Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 302, 2003 г.

В. Н. Дубинин

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ. II

В работе автора [1] был предложен новый подход к получению неравенств для алгебраических полиномов. Основная идея этого подхода состоит в построении по заданному полиному конформного и однолистного отображения некоторого класса, а затем в применении к данному классу результатов геометрической теории функций комплексного переменного. Было рассмотрено несколько способов построения конформного отображения и получен ряд неравенств, которые в терминах теории функций можно трактовать как теоремы покрытия и искажения для алгебраических полиномов. Данная статья дополняет работу [1] в следующих направлениях. В §1 рассматривается аналог граничной леммы Шварца для неоднолистных отображений подмножеств единичного круга на круг. Во втором параграфе показано, что в отличие от [1] по заданному полиному можно строить неоднолистные отображения, применение к которым результатов §1 даёт уточнения неравенств бернштейновского типа. В §3 обсуждается обобщенная задача Менделеева, состоящая в оценке сверху функционала $|zP'(z)-\alpha P(z)|$, где $P(z)$ – полином степени не выше n. В частности, отмечается, что теорема 4.1 работы [1], сформулированная для натуральных k, распространяется на случай произвольных вещественных α, при этом уточняются некоторые известные результаты. Мы рассматриваем также нижнюю оценку указанного функционала. В четвёртом параграфе доказываются двусторонние оценки модуля производной полинома $P(z)$ с критическими точками на отрезке $[-1,1]$. Данные оценки содержат некоторые из анонсированных в конце статьи [1] неравенств. В заключительном §5 приводятся оценки коэффициентов полинома $P(z)$ при различных ограничениях на этот полином.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028), а также программы „Университеты России“ (грант УР.04.01.016).

§1. Граничные искажения регулярных в круге функций

К настоящему времени известно немало оценок для модуля производной регулярной функции в граничной точке. Например, если функция $w = f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, регулярна в круге $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, и если $f(z)$ определена также в некоторой точке z_0 окружности $|z| = 1$, где она имеет производную $f^{'}(z_0)$ и $|f(z_0)| = 1$, то согласно теореме Оссермана [2] справедливо неравенство

$$|f^{'}(z_0)| \geq p + \frac{1 - |c_n|}{1 + |c_n|} \,. \tag{1}$$

В случае $p = 1$ при дополнительном условии однолистности справедлива более сильная оценка

$$|f^{'}(z_0)| \geq \sqrt{1/|c_1|} \,, \tag{2}$$

вытекающая из различных результатов теории функций (см. об этом [3, с. 77–78], а также статью А. Ю. Солынина [4, с. 125]). В приложениях конформных отображений к неравенствам для полиномов и рациональных функций, как правило, фигурирует обратная функция $z = F(w) = d_1 w + \dots$, для которой неравенство (2) даёт

$$|F^{'}(w_0)| \leq \sqrt{1/|d_1|} \,, \qquad w_0 = f(z_0). \tag{3}$$

Можно предположить, что искусственное построение однолистной функции $z = F(w)$ по заданному „неоднолистному“ полиному ведёт к более слабым неравенствам, чем те, которые могут быть получены с учетом неоднолистности. С другой стороны, в этом случае функция $z = F(w)$ не имеет однозначной обратной функции $w = f(z)$ и, следовательно, мы не можем воспользоваться неравенствами (1), (2). Сказанное выше приводит к необходимости получения теорем искажения для произвольных регулярных функций $z = F(w)$, заданных на некотором подмножестве круга $|w| < 1$ и отображающих его на круг $|z| < 1$. В этой связи представляет интерес следующий простой результат.

Теорема 1. *Пусть функция $z = F(w)$ регулярна на открытом множестве G, $0 \in G \subset \{w : |w| < 1\}$; $F(w) \neq 0$, когда $w \in G \setminus \{0\}$;*

$|F(w)|<1$ при $w\in G$, и пусть в окрестности начала координат справедливо разложение

$$F(w)=d_n w^n+\dots\ ,\qquad d_n\neq 0.$$

Предположим, что все предельные граничные значения $|F(w)|$ в G равны единице. Тогда

$$|F(w)|\geq |w|^n\ ,\qquad w\in G. \tag{4}$$

Если, дополнительно, область G имеет на своей границе некоторую дугу λ окружности $|w|=1$, а функция $z=F(w)$ отображает эту дугу на дугу окружности $|w|=1$, то для любой внутренней точки w_0 дуги λ справедливо неравенство

$$|F^{'}(w_0)|\leq \frac{n^2\big(|d_n|+1\big)}{(n+1)|d_n|+n-1}\leq n. \tag{5}$$

Равенство достигается для функции $F(w)=d_n w^n$, $|d_n|=1$, и области $G=\{w:|w|<1|\}$.

Доказательство. Функция $w^n/F(w)$ регулярна на множестве G, причем все предельные граничные значения модуля этой функции в G не превосходят единицы. По принципу максимума модуля, на множестве G имеем $|w^n/F(w)|\leq 1$, т.е. выполняется неравенство (4). Отсюда следует, в частности, что

$$|d_n|\geq 1,$$

и справедливо правое неравенство в (5). Покажем, что левое неравенство в (5) верно в случае $|d_n|=1$. Действительно, для внутренней точки $w_0\in\lambda$, переходя к пределу по всем w таким, что $\arg F(w)=\arg F(w_0)$, имеем

$$\begin{aligned}|F^{'}(w_0)|&=\lim_{w\to w_0}\left|\frac{F(w_0)-F(w)}{w_0-w}\right|\\&\leq\lim_{w\to w_0}\frac{1-|F(w)|}{1-|w|}\leq\lim_{w\to w_0}\frac{1-|w|^n}{1-|w|}=n.\end{aligned}$$

Пусть теперь $|d_n|>1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\zeta) := \frac{\zeta - 1/d_n}{1-(1/\overline{d}_n)\zeta}\ ,$$

