Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

В. Н. Дубинин

ОБОБЩЕННЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ И АСИМПТОТИКА ИХ ЁМКОСТЕЙ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПЛАСТИН

Ёмкости множеств и конденсаторов имеют многочисленные приложения в различных областях математики. Асимптотическое поведение ёмкости конденсатора при сближении либо вырождении его пластин имеет особый интерес (см., например, [1–3]). Классический случай асимптотики ёмкости конденсатора из двух пластин при стягивании одной из них в точку ведёт к понятию приведённого модуля области, которое нашло существенное применение в геометрической теории функций комплексного переменного [4–6]. В ряде работ автора и его учеников рассматривалась асимптотика ёмкости конденсатора при стягивании одной пластины в конечное число точек, а, впоследствии, асимптотика более общего конденсатора с несколькими вырождающимися пластинами, включая пластины на границе поля такого конденсатора (см. об этом [7–9]). Параллельно в работах прежде всего Г. В. Кузьминой, Е. Г. Емельянова, А. Ю. Солынина и других математиков рассматривался экстремально-метрический подход к понятию приведённого модуля [10–12]. Оба подхода сопровождались приложениями в теории экстремальных задач для аналитических функций и смежных проблемах. Несмотря на фактическое применение обобщённых конденсаторов, их свойства в целом нигде не изучались, а известные асимптотические разложения ёмкости не охватывают всех возможных видов таких конденсаторов. В данной заметке частично восполняется указанный пробел: приводятся простейшие свойства обобщённых конденсаторов и показана асимптотика их ёмкости при вырождении некоторых пластин в точки. Во многом мы следуем недавней работе [9], в которой введено понятие обобщённого приведенного модуля, включающее как его внутренние так и граничные разно-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028), а также программы “Университеты России” (грант УР.04.01.016).

видности. Там же рассматривались некоторые свойства такого модуля и различные частные случаи, изученные ранее. В отличие от [9] и других работ, в данной статье делается акцент не на понятие приведённого модуля, а непосредственно на асимптотическое разложение ёмкости конденсатора. Такой подход представляется наиболее естественным и удобным в приложениях. В §3 выводится асимптотическая формула для ёмкости обобщённого конденсатора, сосредоточенного на некоторой области B комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$. В случае, когда пластины конденсатора стягиваются к внутренним точкам B, а фиксированная пластина совпадает с границей B (либо $B = \overline{\mathbb{C}}$), указанная формула может быть получена из известного представления энергии точечных зарядов [13, с. 127]. Такое представление распространяется, по-видимому, на некоторые заряды, сосредоточенные на границе множества B. Однако, мы предпочитаем прямое доказательство асимптотической формулы без привлечения других идей теории потенциала и развивая только понятие обобщённого конденсатора (§1). В любом случае требуется рассмотреть функцию Робина и ввести её аналог с полюсом в граничной точке (§2).

§1. Свойства обобщённых конденсаторов

Пусть B – область на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Желая различать граничные точки B, но не усложнять при этом изложения существа вопроса, ограничимся здесь конечносвязными областями B. Всюду ниже $\overline{B}$ означает компактификацию B посредством простых концов Каратеодори, граница ∂B – совокупность простых концов. Под окрестностью будем понимать любое открытое в $\overline{B}$ множество. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, мы будем отождествлять элемент $\overline{B}$, соответствующий внутренней точке B, с самой этой точкой, а носитель достижимой граничной точки и саму такую точку будем обозначать одной и той же буквой. В случае жордановой области B понятия замыкания $\overline{B}$ и границы ∂B совпадают с обычными, а окрестность в $\overline{B}$ есть пересечение открытого в $\overline{\mathbb{C}}$ множества с $\overline{B}$. Обобщённый конденсатор определим как тройку $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых в $\overline{B}$ попарно непересекающихся множеств E_k, $k = 1, \ldots, n$, а $\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$. Множества E_k, $k = 1, \ldots, n$, будем называть пластинами конденсатора C. Ёмкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора

C определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле

$$I(v,B) := \iint\limits_{B} |\nabla v|^2 dxdy$$

по всем *допустимым* функциям $v(z)$ $(z = x + iy)$, т.е. вещественным функциям $v(z)$, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки множества B за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и равным δ_k в некоторой окрестности пластины E_k, $k = 1, \dots, n$. Частные случаи таких конденсаторов встречались в работах [7–9]. Слово "обобщённый" вынесено в название параграфа и статьи, чтобы подчеркнуть, что такие конденсаторы ранее не рассматривались. В дальнейшем это слово будем опускать, называя $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$ просто конденсатором. Приведём сперва различные виды монотонности ёмкости, вытекающие из её определения.

