, $\langle F_n^{2(2)}\tau_2\rangle = \tau_2^{-n}(\tau_2 - 1)$, для n нечетных: $\langle F_n^{1(2)}\tau_2\rangle = \tau_2^{-n}$, $\langle F_n^{2(2)}\tau_2\rangle = 1 - \tau_2^{-n}(\tau_2 - 1)$.

Из свойств 1–2 и формул координат полуинтервалов G_0^m, E_0^m, E_i^m, G_j^m непосредственно следует

Лемма 2.1.

Полуинтервалы G_0^m, E_0^m, E_i^m, G_j^m *(23) в координатах имеют вид* $[\langle \ell\tau_2\rangle, \langle s\tau_2\rangle)$, *где* ℓ *и* s *– целые числа.*

Пусть $0 \equiv 1 \pmod 1$, *тогда координата правого конца* E_0^m *и* G_j^m *равна 1, координата левого конца полуинтервалов* G_0^m *и* E_i^m *равна* $1-\tau_2^{-[m/2]}$ *в случае* $m \equiv 0,2 \pmod 4$ *или* $1-\tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2-1)$ *в случае* $m \equiv 1,3 \pmod 4$.

Полуинтервал I_m *(6), (7), (14), (15),* $m = 0,1,2,3,\ldots$, *можно представить в виде двойственного разбиения*

$$I_m = G_0^m + E_0^m = E_i^m + G_j^m. \tag{24}$$

Длины полуинтервалов G_0^m, E_0^m, E_i^m, G_j^m *вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned}
g^m &= |G_0^m| = |G_j^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2-1), \\
&\qquad\qquad \textit{для } m \equiv 0 \pmod 4, \\
e^m &= |E_0^m| = |E_i^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}, \\
g^m &= |G_0^m| = |G_j^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}, \\
&\qquad\qquad \textit{для } m \equiv 2 \pmod 4, \\
e^m &= |E_0^m| = |E_i^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}(\tau_2-1), \\
g^m &= |G_0^m| = |G_j^m| = \tau_2^{-([m/2]+2)}, \\
&\qquad\qquad \textit{для } m \equiv 1 \pmod 4, \\
e^m &= |E_0^m| = |E_i^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}, \\
g^m &= |G_0^m| = |G_j^m| = \tau_2^{-([m/2]+1)}, \\
&\qquad\qquad \textit{для } m \equiv 3 \pmod 4. \\
e^m &= |E_0^m| = |E_i^m| = \tau_2^{-([m/2]+2)},
\end{aligned}$$

Замечание. Лемма 2.1 справедлива для полуинтервалов $(G_0^m)^-$, $(E_0^m)^-$, $(E_i^m)^-$, $(G_j^m)^-$ вида $(\langle \ell\tau_2\rangle, \langle s\tau_2]$ (см. лемму 2.1), имеющих координаты, аналогичные координатам полуинтервалов G_0^m, E_0^m, E_i^m, G_j^m. В частности, выполнено равенство

$$I_m^- = (G_0^m)^- + (E_0^m)^- = (E_i^m)^- + (G_j^m)^-. \tag{25}$$

Определим на полуинтервалах I_0 и I_0^- общие градуировки

$$\begin{gathered}\mathrm{Grad} = \mathrm{Grad}_0 \cup \mathrm{Grad}_1 \cup \mathrm{Grad}_2 \cup \mathrm{Grad}_3,\\ \mathrm{Grad}^- = \mathrm{Grad}_0^- \cup \mathrm{Grad}_1^- \cup \mathrm{Grad}_2^- \cup \mathrm{Grad}_3^-,\end{gathered} \tag{26}$$

позволяющие говорить о производных d^k последовательностей $O_m^\pm$ (13), (22) для m и k, равных $0, 1, 2, 3 \ldots$ Поскольку определение последовательностей $O_m^\pm$ включает в себя соответствующие полуинтервалы $I_m^\pm$, то вместо обозначения (5) будем использовать сокращенное обозначение $d^k O_m^\pm$.