которая конформно и однолистно отображает круг $|\zeta|<1$ на себя. Ввиду (4), на множестве G определена функция

$$\widetilde{w} = \frac{\varphi^n\big(w^n/F(w)\big)}{F(w)},$$

которая регулярна в G и предельные граничные значения модуля которой не превосходят единицы. Вновь по принципу максимума модуля заключаем, что всюду в G справедливо неравенство

$$|\varphi^n\big(w^n/F(w)\big)| \le |F(w)|.$$

Отсюда для внутренней точки $w_0 \in \lambda$, как и выше, имеем

$$\begin{aligned} |F^{'}(w_0)| &= \lim_{w\to w_0}\frac{1-|F(w)|}{|w_0-w|} \le \lim_{w\to w_0}\frac{1-|\varphi^n\big(w^n/F(w)\big)|}{|w_0-w|} \\ &\le \lim_{w\to w_0}\left|\frac{\varphi^n\big(w_0^n/F(w_0)\big)-\varphi^n\big(w^n/F(w)\big)}{w_0-w}\right| = \left|\big(\varphi^n\big(w^n/F(w)\big)\big)^{'}_{w=w_0}\right| \\ &= n\left(1-\left|\frac{1}{d_n}\right|^2\right)\Bigg/\left(\left|1-\frac{1}{\overline{d}_n}\frac{w_0^n}{F(w_0)}\right|^2\right)\ \left|n-\frac{w_0F^{'}(w_0)}{F(w_0)}\right| \\ &\le n\ \frac{|d_n|+1}{|d_n|-1}\big(n-|F^{'}(w_0)|\big). \end{aligned}$$

Итоговое неравенство совпадает с (5). Случай равенства легко проверяется. Теорема доказана.

В условиях теоремы 1 рассмотрим множество $\widetilde{G} := \{w : w \in G,$ $|\widetilde{F}(w)| \ne 1\}$, где $\widetilde{F}(w) = F(w)/w^{n-1}$. Открытое множество $\widetilde{G}$ является объединением непересекающихся областей, совокупность которых обозначим через $\{D\}$. Функция $z = \widetilde{F}(w)$ регулярна в каждой области D из $\{D\}$. Предельные граничные значения модуля этой функции в D больше либо равны единице. Кроме того, $\widetilde{F}(0) = 0$, $\widetilde{F}^{'}(0) = d_n \ne 0$, и $\widetilde{F}(w) \ne 0$ при $w \in \widetilde{G}\setminus\{0\}$. Используя принцип аргумента, легко заключаем, что каждая область D совокупности $\{D\}$ либо отображается функцией $z = \widetilde{F}(w)$ в $|z| > 1$, либо конформно и однолистно отображается этой функцией на круг $|z| < 1$ (ср.[1, с.22–23]). Пусть теперь точка $w_0 \in \lambda$ из теоремы 1. Если $w_0 \in \partial D$ и $\widetilde{F}(D) \subset \{z : |z| > 1\}$, то в этой точке

$$0 \geq \frac{\partial |\widetilde{F}|}{\partial |w|} = \frac{\partial |F|}{\partial |w|} - (n-1) = |F^{'}(w_0)| - (n-1).$$

В случае $w_0 \in \partial D$ и $\widetilde{F}(D) = \{z : |z| < 1\}$ к обратной функции $w = \widetilde{F}^{-1}(z)$ применимо неравенство (2), согласно которому

$$|\widetilde{F}^{'}(w_0)| \leq \sqrt{1/|d_n|}\ .$$

Отсюда

$$|F^{'}(w_0)| \leq n - 1 + \sqrt{1/|d_n|}\ . \tag{6}$$

Таким образом, в любом случае выполняется неравенство (6). Сравнивая это неравенство с неравенством (5), элементарно заключаем, что при $|d_n| < (n-1)^2$ оно слабее (5), а при $|d_n| > (n-1)^2$ оно сильнее этого неравенства. Ранее нами применялось неравенство (6), а ниже мы приводим примеры применения теоремы 1.

§2. Некоторые уточнения неравенств бернштейновского типа для полиномов

В работах [1,5,6] с помощью конформных отображений получена серия неравенств для алгебраических полиномов. Применение неравенства (5) вместо неравенства (6), как это делалось в [1, 6], ведёт к уточнению некоторых результатов в случае $|d_n| < (n-1)^2$. Конечно, мы не будем здесь рассматривать все эти уточнения, и ограничимся лишь двумя примерами неравенств бернштейновского типа для полиномов на окружности и на отрезке.

Теорема 2. *Для любого полинома* $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, *и любой точки* z *на окружности* $|z| = 1$, *в которой* $\operatorname{Re} P(z)$ *отлична от* $L(P) := \min\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}$ *и* $H(P) := \max\{\operatorname{Re} P(z) : |z| = 1\}$, *справедливо неравенство*

$$\frac{|\mathrm{Im}\,(zP'(z))|}{\sqrt{(\mathrm{Re}\,P(z)-L(P))(H(P)-\mathrm{Re}\,P(z))}} \le \frac{n^2(H(P)-L(P)+2|c_n|)}{(n+1)(H(P)-L(P))+(n-1)2|c_n|} \le n. \tag{7}$$

Равенство в (7) достигается в случае $P(z)=c_0+c_nz^n$ для любых точек z, $|z|=1$, $z^n\neq\pm|c_n|/c_n$, где c_0 и c_n – произвольные комплексные числа, $c_n\neq 0$.

