Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

Г. В. Кузьмина

МЕТОД ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МЕТРИКИ В ЗАДАЧАХ О МАКСИМУМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

§0. Введение

Пусть $a_1, \dots, a_n$ – система различных точек z-сферы. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство систем неналегающих односвязных областей $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяющих условию $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – система положительных чисел. Под задачей, указанной в заглавии, будем понимать вопрос о максимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, a_k) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}$, где $M(D_k, a_k)$ – приведенный модуль области D_k относительно точки $a_k : M(D_k, a_k) = \frac{1}{2\pi} \log R(D_k, a_k)$, где $R(D_k, a_k)$ – конформный радиус области D_k относительно точки a_k, если $a_k \neq \infty$, $M(D_n, a_n) = -\frac{1}{2\pi} \log R(D_n, a_n)$, если $a_n = \infty$.

Максимум суммы (1) в семействе $\mathcal{D}$ будем обозначать через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Хорошо известно, что указанная задача равносильна экстремально-метрической проблеме для семейства классов кривых, гомотопным точечным кривым в точках a_k. Метод экстремальной метрики устанавливает единственность экстремальной системы областей семейства $\mathcal{D}$ и приводит к условиям, определяющим величину искомого максимума. Однако при достаточно больших значениях n конкретное решение задачи связано со значительными трудностями, если система точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ не обладает надлежащей симметрией.

Задача о максимуме произведения степеней конформных радиусов имеет богатую историю (см., например, [1]). В последние годы значительное внимание уделялось задаче о максимуме суммы (1) в том случае, когда точки a_k изменяются таким образом, что их расположение характеризуется высокой степенью симметрии. Один из первых результатов такого рода получен В. Н. Дубининым в [2] (см. также [3]): если $a_1, \dots, a_n$, $n \geqslant 3$, – произвольные точки окружности $|z| = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, то максимум произведения (1) достигается в том и только в том случае, когда a_k, $k = 1, \dots, n$, – равноотстоящие точки на окружности $|z| = 1$. При доказательстве этого и других результатов в [2] В. Н. Дубинин использовал предложенное им разделяющее преобразование областей и технику вычисления модулей конденсаторов при соответствующем предельном переходе. При этом рассматривалось разбиение z-сферы на систему углов S_k, граница каждого из которых содержит некоторые из точек системы $\{a_1, \dots, a_n\}$. Используя геометрическое построение, предложенное В. Н. Дубининым, Е. Г. Емельянов [4] разработал экстремально-метрический подход решения задачи о максимуме суммы (1), установив связь между различными задачами об экстремальном разбиении [4, теорема 1]. Этот результат получил интересные приложения, однако доказательство упомянутой теоремы в [4] оказалось достаточно сложным.

С другой стороны, в последующих работах автора было замечено, что в основе упоминавшихся выше результатов В. Н. Дубинина и Е. Г. Емельянова лежит следующий простой факт метода экстремальной метрики. Пусть по-прежнему $\{S_l\}_{l=1}^m$ – система углов, заполняющих z-сферу, стороны каждого из этих углов проходят через некоторые из точек a_k, $k = 1, \dots, n$. Пусть $a_{l,1}, a_{l,2}, \ldots$ – точки системы $\{a_k\}_{k=1}^n$, принадлежащие границе и внутренности угла S_l. Рассмотрим отображение $w = f_l(z)$ угла S_l на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Пусть $b_{l,1}, b_{l,2}, \ldots$ – образы точек $a_{l,1}, a_{l,2}, \ldots$ при этом отображении. На w-сфере рассмотрим задачу о $\mathcal{M}(b_{l,1}, b_{l,2}, \ldots; \beta_{l,1}, \beta_{l,2}, \ldots)$, где $\beta_{l,j}$ – положительные числа. Предполагаем, что решение последней задачи известно и для $\mathcal{M}(b_{l,1}, b_{l,2}, \ldots; \beta_{l,1}, \beta_{l,2}, \ldots)$ имеется достаточно простое выражение. Пусть $Q_l(w)dw^2$ – ассоциированный квадратичный дифференциал проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(b_{l,1}, b_{l,2}, \ldots; \beta_{l,1}, \beta_{l,2}, \ldots)$, и пусть $p_l(w)\,|dw| = |Q_l(w)|^{1/2}|dw|$ – экстремальная метрика этой проблемы модуля. Пусть $\rho(z)\,|dz|$ – метрика, определяемая на $\overline{\mathbb{C}}\,' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ условием

$$\rho(z)\,|dz| = \rho(f_l(z))\,|f_l'(z)|\,|dz| \quad \text{при} \quad z \in S_l \setminus \{a_1, \dots, a_n), \quad l = 1, \dots, m.$$