Теорема 1. *Если конденсаторы* $C_1 = \big(B, \{E_{1k}\}_{k=1}^n, \triangle\big)$ *и* $C_2 = \big(B, \{E_{2k}\}_{k=1}^n, \triangle\big)$ *удовлетворяют условию* $E_{1k} \subset E_{2k}$, $k = 1, \dots, n$, *то*

$$\operatorname{cap} C_1 \leq \operatorname{cap} C_2.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $v(z)$, допустимая для конденсатора C_2, является также допустимой для конденсатора C_1.

Условимся говорить, что область $\widetilde{B}$ получена при расширении области B за счёт части границы $\gamma \subset \partial B$, если $B \subset \widetilde{B}$ и $\partial B \cap \widetilde{B}$ принадлежит γ.

Теорема 2. *Пусть* $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ *и пусть область* $\widetilde{B}$ *получена при расширении области* B *за счёт части границы* $\gamma \subset \partial B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. *Тогда*

$$\operatorname{cap} C \leq \operatorname{cap} \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C} = (\widetilde{B}, \mathcal{E}, \triangle)$.

Доказательство. Если функция $\widetilde{v}(z)$ допустима для конденсатора $\widetilde{C}$, то её сужение $v(z)$ на множество $\overline{B}$ допустимо для конденсатора C, причём

$$\operatorname{cap} C \leq I(v,B) \leq I(\widetilde{v}, \widetilde{B}).$$

Осталось перейти к инфимуму по всевозможным допустимым функциям $\widetilde{v}(z)$.

Теорема 3. *Пусть* $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$, $\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^n$, $E_1 \subset \partial B$, *и пусть область* $\widetilde{B}$ *получена при расширении области* B *за счёт* E_1. *Тогда для любого конденсатора* $\widetilde{C} = (\widetilde{B}, \widetilde{\mathcal{E}}, \triangle)$ *такого, что* $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\widetilde{E}_1, E_2, \dots, E_n\}$, $\widetilde{E}_1 \subset E_1 \cup \left(\overline{\widetilde{B}} \setminus \overline{B}\right)$, *справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} C \geq \operatorname{cap} \widetilde{C}\,.$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ – произвольная допустимая функция для конденсатора C, и пусть $\widetilde{v}(z)$ – продолжение этой функции в множество $(\overline{\widetilde{B}} \setminus B)$ по непрерывности:

$$\widetilde{v}(z) = \begin{cases} v(z), & z \in \overline{B}, \\ \delta_1, & \overline{\widetilde{B}} \setminus \overline{B}. \end{cases}$$

Тогда функция $\widetilde{v}(z)$ допустима для конденсатора $\widetilde{C}$, причём

$$I(v, B) = I(\widetilde{v}, \widetilde{B}) \geq \operatorname{cap} \widetilde{C}.$$

Осталось перейти к инфимуму по $v(z)$.

Из конформной инвариантности интеграла Дирихле и граничных свойств однолистных функций вытекают различные варианты конформной инвариантности ёмкости конденсатора. Мы не будем приводить их здесь, так как на практике в каждом конкретном случае сохранение ёмкости при конформном и однолистном отображении множества $B \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right)$ легко устанавливается. Остановимся на "принципах композиции".

Теорема 4. *Предположим, что конденсаторы* $C = \left(B, \{E_k\}_{k=1}^n, \{\delta_k\}_{k=1}^n\right)$ *и* $C_i = \left(B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\right)$, $i = 1, \dots, m$, *связаны следующими соотношениями:*

$B_i \subset B$, $i = 1, \dots, m$;

$B_i \cap B_{i'} = \varnothing$, $i \neq i'$, $i, i' = 1, \dots, m$;

для любого множества E_{ij}, $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, m$, *существует множество* E_k, $1 \leq k \leq n$, *такое, что* $E_{ij} \subset E_k$ *и* $\delta_{ij} = \delta_k$. *Тогда*

$$\operatorname{cap} C \geq \sum_{i=1}^m \operatorname{cap} C_i.$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ – допустимая функция конденсатора C. Сужения $v_i(z)$ этой функции на множества $\overline{B}_i$ допустимы для соответствующих конденсаторов C_i, $i = 1, \dots, m$. Следовательно,

$$I(v, B) \geq \sum_{i=1}^{m} I(v_i, B_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i.$$

Завершает доказательство переход к нижней грани.