Доказательство. Можно считать, что $n\ge 2$ и $L(P)\neq H(P)$. Обозначим через $\zeta=\Phi(\omega)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\gamma:=[2L(P),2H(P)]$ на круг $|\zeta|<1$ так, что $\Phi(\infty)=0$, $\Phi(2L(P))=-1$, и положим

$$F(w):=\Phi\left(P(1/w)+\overline{P(\overline{w})}\right).$$

Легко видеть, что функция, обратная $\zeta=\Phi(\omega)$, имеет вид

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)(H(P)-L(P))+H(P)+L(P).$$

Отсюда

$$F(w)=\frac{H(P)-L(P)}{2c_n}\,w^n+\dots\,.$$

Функция $z=F(w)$, рассматриваемая на множестве $G:=\{w:|w|<1,\ P(1/w)+\overline{P(\overline{w})}\notin\gamma\}$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, в каждой точке w_0 окружности $|w|=1$, за исключением разве лишь конечного числа таких точек, выполняется неравенство (5), где $d_n=(H(P)-L(P))/(2c_n)$. Прямые вычисления дают

$$|F'(w_0)|=\frac{|\mathrm{Im}\,(P'(1/w_0)/w_0)|}{\sqrt{(\mathrm{Re}\,P(1/w_0)-L(P))(H(P)-\mathrm{Re}\,P(1/w_0))}}$$

(ср. [1, с. 35]). Осталось сделать замену $z=1/w_0$ и непосредственно проверить случай равенства. Теорема доказана.

Неравенство (7) уточняет теорему 1 работы [5] в случае, когда $|c_n| > \bigl(H(P)-L(P)\bigr)/\bigl(2(n-1)^2\bigr)$. Заметим, что $|c_n| \le \bigl(H(P)-L(P)\bigr)/2$, а для полиномов $P(z)=c_0+c_nz^n$ выполняется равенство $|c_n| = \bigl(H(P)-L(P)\bigr)/2$. Итоговое неравенство в (7), где в правой части стоит n, эквивалентно известному неравенству Бернштейна–Сеге.

Теорема 3. *Для любого полинома* $P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$, $\operatorname{Re} c_n \ne 0$, *и любой точки* z *на отрезке* $[-1,1]$, *в которой* $\operatorname{Re} P(z)$ *отлична от* $\overline{L}(P) := \min\{\operatorname{Re} P(z) : z \in [-1,1]\}$ *и* $\overline{H}(P) := \max\{\operatorname{Re} P(z) : z \in [-1,1]\}$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\left|\operatorname{Re} P'(z)\sqrt{1-z^2}\ \right|}{\sqrt{\bigl(\operatorname{Re} P(z)-\overline{L}(P)\bigr)\bigl(\overline{H}(P)-\operatorname{Re} P(z)\bigr)}}$$
$$\le \frac{n^2\bigl(\overline{H}(P)-\overline{L}(P)+2^{2-n}|\operatorname{Re} c_n|\bigr)}{(n+1)\bigl(\overline{H}(P)-\overline{L}(P)\bigr)+(n-1)2^{2-n}|\operatorname{Re} c_n|} \le n. \tag{8}$$

Равенство в (8) *достигается в случае* $P(z)=aT_n(z)+b$ *для полинома Чебышева* $T_n(z)=2^{n-1}z^n+\ldots$ *и любых вещественных* $a \ne 0$, *комплексных* b *и* $z \in [-1,1]$.

Доказательство. Можно считать, что $n \ge 2$ и $\overline{L}(P) \ne \overline{H}(P)$. Обозначим через $\zeta = \Phi(\omega)$ функцию, конформно и однолистно отображающую внешность отрезка $\overline{\gamma} := [2\overline{L}(P), 2\overline{H}(P)]$ на круг $|\zeta|<1$ так, что $\Phi(\infty)=0$, $\Phi(2\overline{L}(P))=-1$, и положим

$$F(w) := \Phi\left(P\left(\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right)+\overline{P\left(\frac{1}{2}\left(\overline{w}+\frac{1}{\overline{w}}\right)\right)}\ \right).$$

В некоторой окрестности начала координат имеет место разложение

$$F(w) = \frac{\overline{H}(P)-\overline{L}(P)}{2^{2-n}\operatorname{Re} c_n}\ w^n+\ldots\ .$$

Функция $z=F(w)$, рассматриваемая на множестве

$$G := \left\{w : |w|<1,\ P\left(\frac{1}{2}(w+1/w)\right)+\overline{P\left(\frac{1}{2}(\overline{w}+1/\overline{w})\right)} \notin \overline{\gamma}\right\},$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Доказательство завершается применением этой теоремы в некоторой точке $w_0, |w_0| = 1$, и прямым вычислением производной $F'(w_0)$ с последующей заменой $z = (w_0 + 1/w_0)/2$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Можно показать, что неравенство (8) усиливает классические неравенства Маркова и Бернштейна (см. [1, с. 39]). Неравенство (8) уточняет теорему 4.4 работы [1] в случае, когда $|\mathrm{Re}\, c_n| > \big(\overline{H}(P) - \overline{L}(P)\big)/(2^{2-n}(n-1)^2)$.

§3. К обобщенной задаче Менделеева

Пусть E – замкнутое ограниченное множество на плоскости $\mathbb{C}$, и пусть $\mathcal{P}_n(E, M)$, $n \geq 1$, – класс полиномов $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, удовлетворяющих условию $|P(z)| \leq M$ для $z \in E$. Под задачей Менделеева понимается отыскание среди полиномов $P(z) \in \mathcal{P}_n(E, M)$ такого полинома, для которого $\sup\{|P'(z)| : z \in E\}$ достигает наибольшего значения. В случае, когда E – окружность $|z| = 1$, задача Менделеева сводится к оценке сверху модуля производной $|P'(z)|$ и её решение хорошо известно [7]:

$$|P'(z)| \leq nM \quad \text{для любых} \quad P(z) \in \mathcal{P}_n(E, M), \quad |z| = 1.$$