Числа $\beta_{l,j}$ всегда можно выбрать таким образом, что каждая достаточно малая окружность γ_k с центром в точке a_k, $k = 1, \dots, n$, имеет в метрике $\rho(z)\,|dz|$ длину $\geqslant \alpha_k$. В некоторых случаях из анализа структуры траекторий дифференциалов $Q_l(w)dw^2$ довольно легко следует, что указанное условие выполняется для каждой кривой на $\overline{\mathbb{C}}\,'$, гомотопной окружности γ_k, $k = 1, \dots, n$. Тогда метрика $\rho(z)\,|dz|$ оказывается допустимой в проблеме модуля, определяющей величину $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и мы получили для этой величины неравенство, содержащее известные выражения для $\mathcal{M}(b_{l,1}, b_{l,2}, \dots; \beta_{l,1}, \beta_{l,2}, \dots)$. В ряде случаев это неравенство позволяет установить симметрию в расположении точек a_k, $k = 1, \dots, n$, и получить таким образом полное решение задачи. Такой подход в более или менее явной форме использовался в [5, 6].

В настоящей работе мы даем новые приложения указанного подхода.

§1. Задача о $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; 1, \dots, 1, \alpha, \dots, \alpha)$, где a_k, b_k – чередующиеся точки окружности $|z| = 1$

1.1. Пусть $a_k = e^{i\varphi_k}$ и $b_k = e^{i(\varphi_k + \psi_k)}$, $k = 1, \dots, n$, – системы чередующихся точек окружности $|z| = 1$, перенумерованных в порядке возрастания $\arg z$:

$$0 < \varphi_{k+1} - \varphi_k = 2\pi\lambda_k \ (\text{здесь} \ \ \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi), \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

$$\psi_k = \delta_k \cdot 2\pi\lambda_k, \quad 0 < \delta_k < 1, \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим задачу о максимуме $2\pi\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; 1, \dots, 1, \alpha, \dots, \alpha)$ суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \Big\{ \log R(D_k, a_k) + \alpha^2 \log R(D_k', b_k) \Big\} \tag{2}$$

в семействе $\mathcal{D}^{(1)}$ систем неналегающих односвязных областей D_k, D_k', где $a_k \in D_k$, $b_k \in D_k'$, $k = 1, \dots, n$. Из единственности экстремальной конфигурации задачи об экстремальном разбиении следует, что экстремальная система областей рассматриваемой задачи в семействе $\mathcal{D}^{(1)}$ симметрична относительно окружности

$|z| = 1$. Поэтому достаточно рассматривать семейство $\mathcal{D}_0^{(1)}$ систем областей из $\mathcal{D}^{(1)}$, не содержащих точек 0, ∞.

Следующая теорема показывает, что максимум суммы (2) в каждом из семейств $\mathcal{D}_0^{(1)}$ и $\mathcal{D}^{(1)}$ реализуется только в случае равных значений $\lambda_k = 1/n$, $\delta_k = 1/2$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $n \geqslant 2$. Максимум величины $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; 1, \dots, 1, \alpha, \dots, \alpha)$ относительно всех указанных выше систем точек a_k, b_k реализуется только для симметричной системы точек $a_k^* = e^{i\pi(k-1)/n}$, $b_k^* = e^{i2\pi(k-1/2)/n}$, $k = 1, \dots, n$, и для систем, получающихся из этой системы преобразованием поворота $z \to e^{i\varphi_0} z$, φ_0 – вещественное число. Для искомого максимума имеем равенство*

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathcal{M}(a_1^*, \dots, a_n^*, b_1^*, \dots, b_n^*; 1, \dots, 1, \alpha, \dots, \alpha) = \\
&= n\Big\{ \log \frac{2}{1+\alpha} + \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \\
&- \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)\log(1+\alpha) + \alpha^2 \log(2\alpha) + (1+\alpha^2)\log\frac{2}{n}\Big\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Экстремальная система областей D_k^*, $D_k^{*\prime}$, $k = 1, \dots, n$, представляет собой систему круговых областей квадратичного дифференциала

$$\begin{aligned}
&Q^{(1)}(z)dz^2 = \\
&= -\frac{n^2}{4\pi^2}\,\frac{z^{n-2}[(1+\alpha)z^n + (1-\alpha)][(1-\alpha)z^n + (1+\alpha)]}{(z^{2n}-1)^2}\,dz^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Точки a_k^*, b_k^*, $k = 1, \dots, n$, являются полюсами второго порядка дифференциала (4).