Отметим полезное следствие теоремы 4. Величину, обратную ёмкости, иногда называют модулем конденсатора:

$$|C| := \frac{1}{\operatorname{cap} C}.$$

Пусть λ_i, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, m$, – вещественные числа, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Учитывая выпуклость функции $y = 1/x$, имеем

$$|C| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{m} |C_i|^{-1} \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\lambda_i |C_i|\big)^{-1} \right\}^{-1} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \, |C_i|.$$

Таким образом, в условиях теоремы 4 справедливо неравенство

$$|C| \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \, |C_i|$$

(ср. [11, с. 19]).

Теорема 5. *Предположим, что конденсаторы* $C = \big(B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n}\big)$ *и* $C_i = \big(B_i, \{E_{ij}\}_{j=1}^{n_i}, \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\big)$, $i = 1, \dots, m$, *удовлетворяют условиям:*

$B_i \cap B_{i'} = \varnothing$, $i \neq i'$, $i, i' = 1, \dots, m$,

$E_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_{i1}$,

$(\partial B_i \backslash E_{i1}) \cap B = \varnothing$, $\delta_{i1} = \delta_1$, $i = 1, \dots, m$,

для любого E_k, $k = 2, \dots, m$, *существует* E_{ij}, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq i \leq m$, *такое, что* $E_k \subset E_{ij}$, $\delta_k = \delta_{ij}$. *Тогда*

$$\operatorname{cap} C \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap} C_i.$$

Доказательство. Обозначим через $v_i(z)$ допустимую функцию конденсатора C_i, $i = 1, \ldots, m$. Функция

$$v(z) := \begin{cases} v_i(z), & z \in \overline{B} \cap \overline{B}_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \delta_1, & z \in \overline{B} \Big\backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}_i \right) \end{cases}$$

допустима для конденсатора C. Отсюда

$$\operatorname{cap} C \leq I(v, B) \leq \sum_{i=1}^{m} I(v_i, B_i).$$

Осталось воспользоваться произвольностью функций $v_i(z)$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 6. *Для любых вещественных* λ_i, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, *справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} C \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \operatorname{cap} C_i,$$

где

$$C_i = \big(B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \ \{\delta_{ki}\}_{k=1}^{n}\big), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$C = \left(B, \{E_k\}_{k=1}^{n}, \ \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \delta_{ki}\right\}_{k=1}^{n}\right).$$

Доказательство. Пусть функции $v_i(z)$ допустимы соответственно для конденсаторов C_i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда функция $v(z) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i(z)$ допустима для конденсатора C. По определению ёмкости конденсатора и с учётом выпуклости функции $y = x^2$, имеем последовательно

$$\operatorname{cap} C \leq I(v, B) = \iint\limits_{B} \left| \nabla \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i \right|^2 dx dy \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \iint\limits_{B} \big|\nabla v_i\big|^2 dx dy.$$

Переходя к инфимуму, получим требуемое неравенство для ёмкостей.

§2. Функция Робина и её аналог с полюсом в граничной точке

Рассмотрим сперва жорданову область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, ограниченную конечным числом аналитических кривых. Пусть Γ – непустое замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных жодановых дуг, и пусть z_0 – конечная точка множества $\overline{B}\setminus\Gamma$. Обозначим через $g_B(z, z_0, \Gamma)$ вещественную непрерывную функцию на $\overline{B}\setminus\{z_0\}$, непрерывно дифференцируемую на $\overline{B}\setminus(\Gamma \cup \{z_0\})$, гармоническую в $B\setminus\{z_0\}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&g_B(z, z_0, \Gamma) = 0 \qquad \text{при} \quad z \in \Gamma,\\
&\frac{\partial}{\partial n} g_B(z, z_0, \Gamma) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \partial B \setminus (\Gamma \cup \{z_0\}),
\end{aligned}
$$

$g_B(z, z_0, \Gamma) + \log|z - z_0|$ – гармоническая функция в окрестности $\overline{B} \cap \{z : |z - z_0| < \rho\}$ при некотором $\rho > 0$ ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль нормали к ∂B).