Более общей задачей будет следующая. Пусть a и b – некоторые постоянные числа, $P(z)$ – полином степени не выше n и $h(z)$ – неотрицательная функция на $|z| = 1$. Требуется оценить сверху $|aP(z) + bzP'(z)|$ при фиксированном z, $|z| = 1$, если $|P(z)| \leq h(z)$ на окружности $|z| = 1$. Идея рассмотрения такого рода задач принадлежит С. Н. Бернштейну [7, с.497-499]. В книге [8] изучен тот случай, когда $h(z) = |Q(z)|$, где $Q(z)$ – некоторый полином степени $l \leq n$. В частности, получен следующий результат. Пусть $Q(z)$ – полином степени $n \geq 1$, все нули которого принадлежат кругу $|z| < 1$, и пусть $P(z)$ – полином степени не выше n, удовлетворяющий на окружности $|z| = 1$ неравенству $|P(z)| \leq |Q(z)|$. Предположим, что a и b – произвольные числа такие, что либо $b = 0$, либо $b \neq 0$ и $\mathrm{Re}\, a/b \leq n/2$. Тогда при $|z| \geq 1$ имеем

$$|bzP'(z) - aP(z)| \leq |bzQ'(z) - aQ(z)|.$$

Полагая здесь $Q(z)=Mz^n$ и обозначив $a/b=\alpha$, получаем

$$|zP'(z)-\alpha P(z)|\le |n-\alpha|M \tag{9}$$

для всех точек $z,|z|=1$, чисел $\alpha, \mathrm{Re}\,\alpha\le n/2$, и всех полиномов $P(z)$ степени n, удовлетворяющих на окружности $|z|=1$ неравенству $|P(z)|\le M$. При $\alpha=\frac{n}{2}$ этот результат был получен ранее В. И. Смирновым [9] и впоследствии вновь установлен Маликом и Вонгом [10]. Мы собираемся уточнить неравенство (9) для вещественных α, а также рассмотреть оценку левой части (9) с другой стороны. Для этого нам понадобится, в частности, следующая

Теорема [1, с. 34]. *Пусть* $P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$, $M(P):=\max\{|P(z)|:|z|=1\}$, *и пусть* k *– целое неотрицательное число. Тогда для любых точек* z *на окружности* $|z|=1$ *выполняются неравенства*

$$|zP'(z)-kP(z)|\le (n-k-1)M(P)+\sqrt{|c_n|M(P)}\,, \quad \text{если} \quad k<\frac{n}{2}\,, \tag{10}$$

$$|zP'(z)-kP(z)|\le \left(\frac{n}{2}-1\right)M(P)+\sqrt{(|c_0|+|c_n|)M(P)} \quad \text{если} \quad k=\frac{n}{2}\,, \tag{11}$$

$$|zP'(z)-kP(z)|\le (k-1)M(P)+\sqrt{|c_0|M(P)}, \quad \text{если} \quad k>\frac{n}{2}\,. \tag{12}$$

Равенство в (10) *и* (11) *достигается, например, при* $P(z)=c_nz^n$, *а в* (12) *– для* $P(z)=c_0$.

В работе [1] при формулировке этой теоремы допущена ошибка, которая затем повторилась в следствии 4.1 на стр. 36. Именно, в неравенстве (11) и в указанном следствии в работе [1] вместо суммы $|c_0|+|c_n|$ стоит разность $|c_n|-|c_0|$. Доказательство теоремы остается верным, исключая фразу, что можно считать $|c_0+\overline{c}_n|=||c_n|-|c_0||$. Заметим, что из неравенств (4.2) работы [1], справедливых для любых полиномов, следует, что

$$|c_0|\le M(P), \;\; |c_n|\le M(P) \;\text{ и }\; |c_0|+|c_n|\le M(P)\;(k=n/2). \tag{13}$$

Первые два неравенства суть следствия также неравенств Коши.

Теорема 4. *Для любого полинома $P(z)$ степени не выше n и любых $z, |z| = 1$, и вещественных α выполняется неравенство*

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq \frac{1}{2}\left(n + |2\alpha - n|\right) M(P). \tag{14}$$

Равенство в случае $\alpha \leq n/2$ достигается для $P(z) = c_n z^n$, а в случае $\alpha > n/2$ – для $P(z) = c_0$.

Доказательство. При $\alpha \leq 0$ неравенство (14) есть следствие неравенства С. Н. Бернштейна $|P(z)| \leq nM(P)$ и тривиального $|P(z)| \leq M(P)$. При $0 < \alpha \leq n/2$ требуемое неравенство вытекает из (9). Нам интересно увидеть, что в этом случае оно вытекает также из неравенства (10). Действительно, пусть k_l/m_l, $l = 1, 2, \ldots$, – последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α при $l \to \infty$ и такая, что $k_l/m_l < \alpha$. Тогда $k_l < nm_l/2$ и, применяя неравенство (10) к полиному $P(z^{m_l})$, получаем

$$|m_l z^{m_l} P^{'}(z^{m_l}) - k_l P(z^{m_l})| \leq (nm_l - k_l - 1)M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}$$

для любых $z, |z| = 1$, следовательно,

$$\left|zP^{'}(z) - \frac{k_l}{m_l}P(z)\right| \leq \left(n - \frac{k_l}{m_l} - \frac{1}{m_l}\right) M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}/m_l$$

для любых z, $|z| = 1$. Осталось перейти к пределу при $l \to \infty$. Аналогично, при $\alpha > n/2$ рассматриваем последовательность $k_l/m_l \to \alpha$, $l \to \infty$, и такую, что $k_l/m_l > \alpha$. Неравенство (12), применённое к полиному $P(z^{m_l})$, приводит к неравенству (14) для таких α. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ и пусть вещественное α не превосходит целой части $[n/2]$. Тогда в случаях либо нечётного n, либо $\alpha \leq [n/2] - 1$ для любых z на окружности $|z| = 1$ имеем*

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq (n - \alpha - 1)M(P) + \sqrt{|c_n|M(P)}\ .$$

В случае чётного n выполняется неравенство

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq (n - \alpha n/2 - 1)M(P) + \sqrt{|c_n + \overline{c}_n|M(P)}, \quad |z| = 1.$$

Если $\alpha \geq [n/2] + 1$, то справедливо неравенство

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq (\alpha - 1)M(P) + \sqrt{|c_0|M(P)}\ , \quad |z| = 1.$$

Равенство достигается в случаях, указанных в теореме 4.