1.2. При доказательстве теоремы 1 существенно используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $b = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0,\pi)$, $\alpha \in (0,1)$. Пусть $2\pi\mathcal{M}(1, -1, b, \overline{b}; 1, 1, \alpha, \alpha)$ – максимум суммы*

$$\log R(D_1, 1) + \log(D_2, -1) + \alpha^2\big[\log R(D_3, b) + \log R(D_4, \overline{b})\big]$$

в семействе всех четверок неналегающих односвязных областей $D_1, \dots, D_4$ на w-сфере, $1 \in D_1$, $-1 \in D_2$, $b \in D_3$, $\overline{b} \in D_4$. Имеют *место равенства*

$$2\pi\mathcal{M}\big(1,-1,e^{i\varphi},e^{-i\varphi};1,1,\alpha,\alpha\big)=$$
$$=2\pi\mathcal{M}\big(1,-1,i,-i;1,1,\alpha,\alpha\big)+2\alpha^2\log\sin\varphi,$$

$$2\pi\mathcal{M}\big(1,-1,i,-i;1,1,\alpha,\alpha\big)=2\log\frac{2}{1+\alpha}+\alpha(1-\alpha)\log(1-\alpha)-$$
$$-\alpha(1+\alpha)\log(1+\alpha)+\alpha^2\log(4\alpha^2). \qquad (5)$$

В случае $\varphi=\pi/2$ экстремальной системой областей $D_1^*,\dots,D_4^*$ служит система круговых областей квадратичного дифференциала

$$q^{(1)}(w)dw^2=$$
$$=-\frac{1}{\pi^2}\,\frac{[(1+\alpha)w^2+(1-\alpha)][(1-\alpha)w^2+(1+\alpha)]}{(w^4-1)^2}\,dw^2. \qquad (6)$$

Точки $1,-1,i,-i$ являются двойными полюсами этого дифференциала. Вещественная ось и окружность $|w|=1$ являются объединениями замыканий критических ортогональных траекторий дифференциала (6). В структуре ортогональных траекторий дифференциала (6) имеются 6 полосообразных областей, представляющих собой двуугольники $\Pi_1=\Pi_1(-1,1)$, $\Pi_2=\Pi_2(-1,1)$, $\Pi_3=\Pi_3(1,i)$, $\Pi_4=\Pi_4(-1,i)$, $\Pi_5=\Pi_5(1,-i)$, $\Pi_6=\Pi_6(-1,-i)$, имеющие вершины в указанных точках. Π_1 и Π_2 лежат соответственно внутри и вне круга $|w|<1$ и симметричны относительно вещественной оси, Π_1 содержит интервал $(-1,1)$, $\Pi_2=\{1/w : w\in\Pi_1\}$. Двуугольники Π_3, Π_4, Π_5, Π_6 симметричны относительно окружности $|w|=1$ и содержат дуги этой окружности, соединяющие их вершины, $\Pi_5=\{\overline{w} : w\in\Pi_3\}$, $\Pi_6=\{\overline{w} : w\in\Pi_4\}$. Двуугольники Π_1, Π_2, Π_3, Π_5 и Π_1, Π_2, Π_4, Π_6 полностью заполняют соответственно окрестности точек 1 и -1, двуугольники Π_3, Π_4 и Π_5, Π_6 полностью заполняют соответственно окрестности точек i и $-i$.

В случае $\varphi\neq\pi/2$ экстремальная система областей образуется прообразами областей D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^* при дробно-линейном отображении

$$f_0(w)=\frac{w-a}{1-aw},\quad \text{где}\ \ a=\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}, \qquad (7)$$

круга $|w<1$ на себя, $f_0(e^{i\varphi})=i$, $f_0(e^{-i\varphi})=-i$

Доказательство. Из результатов единственности метода экстремальной метрики следует, что экстремальной конфигурации задачи о $\mathcal{M}(1,-1,b,\overline{b};1,1,\alpha,\alpha)$ при отображении (7) соответствует экстремальная конфигурация задачи о $\mathcal{M}(1,-1,i,i;1,1,\alpha,\alpha)$. Далее, из соображений симметрии и условия $0<\alpha<1$ следует, что ассоциированный квадратичный дифференциал последней задачи имеет вид

$$q^{(1)}(w)dw^2=-\frac{A}{4\pi^2}\;\frac{(w^2+l^2)(w^2+1/l^2)}{(w^4-1)^2}dw^2,$$

где $A>0$, $0<l^2<1$. Используя нормирующие условия

$$\big[-4\pi^2(w-1)^2q^{(1)}(w)\big]_{w=1}=1,\quad \big[-4\pi^2(w-i)^2q^{(1)}(w)\big]_{w=i}=\alpha^2,$$

находим значения A и l^2:

$$A=4(1-\alpha^2),\quad l^2=(1-\alpha)/(1+\alpha)$$

и приходим к выражению (6). Описание структуры траекторий и ортогональных траекторий дифференциала (6), приведенное в формулировке леммы 1, легко вытекает из известных общих фактов о структуре траекторий квадратичных дифференциалов. Для функций $\zeta=g_k(w)$, где $g_k(w)$ реализует отображение области D_k^* на круг $|\zeta|<R(D_k^*,a_k)$, $g_k(a_k)=0$, $g_k'(a_k)=1$, имеем уравнения

$$-4\pi^2Q^*(w)dw^2=\big[d\log g_1(w)\big]^2\quad \text{при}\quad w\in D_1^*,$$

$$-4\pi^2Q^*(w)dw^2=\alpha^2\big[d\log g_3(w)\big]^2\quad \text{при}\quad w\in D_3^*,$$