Лемма 2.2. *Производные d^4 последовательностей O_i, O_i^-, $i = 0, 1, 2, 3$, и аффинное отображение h_0 (8) связаны между собой соотношением*

$$d^4 O_i^\pm = O_{i+4}^\pm = h_0 O_i^\pm. \tag{27}$$

Доказательство. Справедливость правой части равенства непосредственно следует из вида орбит $O_i^\pm$ и $O_{i+4}^\pm$. Проведем доказательство правой части для $i = 0$. Воспользуемся разбиениями $I_4^\pm = (G_0^4)^\pm + (E_0^4)^\pm = (E_7^4)^\pm + (G_5^4)^\pm$ (24), (25). Заметим, что $I_4^\pm$ переходит из одного вида разбиения в другой с помощью двух сдвигов: сдвига на $e^4 = \mathfrak{S}_4 = \tau_2^{-3}$ или сдвига на $-g^4 = -\mathfrak{S}_4' = -\tau_2^{-3}(\tau_2 - 1)$. Правый конец полуинтервала E_7^4, по лемме 2.1, принадлежит последовательности O_4 и его длина равна сдвигу этой орбиты, следовательно, для выполнения $d^4 O_0 = O_4$ необходимо сдвигом орбиты $d^4 O_0$ выбрать $\mathfrak{S}_4$. Для справедливости $d^4 O_0^- = O_4^-$ сдвигом на $d^4 O_0^-$ будем считать сдвиг $-\mathfrak{S}_4$, равным длине полуинтервала $(E_0^4)^-$. Для доказательства правой части равенства (27) при $i = 1, 2, 3$ необходимо провести аналогичные рассуждения, воспользовавшись разбиениями (24), (25) полуинтервалов I_i, I_i^-. ■

Лемма 2.3. *Пусть даны последовательности O_0, O_0^- и пара дополняющих друг друга последовательностей O_2^-, O_2. Тогда производная d^2 и аффинное отображение $h_{(0,2)}^-$ (11) связывают эти последовательности соотношением*

$$d^2 O_0^\pm = O_2^\mp = h_{(0,2)}^- O_0^\pm, \tag{28}$$

а для производных d^1, d^3 орбит $O_0^\pm$ справедливы равенства

$$d^1 O_0^\pm = O_1^\pm, \quad d^3 O_0^\pm = O_3^\mp. \tag{29}$$

Доказательство. Соотношение $O_2^{\mp} = h^{-}_{(0,2)} O_0^{\pm}$ вытекает из определения орбит $O_2^{\pm}$, $O_0^{\pm}$ и аффинного отображения $h^{-}_{(0,2)}$. Правую часть равенства (28) и формулы (29) можно получить, воспользовавшись способом доказательства леммы 2,2 взяв

$$\begin{aligned} I_1^{\pm} &= (G_0^1)^{\pm} + (E_0^1)^{\pm} = (E_2^1)^{\pm} + (G_1^1)^{\pm}, \\ I_2^{\pm} &= (G_0^2)^{\pm} + (E_0^2)^{\pm} = (E_2^2)^{\pm} + (G_3^2)^{\pm}, \\ I_3^{\pm} &= (G_0^3)^{\pm} + (E_0^3)^{\pm} = (E_2^3)^{\pm} + (G_5^3)^{\pm}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathfrak{S}(\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell^{\pm}), \gamma): \ \{a_i \in \mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell^{\pm}) \longmapsto (a_i + \gamma) \bmod |I_\ell^{\pm}|\}$$

– орбита, полученная сдвигом всех точек $\mathrm{Orb}(a_0, \alpha, I_\ell^{\pm})$ на γ.

Лемма 2.4. *Производные d^1, d^3 орбит $O_0^{\pm}$ и аффинные отображения $h_{(0,1)}$ (18), $h^{-}_{(0,3)}$ (19) связаны между собой следующими соотношениями:*

$$\begin{aligned} d^1 O_0^{\pm} &= O_1^{\pm} = h_{(0,1)} O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h_{(0,1)} O_0^{\pm}, \tau_2^{-1}), \\ d^3 O_0^{\pm} &= O_3^{\mp} = h^{-}_{(0,3)} O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h^{-}_{(0,3)} O_0^{\pm}, \tau_2^{-2}). \end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Левые равенства доказаны в лемме 2.4. Докажем правые равенства. Посмотрим каковы будут сдвиги на орбитах $h_{(0,1)} O_0^{\pm}$. Они равны $\pm\tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)$ и явно отличны от сдвигов последовательностей $O_1^{\pm}$, т.к. на них сдвиги $\pm\tau_2^{-1}$. Знак $+$ или $-$ у сдвига определяется орбитой, на которой он действует. Из справедливости равенства $2\tau_2^{-1} - k\tau_2^{-1}(\tau_2 - 1) = \tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)$, где $k = \left[\frac{2\tau_2^{-1}}{\tau_2^{-1}(\tau_2 - 1)}\right] = 1$, следует, что сдвиги $\pm\mathfrak{S}'_1 = \pm\tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)$ равносильны удвоенным сдвигам $\pm\mathfrak{S}_1 = \pm\tau_2^{-1}$ на орбитах $O_1^{\pm}$. Таким образом, с помощью сдвигов $\pm\mathfrak{S}'_1 = \pm\tau_2^{-2}(\tau_2 - 1)$ получаются все точки $a_i \in O_1^{\pm}$ с четными индексами $i = 0, 2, 4, \ldots$,