Доказательство. Для любых α и k имеем

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq |zP^{'}(z) - kP(z)| + |\alpha - k|M(P). \qquad (15)$$

Пусть теперь $\alpha \leq [n/2]$ и n – нечётное. Тогда $k := [n/2] < n/2$ и неравенство (15) вместе с (10) даёт первое неравенство теоремы. В случае $\alpha \leq [n/2] - 1$ полагаем $k := [n/2] - 1 < n/2$ и вновь применяем неравенства (10) и (15). Для чётного n и $\alpha \leq [n/2] = n/2$ берём $k := n/2$ и применяя неравенства (11) и (15), приходим ко второму неравенству теоремы 5. Наконец, в случае $\alpha \geq [n/2] + 1$ необходимо положить $k := [n/2] + 1 > n/2$ и применить неравенства (12) и (15). Теорема доказана.

Ввиду (13), первые два неравенства теоремы 5 уточняют неравенство (9) в случае указанных значений α и n. В дополнение к (9) приведём следующую оценку для полиномов $P(z)$ степени n, не имеющих нулей в круге $|z| < 1$:

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \leq \frac{1}{2}(|\alpha| + |n - \alpha|)M(P);$$

эта оценка справедлива для любых z на окружности $|z| = 1$ и любых $\alpha, |\alpha| \leq n/2$ [11]. Равенство достигается для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n|$, при подходящем z, $|z| = 1$. Что касается оценок выражения $|zP^{'}(z) - \alpha P(z)|$ с другой стороны, то имеет место

Теорема 6. *Если все нули полинома* $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, *лежат в круге* $|z| \leq 1$, *то для любой точки* z *на окружности* $|z| = 1$ *и любого* $\alpha \in \mathbb{C}$ *выполняется неравенство*

$$|zP^{'}(z) - \alpha P(z)| \geq \frac{1}{2}\left(n + 1 - \sqrt{|c_0/c_n|} - 2\mathrm{Re}\,\alpha\right)|P(z)|.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n, |c_0| = |c_n|$, *при вещественных* α *и* $z = \sqrt[n]{c_0/c_n}$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 4 работы [5].

Замечание. Применение теоремы 1 способом, изложенным в §2, приводит к аналогам теорем 4 и 4.1 соответственно работ [5] и [1]. Последние дают новые оценки выражения $|zP^{'}(z) - \alpha P(z)|$, близкие теоремам 5 и 6.

§4. Двусторонние оценки для производной полиномов с ограничениями на критические точки

Теоремы искажения для алгебраических полиномов содержат, как правило, верхние оценки модуля производной. Оценка снизу всегда будет тривиальной, если мы не потребуем дополнительных ограничений на критические точки полинома. В приложениях конформных отображений [1] это обстоятельство отражается тем, что функция $z = F(w)$ в леммах 2.2–2.5 [1] определена на совокупности областей $\{D\}$ и только на одной области D^* из $\{D\}$ она имеет обратную функцию $w = f(z)$, для которой, как известно, существуют двусторонние теоремы искажения. Поведение функции $z = F(w)$ в точках $w \notin \overline{D}^*$ остаётся неизвестным. В том случае, когда область D^* одна и $\overline{D}^* = \{w : |w| \le 1\}$, двусторонние оценки производной $|f^{'}(z)|$ порождают соответствующие оценки для модуля полинома $P(z)$. Этот случай возникает в приложениях леммы 2.7 [1], и соответствующие результаты были анонсированы нами в конце статьи [1]. В данном параграфе мы приведём доказательства некоторых из них.

Пусть $P(z)$ – полином степени n с вещественными коэффициентами, и пусть все его критические точки расположены на отрезке $[-1,1]$. Тогда критические значения этого полинома лежат на отрезке $[\overline{L}(P), \overline{H}(P)]$, где $\overline{L}(P)$ и $\overline{H}(P)$ определены в теореме 3. Обозначим через

$$\Phi_0(\eta) := \eta - \sqrt{\eta^2 - 1}\ , \quad \eta \notin [-1,1],$$

регулярную ветвь функции, обратной функции Жуковского, нормированную условием $\Phi(\infty) = 0$, и положим

$$\Phi(\omega) = \Phi_0\left(\frac{2\omega - \overline{H}(P) - \overline{L}(P)}{\overline{H}(P) - \overline{L}(P)}\right)\ .$$

По лемме 2.7 [1], функция

$$Q(z) := \big(\Phi(P(z))\big)^{1/n}\ , \quad z \in B := \{z : P(z) \notin [\overline{L}(P), \overline{H}(P)]\}$$

распадается в односвязной области B на n регулярных ветвей, каждая из которых однолистно отображает эту область на круг $|\zeta| < 1$. Выберем одну из указанных ветвей и будем обозначать её также через $Q(z)$. Наконец, определим функцию

$$F(w) := Q\left(\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right), \tag{16}$$

которая конформно и однолистно отображает область

$$D := \left\{ w : |w| < 1, \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \in B \right\}$$

на круг $|\zeta| < 1$.