и при достаточно малых $\varepsilon>0$ имеем равенства

$$2\pi\int\limits_0^{1-\varepsilon}\sqrt{-Q^*(w)}\,dw=\log R(D_1^*,1)-\log\varepsilon+O(\varepsilon),$$

$$2\pi\int\limits_{i+i\varepsilon}^{i/l}\sqrt{-Q^*(w)}\,dw=\alpha\big[\log R(D_3^*,i)-\log\varepsilon\big]+O(\varepsilon),$$

где интегрирование производится по соответствующим отрезкам. Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем выражения для $R(D_1^*,1)$ и $R(D_3^*,i)$ и равенство (5).

1.3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим разбиение z-сферы на n углов S_k, стороны угла S_k содержат точки a_k, a_{k+1}:

$$S_k = \{z : \varphi_k < \arg z < \varphi_{k+1}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $f_k(z) = \{e^{-i\varphi_k} z\}^{1/(2\lambda_k)}$,

$$\widetilde{f}_k(z) = f_{k,0} \circ f_k(z),$$

где $f_{k,0}(w)$ – функция (7) при $\varphi = \delta_k \pi$. При отображении $w = \widetilde{f}_k(z)$ углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $H = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, точки a_k, a_{k+1}, b_k переходят в $+1, -1, i$. На w-сфере рассмотрим задачу о $\mathcal{M}(1, -1, i, -i; 1, 1, \alpha_k, \alpha_k)$, где $\alpha_k = \lambda_k \alpha$. Для ассоциированного квадратичного дифференциала $q_k^{(1)}(w)dw^2$ этой задачи имеем равенство (6) при $\alpha = \alpha_k$. Рассмотрим метрику $\rho(z)\,|dz|$, определяемую условием

$$\rho(z)\,|dz| = \big[q_k^{(1)}(\widetilde{f}_k(z))\big]^{1/2} |\widetilde{f}_k'(z)|\,|dz|$$

$$\text{при} \quad S_k \setminus \{a_k, a_{k+1}, b_k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Покажем, что метрика $\rho(z)\,|dz|$ допустима в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; 1, \dots, 1, \alpha, \dots, \alpha)$. Достаточно рассматривать эту метрику на $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$. Пусть Γ_k – кривая на $\mathbb{C}'$, гомотопная точечной кривой в точке a_k. Обозначим через $\Pi_{k,j}$, $j = 1, \dots, 6$, полосообразные области дифференциала $q_k^{(1)}(w)dw^2$, являющиеся двуугольниками Π_j леммы 1 при $\alpha = \alpha_k$. Пусть $P_{k,1}$, $P_{k,2}$, $P_{k,3}$ и $P_{k,4}$ – прообразы соответственно двуугольников $\Pi_{k,1}^+ = \Pi_{k,1} \cap H$, $\Pi_{k,2}^+ = \Pi_{k,2} \cap H$, $\Pi_{k,3}$ и $\Pi_{k,4}$ при отображении $w = \widetilde{f}_k(z)$. Двуугольники $P_{k,1}$, $P_{k,2}$ и $P_{k,3}$ и двуугольники $P_{k-1,1}$, $P_{k-1,2}$ и $P_{k-1,4}$ заполняют окрестность точки a_k, а двуугольники $P_{k,3}$ и $P_{k,4}$ заполняют окрестность точки b_k. Очевидно, кривая Γ_k содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из перечисленных двуугольников и соединяющие их противоположные стороны, поэтому для длины кривой Γ_k в метрике $\rho(z)\,|dz|$ имеем неравенство

$$\text{дл.}_\rho \Gamma_k \geqslant 1.$$

Пусть теперь Γ_k' – кривая на $\mathbb{C}'$, гомотопная точечной кривой в точке b_k. Кривая Γ_k' содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из двуугольников $P_{k,3}$, $P_{k,4}$ и соединяющие их противоположные стороны, поэтому

$$\text{дл.}_\rho \Gamma_k' \geqslant \alpha.$$

Итак, метрика $\rho(z)\,|dz|$ допустима в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n;1,\dots,1,\alpha,\dots,\alpha)$. Отсюда и на основании того факта, что при отображении $w=\widetilde{f}_k(z)$ ε_k-окрестностям точек a_k, a_{k+1} и b_k соответствуют окрестности точек $1,-1,i$ радиусов $(2\lambda_k)^{-1}f_{k,0}'(1)\varepsilon_k$, $(2\lambda_k)^{-1}f_{k,0}'(-1)\varepsilon_k$, $(2\lambda_k)^{-1}\sin\delta_k\pi\varepsilon_k$, получаем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n;1,\dots,1,\alpha,\dots,\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant n\pi\mathcal{M}\big(1,-1,i,-i;1,1,\alpha,\alpha\big)+(1+\alpha^2)\sum_{k=1}^{n}\log(2\lambda_k). \tag{8}$$