$$\pm i\mathfrak{S}_1 = \pm\frac{i}{2}\mathfrak{S}'_1 \bmod |I_1^{\pm}| \text{ для } a_i \in O_1^{\pm}, i = 0, 2, 4, \ldots$$

Точки $a_i \in O_1^{\pm}$ с нечетными индексами получаются с помощью сдвига $\pm\mathfrak{S}_1$ начальной точки нечетное количество раз.

Пусть $a_i \in O_1^{\pm}$ – точка с нечетным индексом i. Тогда она получена с помощью сдвига $\pm i\mathfrak{S}_1 = \pm i\tau_2^{-1}$. Любое нечетное число представимо в виде $i = j-1$, где j четное. Перепишем сдвиг $\pm i\mathfrak{S}_1$ в следующем виде: $\pm i\mathfrak{S}_1 = \pm(1+j)\mathfrak{S}_1 = \pm(\mathfrak{S}_1 + j\mathfrak{S}_1)$. По уже доказанному, имеем $\pm j\mathfrak{S}_1 = \pm\frac{j}{2}\mathfrak{S}'_1 = \pm\frac{i-1}{2}\mathfrak{S}'_1$, т.е. все точки $a_i \in O_1^{\pm}$ с i нечетным получаются с помощью сдвигов

$$\pm i\mathfrak{S}_1 = \pm(\mathfrak{S}_1 + \frac{i-1}{2}\mathfrak{S}'{}_1) \bmod |I_1^{\pm}| \text{ для } a_i \in O_1, i = 1,3,5,\dots$$

Окончательно получим: орбиты $h_{(0,1)}O_0^{\pm}$ – четные точки орбит $O_1^{\pm}$, а орбиты $\mathfrak{S}(h_{(0,1)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2-1)$ – нечетные.

Проведя аналогичные рассуждения для орбит $h^{-}_{(0,3)}O_0^{\pm}$ и $O_3^{\mp}$, придем к замене двойных сдвигов $\pm\mathfrak{S}_3 = \pm\tau_2-2$ сдвигами $\pm\mathfrak{S}'_3 = \pm\tau_2^{-3}(\tau_2-1)$ и, как следствие, к формулам сдвигов на $O_3^{\pm}$:

$$\pm i\mathfrak{S}_3 = \pm\frac{i}{2}\mathfrak{S}'{}_3 \bmod |I_3^{\pm}| \text{ для } a_i \in O_3^{\pm}, i = 0,2,4,\dots$$

$$\pm i\mathfrak{S}_3 = \pm(\mathfrak{S}_3 + \frac{i-1}{2}\mathfrak{S}'{}_3) \bmod |I_3^{\pm}| \text{ для } a_i \in O_3^{\pm}, i = 1,3,5,\dots$$

Таким образом, орбиты $h^{-}_{(0,3)}O_0^{\pm}$ – четные точки $O_3^{\mp}$, а точки, принадлежащие орбитам $\mathfrak{S}(h^{-}_{(0,3)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2-2)$ – нечетные точки из $O_3^{\mp}$. ■

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующие утверждения

Теорема 2.1. *Для $k = 1,2,3,\dots$ производные d^{4k}, аффинное отображение h_0 (8) и последовательности O_m, O_m^- (13), (22) с $m \geqslant 0$ связаны между собой следующим соотношением:*

$$d^{4k}O_m^{\pm} = h_0^k O_m^{\pm} = O_{m+4k}^{\pm}, \tag{31}$$

где $h_0^k = \underbrace{h_0 \dots h_0}_{k}$ – аффинное отображение , равное композиции из k отображений h_0.