В случае, когда $z_0 = \infty$, функция $g_B(z, z_0, \Gamma)$ определяется аналогично с той лишь разницей, что требуется гармоничность $g_B(z, z_0, \Gamma) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. При $z_0 \in B$ функцию $g_B(z, z_0, \Gamma)$ называют функцией Робина области B с полюсом в точке z_0. В случае, когда $\Gamma = \partial B$, функция Робина совпадает с функцией Грина $g_B(z, z_0)$. Существование и единственность функции $g_B(z, z_0, \Gamma)$ в приведённых выше условиях легко проверяется.

Пусть теперь B – произвольная конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек, Γ – непустое замкнутое граничное подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент. Точку $z_0 \in \overline{B}\setminus\Gamma$ назовём *допустимой* (по отношению к B и Γ), если либо $z_0 \in B$, либо z_0 является достижимой граничной точкой области B. Во втором случае требуется дополнительно, чтобы любое однолистное конформное отображение $w = f(z)$ области B на жорданову область, ограниченную конечным числом аналитических кривых, $f(z_0) \neq \infty$, имело в окрестности точки $z_0 \neq \infty$ разложение вида

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha}(c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots), \tag{1}$$

где α – некоторое вещественное число, $0 < \alpha \leq 2$, и $c_0 \neq 0$. В случае $z_0 = \infty$ требуется разложение

$$f(z) = f(z_0) + (1/z)^{1/\alpha}(c_0 + c_1 1/z + \ldots), \tag{2}$$

$c_0 \neq 0$. Если $z_0 \in B$, то разложение (1) (или (2)) автоматически выполняется с $\alpha = 1$. Понятно, что вид разложения (1) и значение α не зависят от выбора функции $w = f(z)$. В частности, если в некоторой окрестности точки z_0 граница B состоит из двух прямолинейных отрезков (или лучей при $z_0 = \infty$) с общим концом в z_0, расположенных под "внутренним по отношению к области B" углом $\alpha\pi > 0$, то точка z_0 допустима и выполняется (1) (или (2)). Пусть функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область B на некоторую жорданову область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических кривых. Положим

$$g_B(z, z_0, \Gamma) := g_{f(B)}\left(f(z),\ f(z_0),\ f(\Gamma)\right), \quad \text{если} \quad z_0 \in B, \qquad (3)$$

$$g_B(z, z_0, \Gamma) := \alpha g_{f(B)}\left(f(z),\ f(z_0),\ f(\Gamma)\right), \quad \text{если} \quad z_0 \in \partial B,$$

где α берется из разложения (1) или (2). Данное определение не зависит от выбора функции $w = f(z)$, поскольку при конформном и однолистном отображении "гладкой" области на "гладкую" сохраняется гармоничность, граничные условия и вид разложения в окрестности полюса. Из свойств конформных отображений следует, что в окрестности конечной допустимой точки $z_0 \in \overline{B}$ имеет место разложение

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = -\log|z - z_0| + h(z), \qquad (4)$$

где $h(z)$ – некоторая гармоническая функция. В окрестности $z_0 = \infty$ имеем

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = \log|z| + h(z), \qquad (5)$$

с гармонической функцией $h(z)$. В разложениях (4–5) введём обозначение

$$r(B, \Gamma, z_0) = e^{h(z_0)}.$$

При однолистном и конформном отображении области B на гладкую область с разложением (1) или (2) в окрестности допустимой точки имеем

$$|c_0|\, r(B, \Gamma, z_0) = r(f(B),\ f(\Gamma), f(z_0)) \quad \text{при} \quad z_0 \in B,$$

$$|c_0|^{\alpha}\, r(B, \Gamma, z_0) = r^{\alpha}(f(B),\ f(\Gamma), f(z_0)) \quad \text{при} \quad z_0 \in \partial B. \qquad (6)$$