В силу условия $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ имеем неравенство $\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\leqslant 1/n^n$, откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\log(2\lambda_k)\leqslant n\log\frac{2}{n},$$

и неравенство (8) принимает вид

$$2\pi\mathcal{M}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n;1,\dots,1,\alpha,\dots,\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant n\Big\{\pi\mathcal{M}\big(1,-1,i,-i;1,1,\alpha,\alpha\big)+(1+\alpha^2)\log\frac{2}{n}\Big\}. \tag{9}$$

Очевидно, равенство в (9) имеет место только для симметричных систем точек a_k, b_k. Отсюда и из равенства для $\mathcal{M}\big(1,-1,i,-i;1,1,\alpha,\alpha\big)$, установленного леммой 1, получаем равенство (3) для максимума величины $\mathcal{M}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n;1,\dots,1,\alpha,\dots,\alpha)$ в семействе $\mathcal{D}^{(1)}$ и выражение (4) для ассоциированного квадратичного дифференциала.

Круговые и полосообразные области дифференциалов (6) и (4), определяющих экстремальные конфигурации леммы 1 и теоремы 1 при $n=2$, схематично изображены на рис. 1 и 2.

Замечание 1. Теорема 1 легко распространяется на случай $\alpha>0$. Действительно, в предельном случае $\alpha=1$ доказательства и формулировки леммы 1 и теоремы 1 весьма просты. В

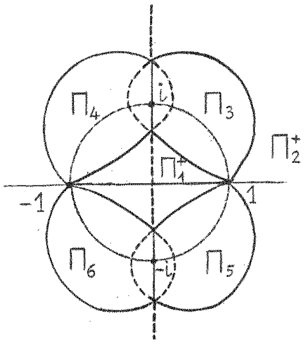

Рис. 1

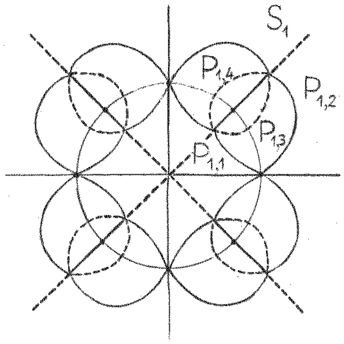

Рис. 2.

этом случае экстремальными областями D_k^* и $D_k^{*\prime}$, $k = 1, \dots, n$, теоремы 1 служат углы величины $2\pi/n$ с общей вершиной в начале координат и со сторонами, проходящими соответственно через точки b_{k-1}^*, b_k^* и a_k^*, a_{k+1}^*. Это утверждение представляет собой результат В. Н. Дубинина [2], а также непосредственно вытекает из более общего результата в [5]. Случай $\alpha > 1$ сводится к случаю $\alpha < 1$ при замене ролей точек a_k и b_k: для суммы (2) имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \Big\{ \log R(D_k, a_k) + \alpha^2 \log R(D_k', b_k) \Big\} =$$

$$= \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \log R(D_k', b_k) + 1/\alpha^2 \log R(D_k, a_k) \Big\}.$$

§2. Задача о $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n; \alpha, 1, \dots, 1)$, где a_k – точки окружности $|z| = 1$

2.1. Пусть $a_0 = 0$, $a_k = e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, – система точек окружности $|z| = 1$,

$$0 < \varphi_{k+1} - \varphi_k = 2\pi\lambda_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi), \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим задачу о максимуме $2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \dots,$

$a_n; \alpha, 1, \dots, 1)$ суммы

$$\alpha^2 \log R(D_0, 0) + \sum_{k=1}^{n} \log R(D_k, a_k) \tag{10}$$

в семействе $\mathcal{D}^{(2)}$ систем неналегающих односвязных областей D_k, $k = 0, 1, \dots, 1$, где $0 \in D_0$, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $n \geqslant 2$. Максимум величины $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, \ a_n; \alpha, 1, \dots, 1)$ в указанном семействе систем областей реализуется только для симметричных систем точек 0, $a_k^* = e^{i2\pi(k-1)/n}$, $k = 1, \dots, n$, и для систем, получающихся из них преобразованием поворота $z \to e^{i\varphi_0} z$, φ_0 – вещественное число. Для искомого максимума имеем равенство*

$$2\pi \mathcal{M}(0, a_1^*, \dots, a_n^*; \alpha, 1, \dots, 1) =$$
$$= n\Big\{ -\Big(1 - \frac{\alpha}{n}\Big)^2 \log\Big(1 - \frac{\alpha}{n}\Big) - \Big(1 + \frac{\alpha}{n}\Big)^2 \log\Big(1 + \frac{\alpha}{n}\Big) +$$
$$+ \frac{\alpha^2}{n^2} \log\Big(\frac{4\alpha^2}{n^2}\Big) + \log\frac{4}{n}\Big\}. \tag{11}$$

Экстремальной системой областей D_0^*, $D_1^*, \dots, D_n^*$ семейства $\mathcal{D}^{(2)}$ служит система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q^{(2)}(z)\, dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\ \frac{(n^2 - \alpha^2) z^n + \alpha^2}{z^2 (z^n - 1)^2}\, dz^2. \tag{12}$$

Каждая из точек $0, a_1^*, \dots, a_n^*$ является полюсом второго порядка дифференциала (12).