Доказательство. Сначала докажем соотношение

$$d^{4k}O_i^{\pm} = h_0^k O_i^{\pm} = O_{4k+i}^{\pm},\ i = 0,1,2,3. \tag{32}$$

Для $k = 1$ равенство (32) доказано в лемме 2.2. Пусть справедливо

$$d^{4(k-1)}O_i^{\pm} = h_0^{k-1}O_i^{\pm} = O_{4(k-1)+i}^{\pm},\ i = 0,1,2,3,$$

тогда по свойствам производных (2), (4) и лемме 2.2

$$d^{4k}O_i^{\pm} = d^4(d^{4(k-1)}O_i^{\pm}) = d^4(h_0^{k-1}O_i^{\pm}) =$$

$$= h_0^{k-1}(d^4O_i^{\pm}) = h_0^{k-1}h_0O_i^{\pm} = h_0^kO_i^{\pm}.$$

Соотношение $h_0^kO_i^{\pm} = O_{4k+i}^{\pm}$ непосредственно следует из вида последовательностей $O_{4k+i}^{\pm}$.

С учетом (32), для $m \equiv 0 \pmod 4$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$d^{4k}O_m^{\pm} = d^{4k}(d^mO_0^{\pm}) = d^{4k+m}O_0^{\pm} = O_{m+4k}^{\pm} = d^{4k+m}O_0^{\pm} =$$
$$= d^mh_0^kO_0^{\pm} = h_0^kd^mO_0^{\pm} = h_0^kO_m^{\pm},$$

для $m \equiv 1 \pmod 4$:

$$d^{4k}O_m^{\pm} = d^{4k}(d^{m-1}O_1^{\pm}) = d^{4k+(m-1)}O_1^{\pm} = O_{1+(m-1)+4k}^{\pm} = O_{m+4k}^{\pm} =$$
$$= d^{4k+(m-1)}O_1^{\pm} = d^{m-1}h_0^kO_1^{\pm} = h_0^kd^{m-1}O_1^{\pm} = h_0^kO_m^{\pm},$$

для $m \equiv 2 \pmod 4$:

$$d^{4k}O_m^{\pm} = d^{4k}(d^{m-2}O_2^{\pm}) = d^{4k+(m-2)}O_2^{\pm} = O_{2+(m-2)+4k}^{\pm} = O_{m+4k}^{\pm} =$$
$$= d^{4k+(m-2)}O_2^{\pm} = d^{m-2}h_0^kO_2^{\pm} = h_0^kd^{m-2}O_2^{\pm} = h_0^kO_m^{\pm},$$

и для $m \equiv 3 \pmod 4$:

$$d^{4k}O_m^{\pm} = d^{4k}(d^{m-3}O_3^{\pm}) = d^{4k+(m-3)}O_3^{\pm} = O_{3+(m-3)+4k}^{\pm} = O_{m+4k}^{\pm} =$$
$$= d^{4k+(m-3)}O_3^{\pm} = d^{m-3}h_0^kO_3^{\pm} = h_0^kd^{m-3}O_3^{\pm} = h_0^kO_m^{\pm}. \quad \blacksquare$$

Теорема 2.2. *Производные d^{4k-i}, $i = 1, 2, 3$, и $k = 1, 2, 3, \ldots$, аффинные отображения h_0, $h_{(0,1)}$, $h_{(0,2)}^-$, $h_{(0,3)}^-$ и последовательности O_m, O_m^- (13), (22) связаны следующими соотношениями:*

$$d^{4k-3}O_0^{\pm} = O_{4k-3}^{\pm} = h_0^{k-1}(h_{(0,1)}O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h_{(0,1)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2^{-1})),$$

$$d^{4k-2}O_0^{\pm} = O_{4k-2}^{\mp} = h_0^{k-1}h_{(0,2)}^-O_0^{\pm}, \tag{33}$$

$$d^{4k-1}O_0^{\pm} = O_{4k-1}^{\mp} = h_0^{k-1}(h_{(0,3)}^-O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h_{(0,3)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2^{-2})).$$