Теорема 7. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ с вещественными коэффициентами $c_k, k = 0, 1, \ldots, n$, $c_n \neq 0$, и с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &\frac{\left(1 + |\Phi_0(z)|\right)\left(1 - |\Phi(P(z))|^{1/n}\right)}{\left(1 - |\Phi_0(z)|\right)\left(1 + |\Phi(P(z))|^{1/n}\right)} \\ &\leq \frac{|P'(z)\sqrt{z^2 - 1}\,|}{n\left|\sqrt{(P(z) - \overline{L}(P))(P(z) - \overline{H}(P))}\;\right|} \\ &\leq \frac{\left(1 - |\Phi_0(z)|\right)\left(1 + |\Phi(P(z))|^{1/n}\right)}{\left(1 + |\Phi_0(z)|\right)\left(1 - |\Phi(P(z))|^{1/n}\right)}\ , \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\frac{|\Phi(P(z))|^{1/n}\left(1 - |\Phi(P(z))|^{2/n}\right)}{|\Phi_0(z)|\left(1 - |\Phi_0(z)|^2\right)} \\ &\leq \frac{|P'(z)\sqrt{z^2 - 1}\,|}{n\delta(P)\left|\sqrt{(P(z) - \overline{L}(P))(P(z) - \overline{H}(P))}\;\right|} \\ &\leq \frac{|\Phi(P(z))|^{1/n}\ \left(1 - |\Phi_0(z)|^2\right)}{|\Phi_0(z)|\ \left(1 - |\Phi(P(z))|^{2/n}\right)}\ , \end{aligned} \tag{18}$$

где z – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$, для которой $P(z) \notin \left[\,\overline{L}(P), \overline{H}(P)\right]$, а $\delta(P) = \left\{2^{2-n}|c_n|/(\overline{H}(P) - \overline{L}(P))\right\}^{1/n}$. Равенство в (17), (18) имеет место для полиномов $aT_n(z) + b$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}$, и любых $z \notin [-1, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w = f(\zeta) = \alpha\zeta + \ldots\ ,$$

обратную функции $\zeta = F(w)$ (16). Нетрудно убедиться, что $|\alpha| = \delta(P)$, следовательно, по лемме Шварца, $\delta(P) \le 1$. В работе [12] Н. А. Лебедев установил ряд неравенств для регулярных, однолистных и ограниченных в круге функций. Неравенства (7.3) и (6.4) из этой работы дают соответственно

$$\frac{(1-|\zeta|)(1+|f(\zeta)|)}{(1+|\zeta|)(1-|f(\zeta)|)} \le \left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| \le \frac{(1+|\zeta|)(1-|f(\zeta)|)}{(1-|\zeta|)(1+|f(\zeta)|)}\ ,$$

$$\frac{1-|\zeta|^2}{1-|f(\zeta)|^2} \le \left|\frac{\alpha\zeta^2 f'(\zeta)}{f(\zeta)^2}\right| \le \frac{1-|f(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\ ,$$

для любых точек $\zeta \ne 0$ из круга $|\zeta| < 1$. Принимая во внимание, что $\Phi_0(z) = w = f(\zeta)$, имеем

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| &= \left|\frac{F(w)}{w\,F'(w)}\right| = \left|\frac{F(w)}{w\,\frac{dQ}{dz}\cdot\frac{dz}{dw}}\right| \\ &= \left|\frac{\Phi^{\frac{1}{n}}(P(z))\ (\overline{H}(P)-\overline{L}(P))}{\frac{1}{n}\Phi^{\frac{1}{n}-1}(P(z))(d\Phi_0/d\eta)P'(z)\left(w-\frac{1}{w}\right)}\right| \\ &= \left|\frac{n\ \sqrt{(P(z)-\overline{L}(P))(P(z)-\overline{H}(P))}}{P'(z)\sqrt{z^2-1}}\right|.\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (17) вытекает из первого неравенства Н. А. Лебедева, а неравенство (18) – из второго. В случае, когда $P(z) = aT_n(z)+b$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, выполняется

$$\begin{aligned}F(w) &= \Phi\big(P(z)\big)^{\frac{1}{n}} = \big(\Phi_0\big(\pm T_n(z)\big)\big)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\Phi_0\left(\pm\frac{1}{2}\left(w^n+\frac{1}{w_n}\right)\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \beta w,\end{aligned}$$

где $|\beta| = 1$. Следовательно, неравенства Н. А. Лебедева и вместе с ними неравенства (17) и (18) превращаются в тождества на $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Теорема доказана.

Рассмотрим следствие правого неравенства в (18) при стремлении точки z к отрезку $[-1,1]$. Точнее, пусть x_0 – произвольная точка отрезка $[-1,1]$, отличная от ±1, и пусть точка x принадлежит перпендикуляру, проведённому к вещественной оси в точке

x_0, $x \neq x_0$, $P(x) \notin [\overline{L}(P), \overline{H}(P)]$. Положив в (18) $z = x$, поделив числитель и знаменатель правой части неравенства (18) на $x - x_0$ и переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем

$$\frac{|P'(x_0)\sqrt{x_0^2 - 1}\ |}{n\delta(P)\left|\sqrt{\left(P(x_0) - \overline{L}(P)\right)\left(P(x_0) - \overline{H}(P)\right)}\ \right|} \leq \left|\frac{d\Phi_0}{dz}\right|_{z=x_0} \Bigg/ \left|\frac{d\Phi^{1/n}(P(z))}{dz}\right|_{z=x_0}.$$

Отсюда

$$|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \leq n\sqrt{\delta(P)}\ \sqrt{\left(P(x) - \overline{L}(P)\right)\left(\overline{H}(P) - P(x)\right)} \qquad (19)$$

для любых $x \in [-1, 1]$. Это неравенство было доказано нами ранее [1, с. 41].

Полагая в (17), (18) $z \to x \in \mathbb{R}$, где $P(x) \notin [\overline{L}(P), \overline{H}(P)]$, получим оценки, анонсированные нами в конце статьи [1].