2.2. Лемма 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Пусть $2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1; 2\alpha, 1, 1)$ – максимум суммы*

$$4\alpha^2 \log R(D_0, 0) + \log R(D_1, 1) + \log R(D_2, -1) \tag{13}$$

в семействе всех троек неналегающих односвязных областей D_0, D_1, D_2 на w-сфере, $0 \in D_0$, $1 \in D_1$, $-1 \in D_2$. Имеем равенство

$$2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1; 2\alpha, 1, 1) =$$
$$= -2(1-\alpha)^2 \log(1-\alpha) - 2(1+\alpha)^2 \log(1+\alpha) +$$
$$+ 4\alpha^2 \log\alpha + (1 + 2\alpha^2)\log 4. \tag{14}$$

Экстремальной системой областей D_0^*, D_1^*, D_2^* служит система круговых областей квадратичного дифференциала

$$q^{(2)}(w)\,dw^2 = -\frac{1}{\pi^2}\,\frac{(1-\alpha^2)w^2+\alpha^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{15}$$

Точки $0, 1, -1$ являются двойными полюсами этого дифференциала. Вещественная ось является объединением замыканий критических ортогональных траекторий дифференциала (15). *В структуре ортогональных траекторий дифференциала* (15) *имеются 3 полосообразные области: $\Pi_1 = \Pi_1(0,1)$, $\Pi_2 = \Pi_2(0,-1)$, $\Pi_3 = \Pi_3(1,-1)$, имеющие вершины в указанных точках. Каждый из двуугольников Π_1, Π_2, Π_3 симметричен относительно вещественной оси, Π_1 и Π_2 симметричны друг с другом относительно мнимой оси и имеют общий граничный отрезок $[-i\alpha/(1-\alpha^2), i\alpha/(1-\alpha^2)]$, Π_1 содержит отрезок $(0,1)$, Π_2 – отрезок $(-1,0)$. Π_3 симметричен относительно обеих координатных осей и содержит отрезки $(1,\infty)$, $(-1,-\infty)$ вещественной оси и отрезки $(i\alpha/(1-\alpha^2); i\infty)$, $(-i\alpha/(1-\alpha^2), -i\infty)$ мнимой оси. Двуугольники Π_1 и Π_2 заполняют окрестность начала координат, двуугольники Π_1, Π_3 и Π_2, Π_3 заполняют соответственно окрестности точек 1 и -1.*

Доказательство. Выражение для максимума суммы (13) при всех $\alpha > 0$ непосредственно следует из известного результата Л. И. Колбиной [7], установленного методом вариаций. Мы приводим несложное доказательство леммы 2, используя стандартные результаты метода экстремальной метрики, поскольку нам требуется описание структуры траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала в случае $0 < \alpha < 1$.

Из соображений симметрии и условия $0 < \alpha < 1$ следует, что ассоциированный квадратичный дифференциал данной задачи имеет вид

$$q^{(2)}(w)dw^2 = -\frac{A}{4\pi^2}\,\frac{w^2+l^2}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2,$$

где $A > 0$, $0 < l^2 < 1$. Из нормирующих условий

$$\big[-4\pi^2(w-1)^2\,q^{(2)}(w)\big]_{w=0} = 4\alpha^2, \quad \big[-4\pi^2\,w^2\,q^{(2)}(w)\big]_{w=1} = 1,$$

находим

$$A = 4(1-\alpha^2), \quad l^2 = \alpha^2/(1-\alpha^2)$$

и приходим к выражению (15). Описание структуры ортогональных траекторий дифференциала (15) легко вытекает из общей теории. Для функций $\zeta = g_k(w)$, где $g_k(w)$ реализует отображение круговой области D_k^* дифференциала (15) на круг $|\zeta| < R(D_k^*, a_k), g_k(a_k) = 0$, $g_k'(a_k) = 1$, справедливы равенства

$$-4\pi^2 q^{(2)}(w)dw^2 = 4\alpha^2\big[d\log g_0(w)\big]^2 \quad \text{при} \quad w \in D_0^*,$$

$$-4\pi^2 q^{(2)}(w)dw^2 = \big[d\log g_1(w)\big]^2 \qquad \text{при} \quad w \in D_1^*.$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем равенства

$$2\pi\int\limits_{i\varepsilon}^{il}\sqrt{-q^{(2)}(w)}\,dw = 2\alpha\big(\log R(D_0^*,0) - \log\varepsilon\big) + O(\varepsilon),$$

$$2\pi\int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}\sqrt{-q^{(2)}(w)}\,dw = \log R(D_1^*,1) - \log\varepsilon + O(\varepsilon),$$