Доказательство. Для $k = 1$ равенства доказаны в леммах 2,3, 2.4. Воспользовавшись формулами (2), (4) и леммой 2.3, получим три цепочки равенств для каждого из соотношений (33):

$$\begin{aligned} d^{4k-3}O_0^{\pm} &= d^{4(k-1)+1}O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}d^1 O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}O_1^{\pm} = O_{4(k-1)+1}^{\pm} = \\ &= O_{4k-3}^{\pm} = d^{4(k-1)}O_1^{\pm} = h_0^k O_1^{\pm} = \\ &= h_0^k(h_{(0,1)}O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h_{(0,1)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2^{-1})). \\ d^{4k-2}O_0^{\pm} &= d^{4(k-1)+2}O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}d^2 O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}O_2^{\mp} = O_{4(k-1)+2}^{\mp} = \\ &= O_{4k-2}^{\mp} = d^{4(k-1)}O_2^{\mp} = h_0^k O_2^{\mp} = h_0^k h_{(0,2)}^{-} O_0^{\pm}. \\ d^{4k-1}O_0^{\pm} &= d^{4(k-1)+3}O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}d^3 O_0^{\pm} = d^{4(k-1)}O_3^{\mp} = O_{4(k-1)+3}^{\mp} = \\ &= O_{4k-1}^{\mp} = d^{4(k-1)}O_3^{\mp} = h_0^k O_3^{\mp} = \\ &= h_0^k(h_{(0,3)}O_0^{\pm} \cup \mathfrak{S}(h_{(0,3)}O_0^{\pm}, \pm\tau_2^{-2})). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 2.3. *Для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ производные d^k орбит $O_m^{\pm}$, $m \geqslant 0$, на градуировках* Grad *и* Grad^- *вычисляются по следующим правилам:*

$$d^k O_m^{\pm} = O_{k+m}^{o(k+m)} \quad \textit{для} \quad m \equiv 0, 1 \pmod 4,$$
$$d^k O_m^{\pm} = O_{k+m}^{o'(k+m)} \quad \textit{для} \quad m \equiv 2, 3 \pmod 4,$$

где $o(k + m)$, $o'(k + m)$ – символьные функции

$$o(x) = \begin{cases} \pm, & \textit{если} \quad x \pmod 4 = 0, 1, \\ mp, & \textit{если} \quad x \pmod 4 = 2, 3, \end{cases}$$
$$o'(x) = \begin{cases} \pm, & \textit{если} \quad x \pmod 4 = 2, 3, \\ \mp, & \textit{если} \quad x \pmod 4 = 0, 1. \end{cases}$$

Доказательство. Применяя теоремы 2.1 и 2.2, для $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ имеем

$$\begin{aligned} d^k O_m^{\pm} &= d^{k+m}O_0^{\pm} = d^{4[\frac{k+m}{4}]+(k+m)\mathrm{mod}4}O_0^{\pm} = d^{4[\frac{k+m}{4}]}d^{(k+m)\mathrm{mod}4}O_0^{\pm} = \\ &= d^{4[\frac{k+m}{4}]}O_{(k+m)\mathrm{mod}4}^{o(k+m)} = O_{k+m}^{o(k+m)}. \end{aligned}$$

Для $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ из аналогичных соображений справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} d^k O_m^{\pm} &= d^{k+m}O_0^{\mp} = d^{4[\frac{k+m}{4}]+(k+m)\mathrm{mod}4}O_0^{\mp} = d^{4[\frac{k+m}{4}]}d^{(k+m)\mathrm{mod}4}O_0^{\mp} = \\ &= d^{4[\frac{k+m}{4}]}O_{(k+m)\mathrm{mod}4}^{o'(k+m)} = O_{k+m}^{o'(k+m)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*, Изв. РАН, сер. матем., 2003. (В печати.)
2. Hyeong-Chai Jeong, Eunsang Kim, Chang-Yeong Lee, *Noncommutative torus from Fibonacci chains via foliation*, J. Phys. A **34**, No.31 (2001), R1-R19.
3. Н. Н. Мануйлов, *Рекуррентные самоподобные разбиения*, Чебышевский сборник **4**, вып. 2 (2003), Тула, 2003.
4. Н. Н. Мануйлов, *Непрерывный ветвящийся B-процесс и собственные разбиения окружности*, Труды XXV Конференции молодых ученых мех.-мат. фак. МГУ, М., МГУ, 2003.
5. Н. Н. Мануйлов, *Основные свойства серебряного сечения $1+\sqrt{2}$ и некоторые числовые последовательности, ему соответствующие*, Сборник трудов молодых ученых, вып. 3, Владимир, 2003.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 12 сентября 2003 г.