В случае, когда $z_0 \in B$ и $\Gamma = \partial B$, величина $r(B, \Gamma, z_0) \equiv r(B, z_0)$ называется внутренним радиусом области B относительно точки

z_0. Если при этом B – односвязная область, то $r(B, z_0)$ – конформный радиус. При $z_0 = \infty$ конформным радиусом иногда называют величину $r^{-1}(B, z_0)$, а число $h(z_0)$ – постоянной Робина области B. Вновь при $z_0 = \infty$ и $z_0 \in B \neq \varnothing$ ёмкостью Робина множества Γ относительно области B называется величина $r^{-1}(B, \Gamma, z_0)$. Систематическому изучению ёмкости Робина посвящена серия совместных работ Дюрена и других математиков (см., например, [14]). В случае, когда B – односвязная область, Γ – дуга её границы и $z_0 \in \partial B \backslash \Gamma$, величина $r(B, \Gamma, z_0)$ под разными названиями и с разных позиций рассматривалась, например, в работах [11, 15–17]. В общем случае эта величина, по-видимому, не изучалась.

§3. Асимптотика ёмкости конденсатора

Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим через $D(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удалённой точки определим $D(\infty, r) := \{z : |z| \geq 1/r\}$. Замкнутое множество $\widetilde{D}(z_0, r)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, зависящее от параметра $r > 0$, назовём почти кругом с центром в точке z_0 радиуса r, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют положительные функции $r_j(r)$, $0 < r < \varepsilon$, $j = 1, 2$, такие, что

$$D(z_0, r_1(r)) \subset \widetilde{D}(z_0, r) \subset D(z_0, r_2(r))$$

и $r_j(r) \sim r$ при $r \to 0$, $j = 1, 2$. Всюду ниже для заданной области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точки $z_0 \in B$ введём обозначение $E(z_0, r, B) = \widetilde{D}(z_0, r)$, где r настолько мало, что $\widetilde{D}(z_0, r) \subset B$; для достижимой граничной точки z_0 области B обозначим через $E(z_0, r, B)$ замыкание в $\overline{B}$ связной компоненты пересечения $B \cap \widetilde{D}(z_0, r)$, примыкающей к точке z_0.

Рассмотрим произвольную конечносвязную область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек. Пусть Γ – непустое замкнутое граничное подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент; $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных допустимых по отношению к B и Γ точек из $\overline{B}$; $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел. Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, n$, – произвольные положительные числа. Наша задача состоит в получении асимптотической формулы для ёмкости конденсатора

$$C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi):=(B,\mathcal{E},\widetilde{\Delta})\quad \text{при}\quad r\to 0,$$

где $\mathcal{E} = \{\Gamma, E(z_1,\psi_1(r)), E(z_2,\psi_2(r)),\dots,E(z_n,\psi_n(r))\}$ и $\widetilde{\Delta} = \{0,\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n\}$. Рассмотрим сначала случай гладких областей.

Теорема 7. *Если область B ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых, то в приведённых выше обозначениях справедлива асимптотическая формула*

$$\cap\, C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)=\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k}\right]\ \left(\frac{-1}{\log r}\right)+$$

$$+\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{\mu_k}{r(B,\Gamma,z_k)}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{\alpha_k\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}g_B(z_l,z_k,\Gamma)\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \tag{7}$$

где $\alpha_k=1$, если $z_k\in\partial B$, и $\alpha_k=2$, если $z_k\in B$, $k=1,\dots,n$.

Доказательство. Можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\ \delta_k^2\neq 0$, ибо в противном случае ёмкость конденсатора равна нулю. Если среди чисел δ_k, $k=1,\dots,n$, есть равные нулю, то полагаем $\delta_k\neq 0$ для $k=1,\dots,m$, и $\delta_k=0$ при $k=m+1,\dots,n$, $1<m<n$. В случае всех δ_k, отличных от нуля, считаем $m=n$. Введём обозначения $g_k(z):=g_B(z,z_k,\Gamma)$, $R_k:=r(B,\Gamma,z_k)$, $k=1,\dots,m$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g_r(z)=\sum_{k=1}^{m}\ \delta_k\ \sum_{l=1}^{m}\ \beta_{lk}\, g_l(z),$$