§5. О неравенствах для коэффициентов алгебраических полиномов

Пусть $z = F(w)$ – одна из функций, указанных в леммах 2.2–2.5 работы [1], построенная по заданному полиному $P(z)$. Обозначим через

$$w = f(z) = \alpha z + \alpha_1 z^2 + \dots \qquad , \qquad |z| < 1,$$

обратную функцию для $z = F(w)$. Тогда функция

$$\widetilde{f}(z) = f(z)/\alpha = z + \frac{\alpha_1}{\alpha} z^2 + \dots$$

принадлежит известному классу S_M регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих условиям $\widetilde{f}(0) = 0, \widetilde{f}'(0) = 1$ и $|\widetilde{f}(z)| < M$ при $|z| < 1$ $(M = 1/|\alpha|)$. К настоящему времени доказано немало теорем для функций данного класса (см., например, [12–15]). В частности, известно немало оценок коэффициентов функции $\widetilde{f}(z)$. Из этих оценок вытекают некоторые оценки для коэффициентов исходного полинома $P(z)$. Не рассматривая данный вопрос подробно, ограничимся, в основном, примерами оценок, вытекающих из известного неравенства

$$|\alpha_1/\alpha| \leq 2(1 - |\alpha|)$$

[13, с. 94]. Если функция $z = F(w)$ имеет в окрестности начала координат разложение

$$F(w) = \frac{1}{\alpha} w + \beta w^2 + \dots ,$$

то указанное неравенство запишется в виде

$$|\alpha^2 \beta| \le 2(1 - |\alpha|). \tag{20}$$

Равенство достигается, например, в случае $F(w) \equiv w/\alpha, \quad |\alpha| = 1$.

Теорема 8. *Для любого полинома* $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$ *справедливо неравенство*

$$|c_{n-1}| + 2|c_n| \le H(P) - L(P),$$

где $H(P)$ *и* $L(P)$ *определены в теореме 2. Равенство достигается в случае* $P(z) = c_0 + c_n z^n$.

Доказательство. Можно считать, что $c_n \ne 0$. Рассмотрим функцию

$$z = F(w) := w^{1-n}\ \Phi\big(P(1/w) + \overline{P(\overline{w})}\ \big) = \frac{1}{\alpha} w + \beta w^2 + \dots$$

из леммы 2.2 работы [1]. Здесь

$$\Phi(\omega) = \Phi_0 \left(\frac{\omega - H(P) - L(P)}{H(P) - L(P)} \right),$$

а $\Phi_0(\eta)$, как и выше, обратная для функции Жуковского. Для определения коэффициентов α и β умножим $F(w)$ на w^{n-1} и применим функцию Жуковского:

$$\frac{1}{\alpha} w^n + \beta w^{n+1} + \ldots = \Phi \left(\frac{c_n}{w^n} + \frac{c_{n-1}}{w^{n-1}} + \ldots \right),$$

$$\frac{\alpha}{w^n} - \frac{\alpha^2 \beta}{w^{n-1}} + \ldots = \frac{2}{H(P) - L(P)} \left[\frac{c_n}{w^n} + \frac{c_{n-1}}{w^{n-1}} + \ldots \right],$$

где w лежит в окрестности точки $w = 0$. Отсюда

$$\alpha = 2c_n / \big(H(P) - L(P)\big),$$
$$\alpha^2 \beta = -2c_{n-1} / \big(H(P) - L(P)\big).$$

Неравенство (20) даёт

$$|c_{n-1}| \le \big(H(P) - L(P)\big) - 2|c_n|,$$

что завершает доказательство теоремы.

Заметим, что полученное неравенство содержит классическую оценку

$$|c_n| \le \big(H(P) - L(P)\big)/2 \ ,$$

которая вытекает также из леммы Шварца: $|\alpha| \le 1$.

Теорема 9. *Если все нули полинома* $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$ *лежат в круге* $|z| \le 1$, *то справедливо неравенство*

$$|c_{n-1}\overline{c}_0 - c_n \overline{c}_1| \le 2|c_n|(|c_n| - |c_0|).$$

В случае, когда все нули полинома $P(z)$ *расположены на множестве* $|z| \ge 1$, *имеет место неравенство*

$$|c_{n-1}\overline{c}_0 - c_n \overline{c}_1| \le 2|c_0|(|c_0| - |c_n|) \ .$$

Равенство в обоих случаях достигается для полиномов $P(z)$ *с нулями на единичной окружности* $|z| = 1$.

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство. Можно считать, что все нули полинома $P(z)$ лежат в открытом круге $|z| < 1$ и $c_0 \ne 0, \quad c_n \ne 0$. Введём функцию из леммы 2.4 [1]:

$$F(w) := w^{n+1} P\,(1/w) \,/\, \overline{P(\overline{w})} = \frac{1}{\alpha} w + \beta w^2 + \ldots \ .$$

Простые вычисления показывают, что на этот раз

$$\alpha = \frac{\overline{c}_0}{c_n} \qquad \text{и} \qquad \beta = \frac{c_{n-1}}{\overline{c}_0} - \frac{c_n \overline{c}_1}{(\overline{c}_0)^2}.$$

Осталось применить неравенство (20). Для доказательства второго неравенства достаточно применить первое неравенство к полиному $\widetilde{P}(z) = z^n P(1/z)$, либо аналогично предыдущему воспользоваться леммой 2.5 [1]. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть* $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$, $M(P) = \max\{|P(z)| : |z| = 1\}$, $m(P) = \min\{|P(z)| : |z| = 1\}$. *Тогда*

$$2|c_{n-1}\overline{c}_0 + c_n \overline{c}_1| \le M^2(P) - m^2(P) - 4|c_0 c_n|$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n|$.