где интегрирование производится по прямолинейным отрезкам. В результате интегрирования и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ находим

$$2\alpha\log R(D_0^*,0) = (1-\alpha)\log(1-\alpha) - (1+\alpha)\log(1+\alpha) + 2\alpha\log(2\alpha),$$

$$\log R(D_1^*,1) = -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - (1+\alpha)\log(1+\alpha) + \log 2,$$

и приходим к выражению (14) для искомого максимума.

2.3. Доказательство теоремы 2. Разобьем z-сферу на n углов S_k с вершинами в начале координат и сторонами, проходящими через точки a_k, a_{k+1}:

$$S_k = \big\{z : \varphi_k < \arg z < \varphi_{k+1}\big\}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Пусть

$$f_k(z) = \big(ze^{-i\varphi_k}\big)^{1/(2\lambda_k)}.$$

При отображении $w = f_k(z)$ углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $H = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, точки $0, a_k, a_{k+1}$ переходят в $0, 1, -1$. На w-сфере рассмотрим задачу о $2\pi\mathcal{M}(0,1,-1;2\alpha_k,1,1)$, где $\alpha_k = \lambda_k \alpha$. Для ассоциированного квадратичного дифференциала $q_k^{(2)}(w)dw^2$ имеем равенство (15) при $\alpha = \alpha_k$. Пусть метрика $\rho(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho(z)\,|dz| = \left[q_k^{(2)}(f_k(z))\right]^{1/2}|f_k'(z)|\,|dz|$$
$$\text{при}\quad z \in S_k \setminus \{0, a_k, a_{k+1}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Нетрудно убедиться, что метрика $\rho(z)|dz|$ допустима в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n; \alpha, 1, \dots, 1)$. С этой целью рассмотрим прообразы $P_{k,j}$ двуугольников $\Pi_{k,j}^+ = \Pi_{k,j} \cap H_k$, $j = 1, 2, 3$, при отображении $w = f_k(z)$, где через $\Pi_{k,j}$, $j = 1, 2, 3$, обозначаем полосообразные области дифференциала $q_k^{(2)}(w)dw^2$, являющиеся двуугольниками Π_j леммы 2 при $\alpha = \alpha_k$. Двуугольники $P_{1,1}$, $P_{1,2}, \dots, P_{n,1}, P_{n,2}$ заполняют окрестность начала координат, каждый из них содержит дуги, соединяющие начало координат с соответствующей из точек a_k, $k = 1, \dots, n$. Двуугольники $P_{k,1}$, $P_{k,3}$, $P_{k-1,2}, P_{k-1,3}$ заполняют окрестность точки a_k, каждый из них содержит дуги, соединяющие точку a_k с одной из точек $0, a_{k+1}$ или a_{k-1}. Пусть Γ_k – кривая на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, a_1, \dots, a_n\}$, гомотопная точечной кривой в точке a_k. Из предыдущего следует, что кривая Γ_k содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из двуугольников $P_{k,1}$, $P_{k,3}$, $P_{k-1,2}$ и $P_{k-1,3}$ и соединяющие их противоположные стороны, поэтому для длины кривой Γ_k в метрике $\rho(z)|dz|$ имеем неравенство

$$\text{дл.}_\rho \Gamma_k \geqslant 1.$$

Пусть теперь Γ_0 – кривая на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, a_1, \dots, a_n\}$, гомотопная точечной кривой в начале координат. Тогда кривая Γ_0 содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из перечисленных выше двуугольников, заполняющих окрестность начала координат, и соединяющие их противоположные стороны, поэтому

$$\text{дл.}_\rho \Gamma_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha.$$

Учитывая, что метрика $\rho(z)|dz|$ допустима в рассматриваемой проблеме модуля и что при отображении $w = f_k(z)$ угла S_k на полуплоскость H ε-окрестностям точек a_k, a_{k+1} соответствуют $(2\lambda_k)^{-1}\varepsilon$-окрестности точек $1, -1$, получаем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n; \alpha, 1, \dots, 1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \bigl\{\pi\mathcal{M}(0,1,-1;2\alpha_k,1,1)+\log(2\lambda_k)\bigr\}.$$

Используя выражение для $\mathcal{M}(0,1,-1;2\alpha_k,1,1)$, приведенное в лемме 2, и условие $\alpha_k=\lambda_k\alpha$, отсюда получаем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n;\alpha,1,\dots,1)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Bigl[-(1-\alpha_k)^2\log(1-\alpha_k)-(1+\alpha_k)^2\log(1+\alpha_k)+$$

$$+(1+2\alpha_k^2)\log\alpha_k+\alpha_k^2\log 4\Bigr]+n\log\frac{4}{\alpha}.$$

Обозначим сумму в правой части последнего неравенства через $\mathcal{F}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Найдем максимум функции $\mathcal{F}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ при условии $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha$. Рассмотривая задачу на относительный экстремум, введем функцию

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\mathcal{F}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)-\mu\Bigl(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k-\alpha\Bigr),\quad \text{где } \mu \text{ – постоянная.}$$

Обозначим $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha_k}$ через $\varphi(\alpha_k)$. Имеем

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+2(1-\alpha)\log(1-\alpha)-2(1+\alpha)\log(1+\alpha)+4\alpha\log(2\alpha),$$
$$\varphi(0)=+\infty,\quad \varphi(1)=1.$$

Исследуем систему

$$\varphi(\alpha_k)=\mu,\qquad k=1,\dots,n. \tag{16}$$

Находим
$$\varphi'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}-2\log(1-\alpha^2)+4\log(2\alpha).$$

Так как $\varphi'(0)=-\infty$, $\varphi'(1)=+\infty$,

$$\varphi''(\alpha)=\frac{2}{\alpha^3}+\frac{4\alpha}{1-\alpha^2}+\frac{4}{\alpha}>0 \quad\text{при}\quad \alpha\in(0,1),$$

то $\varphi'(\alpha)$ возрастает на отрезке $(0,1)$ и имеет при $0<\alpha<1$ единственный нуль $\alpha_0=0,662$. При $\alpha\in(0,\alpha_0)$ $\varphi(\alpha)$ убывает от $+\infty$

до $\varphi(\alpha_0) = -0,168$, при $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ $\varphi(\alpha)$ возрастает от $\varphi(\alpha_0)$ до $\varphi(1) = 1$. Пусть $\alpha^* < \alpha_0$ – корень уравнения $\varphi(\alpha) = 1$ на интервале $(0, \alpha_0) : \alpha^* = 0,349$.

Пусть $n \geqslant 3$. Тогда

$$\left(\alpha_k\right)_{\min} \leqslant 1/3, \quad \varphi\left[\left(\alpha_k\right)_{\min}\right] > \varphi(\alpha^*) = 1,$$

и очевидно, что система (16) имеет единственное решение

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n.$$

Пусть $n = 2$. Система (16) может иметь решение α_1, α_2 с $\alpha_1 < \alpha_2$ только при $\alpha_1 \in [\alpha^*, \alpha_0)$, $\alpha_2 \in [\alpha_0, 1]$, но при $\alpha_2 \geqslant \alpha_0 = 0,662$ имеем $\alpha_1 \leqslant 0,338$ и потому $\alpha_1 < \alpha^*$, что противоречит условию $\alpha_1 \geqslant \alpha^*$. Следовательно, при всех $n \geqslant 2$ система (16) имеет единственное решение $\alpha_k = 1/n$, $k = 1, \dots, n$. Легко видеть, что при этом функция $\mathcal{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достигает максимума. Отсюда следует равенство (11) и выражение (12) для ассоциированного квадратичного дифференциала.

Структура круговых и полосообразных областей дифференциала (15) леммы 2 и дифференциала (12) теоремы 2 при $n = 4$ схематично изображена на рис. 3 и 4.

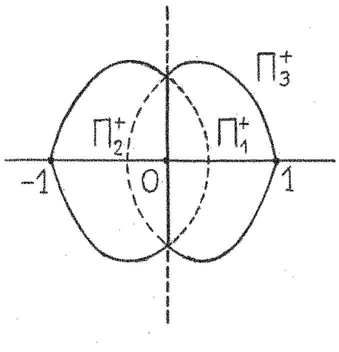

Рис. 3

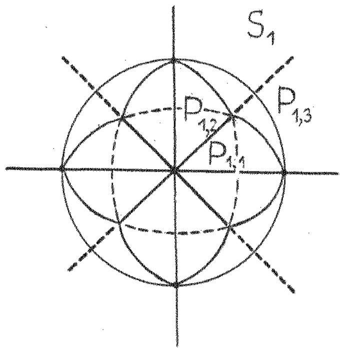

Рис. 4.

Замечание 2. Легко видеть, что доказательство теоремы 2 распространяется на случай $\alpha = 1$. В предельном случае $\alpha \to 0$ из теоремы 2 также вытекает уже упоминавшийся результат В. Н.

Дубинина [2]: в этом случае область D_0^* вырождается в точку и a priori ясно, что условие $0\overline{\in} \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k^*$, которому удовлетворяет экстремальная система областей D_k^*, $k = 1, \dots, n$, теоремы 2, не является ограничительным.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
3. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
4. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
5. Г. В. Кузьмина, *О связи различных задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 116–131.
6. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* I, II, Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275; **286** (2002), 126–147.
7. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении,* Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 17 ноября 2003 г.