где

$$\beta_{lk}=\begin{cases}-\,(\log\psi_k)^{-1}(\log\psi_l)^{-1}\ g_l(z_k), & l\neq k,\\[2ex] -\,(\log\psi_k)^{-1}[1+(\log\psi_k)^{-1}\ \log R_k], & l=k,\end{cases}$$

$l=1,\dots,m$; $k=1,\dots,m$. Как и в работе [18], убеждаемся, что для любого $k=1,\dots,m$ множество $\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r)):=\{z\in$

$E(z_k,\psi_k(2r)) : g_r(z)/\delta_k \geq 1\}$ представляет собой почти круг (если $z_k \in B$), либо почти "полукруг" (если $z_k \in \partial B$) радиуса $\psi_k(r)$ с центром в точке z_k. Применяя формулу Грина и теорему Гаусса при достаточно малом $t > 0$, последовательно имеем

$$I\left(g_r, B\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r)\right) = -\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\partial\widetilde{E}(z_j,\psi_j(r))}\delta_j\,\frac{\partial g_r}{\partial n}\,ds =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int\limits_{(\partial D(z_j,t))\cap B}\frac{\partial g_r}{\partial n}\,ds = \pi\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\delta_j\sum_{k=1}^{m}\delta_k\beta_j l_k + o(1), \quad t\to 0.$$

Здесь дифференцирование производится по внешней нормали к множествам $\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r))$, $k = 1,\ldots,m$. Так как интеграл слева не зависит от t, то на самом деле $o(1) = 0$. После несложных вычислений и с заменой индексов суммирования j на k и k на l получаем отсюда

$$I\left(g_r, B\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r)\right) = \pi\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k}\right]\left(\frac{-1}{\log r}\right) +$$

$$+\pi\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{\mu_k}{R_k} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}\frac{\alpha_k\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}g_B(z_l)\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 +$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \qquad r\to 0. \tag{8}$$

Возьмем теперь $r_1 = r_1(r) > 0$ таким, что

$$\widetilde{E}\big(z_k,\psi_k(r_1)\big)\subset E\big(z_k,\psi_k(r)\big)\quad, k=1,\ldots,m,$$

и $r_1(r)\sim r$ при $r\to 0$. Из принципа Дирихле следует

$$I\left(g_{r_1}, B\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\widetilde{E}\big(z_k,\psi_k(r_1)\big)\right) \leq \cap C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi). \tag{9}$$

Далее подбираем $r_2 = r_2(r) > 0$ так, что $r_2(r)\sim r$ при $r\to 0$ и выполняются включения

$$\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2))\supset E(z_k,\psi_k(r)), \quad k=1,\ldots,n.$$

Здесь $\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)) := D(z_k,\psi_k(r_2))\cap\overline{B}$ при $k=m+1,\dots,n$. Пусть $\rho>0$ настолько мало, что множества $\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho))$, $k=m+1,\dots,n$, попарно непересекаются, и пусть далее $r\ll\rho$. Положим $M_k := \max\{|g_{r_2}(z)| : z\in\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho))\}$, $k=m+1,\dots,n$. Из определения $g_r(z)$ вытекает, что $M_k = O\left((\log r)^{-1}\right)$ при $r\to 0$. Следуя [19], рассмотрим функции

$$v_k(z) = M_k \log\left|\frac{z-z_k}{\psi_k(r_2)}\right| \Big/ \log\left(\frac{\psi_k(\rho)}{\psi_k(r_2)}\right),$$

$$z\in\overline{\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho))\setminus E(z_k,\psi_k(r_2))},\quad k=m+1,\dots,n.$$

При малых r функция

$$h(z)=\begin{cases} g_{r_2}(z), & z\in B\setminus\bigcup\limits_{k=m+1}^{n}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho)),\\ \max\left\{\min(g_{r_2}(z),v_k(z)),-v_k(z)\right\}, & \\ z\in\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho))\setminus\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)), & k=m+1,\dots,n,\\ 0, & z\in\bigcup\limits_{k=m+1}^{n}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)),\end{cases}$$

"срезанная" на $\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2))$ соответствующими константами δ_k, $k=1,\dots,m$, является допустимой для конденсатора $C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)$. Отсюда

$$\cap\, C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)\le I\left(h,B\setminus\bigcup_{k=1}^{n}E(z_k,\psi_k(r_2)\right)\le$$

$$\le I\left(g_{r_2},B\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)\right)+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n} I\left(v_k,\widetilde{E}(z_k,\psi_k(\rho))\setminus\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)\right)=$$

$$I\left(g_{r_2},B\setminus\bigcup_{k=1}^{m}\widetilde{E}(z_k,\psi_k(r_2)\right)+o\left((1/\log r)^2\right),\quad r\to 0.$$

Сравнивая полученную оценку с оценкой (9) и имея ввиду разложение (8), получим формулу (7). Теорема доказана.

В случае произвольной конечносвязной области B асимптотическая формула для ёмкости конденсатора $C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)$ вытекает из формулы (7), конформной инвариантности ёмкости и представлений (3), (6). Например, пусть все точки z_k совокупности Z граничные. Сопоставим каждой такой точке вещественное число α_k, $0<\alpha_k\leq 2$, из соответствующего разложения (1) или (2), справедливого в окрестности данной точки, $k=1,\dots,n$. Тогда формула (7) даёт

$$\cap C(r;B,\Gamma,Z,\Delta,\Psi)=\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k}\right]\ \left(\frac{-1}{\log r}\right)+$$
$$+\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\alpha_k\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{\mu_k}{r(B,\Gamma,z_k)}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{\alpha_l\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}g_B(z_l,z_k,\Gamma)\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+$$
$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\qquad r\to 0.$$

Если все точки z_k, $k=1,\dots,n$, внутренние и если $\Gamma=\partial B$, то таким же путём из формулы (7) получаем формулу, эквивалентную формуле (6) работы [18]. По поводу других частных случаев отметим, что если $B=\overline{\mathbb{C}}$ и $\Gamma=\varnothing$, то асимптотическое разложение ёмкости даёт теорема 1 работы [19]. Та же теорема приводит к асимптотике ёмкости конденсатора в случае, когда B – односвязная область и $\Gamma=\varnothing$ (см. [9, теорема 4]). В общем случае при $\Gamma=\varnothing$ асимптотическую формулу для ёмкости обобщённого конденсатора можно получить аналогично доказательству теоремы 7, но с привлечением функции Неймана. Из формулы (7) вытекает асимптотическое разложение величины, обратной ёмкости, – “модуля” конденсатора. Постоянный член в этом разложении принято называть “приведённым модулем”. Формула (7) и теоремы первого параграфа приводят к различным свойствам таких модулей (ср. [9]).

Литература

1. Г. Полиа и Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике,* М., 1962.
2. Я. С. Сойбельман, *Асимптотика ёмкости конденсатора с пластинами произвольной формы,* Сиб. мат. ж. **25**, No. 6 (1984), 167–181.

3. R. Kühnau, *Randeffekte beim elektrostatischen kondensator,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 132–144.
4. L. V. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic nullsets,* Acta. Math. **83,** No. 1/2 (1950), 101–129.
5. В. К. Хейман, *Многолистные функции,* М., 1960.
6. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
7. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи матем. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
8. В. Н. Дубинин, *Приведённые модули открытых множеств в теории аналитических функций,* Докл. РАН **363**, No. 6 (1998), 731–734.
9. В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, *Обобщенный приведённый модуль,* Дальневост. мат. ж. **3**, No. 2 (2002), 150–164.
10. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций,* I, II. Алгебра и анализ. **9**, вып. 3 (1997), 41–103, вып. 5 (1997), 1–50.
11. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы,* Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
12. A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings,* Lect. Notes in Math.: **1788** (2002).
13. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала,* М., 1966.
14. P. Duren, J. Pfaltzgraff, E. Thurman, *Physical interpretation and further properties of Robin capacity,* Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 211–219.
15. В М. Миклюков, *О некоторых граничных задачах теории конформных отображений,* Сиб. мат. ж. **18**, No. 5 (1977), 1111–1124.
16. J. Hersch, *On the reflection principle and some elementary ratios of conformal radii,* J. Anal. Math. **44** (1984/85), 251–268.
17. D. Gaier, W. Hayman, *On the computation of modules of long quadrilaterals,* Constr. Approx. **7** (1991), 453–467.
18. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые её применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
19. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалёв, *Приведённый модуль комплексной сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток
E-mail:dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 8 октября 2003 г.