Доказательство. Можно считать $c_0 \ne 0$ и $c_n \ne 0$. В работах [5] и [1, с. 30] рассматривалась функция

$$z = F(w) := w^{-n+1}\, \Phi\left(P(1/w)\overline{P(\overline{w})}\right) = \frac{1}{\alpha} w + \beta w^2 + \ldots \ ,$$

где
$$\Phi(\omega) = \Phi_0\left(\frac{2\omega - M^2(P) - m^2(P)}{M^2(P) - m^2(P)}\right),$$
и $\Phi_0(\eta)$ та же, что и выше. Повторяя простые вычисления, приведенные при доказательстве теоремы 8, находим в нашем случае
$$\alpha = 4c_n\overline{c}_0\big/\big(M^2(P) - m^2(P)\big),$$
$$\alpha^2\beta = -4(c_{n-1}\overline{c}_0 + c_n\overline{c}_1)\big/\big(M^2(P) - m^2(P)\big).$$
Осталось применить неравенство (20). В случае $P(z) = c_0 + c_nz^n, |c_0| = |c_n|$, имеем $|\alpha| = 1$ и, следовательно, правая часть неравенства теоремы 10 равна нулю. Отсюда левая часть также равна нулю и мы имеем равенство. Теорема доказана.

Теорема 11. *Для полинома $P(z) = c_0 + c_1z + \ldots + c_{n-1}z^{n-1} + c_nz^n$ с вещественными коэффициентами $c_k, k = 0, 1, \ldots, n$, и с критическими точками на отрезке $[-1, 1]$ выполняется неравенство*
$$\left(|c_{n-1}|/n + |c_n|\right)^n \le 2^{n-2}|c_n|^{n-1}\left(\overline{H}(P) - \overline{L}(P)\right), \tag{21}$$
где $\overline{H}(P) = \max\{P(z) : z \in [-1, 1]\}$, $\overline{L}(P) = \min\{P(z) : z \in [-1, 1]\}$. Равенство достигается для полиномов $P(z) = aT_n(z) + b$, $a \in \mathbb{R}\backslash 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Доказательство осуществляется также как и выше, но с применением функции (16). Случай равенства проверяется непосредственно.

Предположим, что в условиях теоремы 11 выполняется
$$|P(z)| \le 1\ , \qquad \text{когда} \qquad z \in [-1, 1].$$
Из неравенства (21) в этом случае следует, что
$$\left(|c_{n-1}|/n + |c_n|\right)^n \le \left(2|c_n|\right)^{n-1}\ . \tag{22}$$
Как впервые замечено А. В. Олесовым, неравенство (20), применённое к функции $F(w)$ из леммы 2.3 [1], даёт
$$|c_{n-1}| + |c_n| \le 2^{n-1}\ . \tag{23}$$
Легко видеть, что неравенство (23) слабее (22), но оно справедливо без каких либо ограничений на критические точки полинома $P(z)$. Ранее В. А. Марковым было показано
$$|c_{n-1}|/n + |c_n| \le 2^{n-1}$$
с равенством для полинома Чебышева $T_n(z)$.

Теорема 12. *В условиях предыдущей теоремы справедливы неравенства*

$$|c_n| \geq \left(\frac{|c_1|}{n}\right)^{2n} \frac{2^{3n-2}}{\left(\overline{H}(P) - \overline{L}(P)\right)^{2n-1}},$$
$$|c_1| \leq \frac{n}{2}\left(\overline{H}(P) - \overline{L}(P)\right)$$

с равенствами для полинома Чебышева $T_n(z)$ при нечётном n.

Доказательство. Первое неравенство вытекает из неравенства (19), где необходимо положить $x = 0$. Второе неравенство следует из первого, если воспользоваться классической оценкой

$$|c_n| \leq 2^{n-2}\left(\overline{H}(P) - \overline{L}(P)\right)$$

$(\delta(P) \leq 1)$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Из неравенства (19) вытекает также следствие:

$$|P'(x)| \leq n^2\, \overline{M}(P) \left|2^{1-n} c_n / \overline{M}(P)\right|^{1/n}, \quad x \in [-1, 1],$$

где $\overline{M}(P) = \max\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\}$. При дополнительном ограничении $\overline{M}(P) = 1$ и с привлечением неравенства Турана [16] имеем другую оценку $|c_n|$:

$$|c_n| \geq 2^{n-1}\left(n^{-3/2}/6\right)^n.$$

Интересно было бы знать точную нижнюю оценку $|c_n|$ в данных условиях, не зависящую от других коэффициентов полинома $P(z)$.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов*, Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.
2. R. Osserman, *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, No. 12 (2000), 3513–3517.
3. В. Н. Дубинин, *К неравенству Шварца на границе для регулярных в круге функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 73–83.
4. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и экстремальные задачи в некоторых классах однолистных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 115–142.

5. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности*, Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
6. В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, *О применении конформных отображений к неравенствам для полиномов*, Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 84–101.
7. С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений, т.* I. *Конструктивная теория функций* (1905-1930), М., 1952.
8. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, М.-Л., 1964.
9. В. И. Смирнов, *Sur que'ques polynomes aux proprietes extremales* , Зап. Харьк. Мат. об-ва **4** (1928), 67–72.
10. M. A. Malik, M. C. Vong, *Inequalities concerning the derivative of polynomials*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **34** (1985), 422–426.
11. V. K. Jain, *Generalization of certain well known inequalities for polynomials*, Glas. Mat. Ser. III **32(52)** (1997), 45–51.
12. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге*, Вестн. ЛГУ, No. 11, сер. мат., физ. и химии, вып. 4 (1955), 3–21.
13. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, М., 1975.
14. D. V. Prokhorov, *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions*, Saratov Univ., Saratov, 1993.
15. A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, Lect. Notes in Math.: **1788** (2002).
16. P. Turan, *Über die Ableitung von Polynomen*, Compositio Math. **7** (1939), 89–95.

Институт прикладной математики,
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 9 сентября 2003 г.

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru